DS4 (version A) /129

Exercice 1 /40

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

- **1 pt :** $\mathcal{E} = \text{Vect}\,(A, B, C)$
- **1 pt : caractère générateur**
- **1 pt : caractère libre**

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \ MN \in \mathcal{E}$$

- **1 pt : calcul de** MN
- **1 pt : conlusion (**$\in \text{Vect}\,(A, B, C)$ **ou triangulaire supérieure)**

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

- **1 pt :** $M^{-1} = \dfrac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M^{-1} \in \mathcal{E}$

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

- **1 pt : caractère morphisme**
- **2 pts : caractère endo (1 pt pour** $TM \in \mathcal{E}$**, 1 pt pour** $(TM)T \in \mathcal{E}$**)**

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

- **1 pt :** $\det(T) \neq 0$
- **1 pt :** $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$
- **1 pt :** f **injectif donc bijectif car endomorphisme de** $\mathcal{E}$ **dimension finie.**

6. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{A,B,C}(f(A)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{A,B,C}(f(B)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{A,B,C}(f(C)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

- **1 pt : obtention du système linéaire** $\{a + c = 0$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(-A + C, B)$
  0 si confusion d'objets
- **1 pt : caractère générateur**
- **1 pt : caractère libre**
- **1 pt : dimension**

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda\, M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : obtention du système**
- **1 pt : résolution du système avec argument** $\lambda \neq 1$
- **1 pt : l'unique solution de l'équation est** $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

- **1 pt :** $H^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** I **et** aH **commutent**
- **1 pt : formule du binôme correcte**
- **1 pt : découpage valable car** $n \geqslant 1$
- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2,\ H^k = 0$ **(par récurrence immédiate)**
- **1 pt :** $\forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I$
- **1 pt :** $(I + aH)^n = I + anH$
- **1 pt : cas** $n = 0$

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

- **1 pt : utilisation de la question *9.*** $F^n = I + nH$

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

- **2 pts : trouver** $G = I + \frac{1}{3}H$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g^3) = G^3$
- **1 pt :** $g^3 = f$ **(par l'isomorphisme de représentation)**

Exercice 2 /50

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f /22

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

- **1 pt :** f **deux fois dérivable sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\forall x \in\,]0, +\infty[$, $f'(x) = \mathbf{e}^x - \dfrac{\mathbf{e}}{x}$
- **1 pt :** $\forall x \in\,]0, +\infty[$, $f''(x) = \mathbf{e}^x + \dfrac{\mathbf{e}}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

- **1 pt : signe de** $f''(x)$ **et sens de variations de** f'
- **1 pt : limite de** f' **en** $+\infty$ **et en** 0
- **1 pt : calcul de** $f'(1)$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$		$+$	
Variations de f'	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

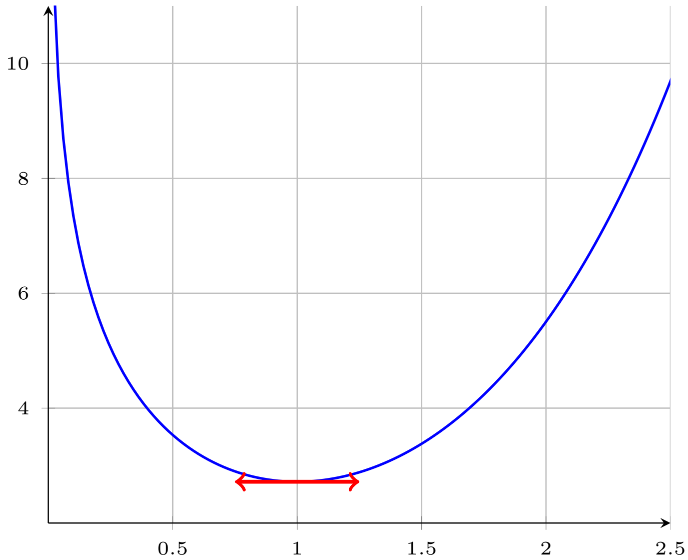
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

- **1 pt : signe de** $f'(x)$ **et sens de variations de** f
- **1 pt : limite de** f **en** $+\infty$
- **1 pt : limite de** f **en** 0 **et : calcul de** $f(1)$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **4 pts : tangente, limites, cohérence avec le TV, propreté**



4. a) Étudier les variations de la fonction $u : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array} \right.$

- **1 pt :** u **dérivable sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $u'(x) = \dfrac{x^2\,(\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}}{x^2}$
- **1 pt : signe de** $u'(x)$ **et sens de variations de** u

x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $u'(x)$	$+$
Variations de u	$-\infty \nearrow +\infty$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

- **1 pt :** $f'(x) = x \Leftrightarrow u(x) = 0$
- **3 pts : théorème de la bijection**
  - × **1 pt : hypothèses**
  - × **1 pt :** $u(\,]0,+\infty[\,) = \,]-\infty,+\infty[$
  - × **1 pt :** $0 \in \,]-\infty,+\infty[$
- **1 pt :** $u(1) < u(\alpha) < u(2)$
- **1 pt : application de** $u^{-1} : \,]-\infty,+\infty[\to \,]0,+\infty[$ **strictement croissante sur** $]-\infty,+\infty[$

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série /28

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

6. *a)* Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \left\{ \begin{array}{rcl} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array} \right.$

- **1 pt :** g **dérivable sur** $[2, +\infty[$ **et** $g' : x \mapsto f'(x) - 1$
- **1 pt : signe de** $g'(x)$ **et variations de** g

x	2 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$g(2) \nearrow +\infty$

- **1 pt :** $g(2) > 0$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$
- **1 pt : utilisation de :** $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) > x$ **(qst précédente)**

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

- **1 pt : théorème de convergence monotone**
- **3 pts : raisonnement par l'absurde**
  - × **1 pt : structure du raisonnement**
  - × **1 pt :** $\ell \geqslant 2$ **et** $g(\ell) = 0$
  - × **1 pt : d'après *6.a)*,** $\forall x \geqslant 2$, $g(x) \neq 0$

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : boucle while**
- **1 pt :** `disp(N)`

```
A = input('Entrez un réel A : ')
N = 0
u = 2
while u < A
    N = N + 1
    u = exp(u) - %e * log(u)
end
disp(N)
```

9. a) Démontrer : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$.

- **3 pts : minoration**
  - × **1 pt :** $\ln$ **concave sur** $]0,+\infty[$
  - × **1 pt : équation de tangente** $y = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ (x-2)$
  - × **1 pt :** $2\,(\ln(2)-1) < 0$
- **3 pts : majoration**
  - × **1 pt :** $h : x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x}{3} - x$ **dérivable sur** $[2,+\infty[$ **et** $h' : x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x - 3}{3}$
  - × **1 pt : signe de** $h'(x)$ **et variations de** h

x	$2 \qquad\qquad +\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$
Variations de h	$h(2) \nearrow +\infty$

  - × **1 pt :** $h(2) \geqslant 0$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-e}{2}\ u_n$.

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2,+\infty[$ **donc on applique la qst précédente**
- **1 pt : reste**

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

- **1 pt : par récurrence immédiate** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathbf{e}}{2}\right)^n$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$
- **2 pts : critère de comparaison des SATP**
  - × **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$
  - × **1 pt :** $\sum \left(\dfrac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$ **série géométrique de raison** $\dfrac{2}{6-\mathbf{e}} \in\ ]-1,1[$

Exercice 3 /39

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

- **2 pts :** $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
  - × **1 pt : description de l'expérience**
  - × **1 pt : description de la v.a.r.** Y

On revient au cas général

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

- **2 pts :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
  - × **1 pt : description de l'expérience**
  - × **1 pt : description de la v.a.r.** X
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ **et** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{2}$

3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X = k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])$.

- **3 pts : la loi conditionnelle de** Y **sachant** $[X = k]$ **est la loi** $\mathcal{B}(k, p)$
  - × **1 pt : Si l'événement** $[X = k]$ **est réalisé, c'est que...**
    0 à la moindre confusion d'objets
  - × **1 pt : description expérience**
  - × **1 pt : description v.a.r.** Y

  -2 si non-sens (par exemple $\cancel{{}_{[X=k]}Y}$ **ou** $\cancel{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k,p)}$**)**
- **1 pt :** $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \textbf{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \textbf{si } i > k \end{cases}$

4. On rappelle les commandes **Scilab** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$,
- `grand(1, 1, 'bin', n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p,
- `grand(1, 1, 'geom', p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p,
- `grand(1, 1, 'poi', a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
X = ------
Y = ------
```

- **1 pt :** `X = grand(1, 1, 'uin', 1, n)`
- **2 pts :** `Y = grand(1, 1, 'bin', X, p)`

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}(\,[Y = 0]\,) \ = \ \frac{q\,(1 - q^n)}{n\,(1 - q)}$$

- **1 pt : justification** $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- **4 pts :** $\mathbb{P}(\,[Y = 0]\,) \ = \ \dfrac{q\,(1 - q^n)}{n\,(1 - q)}$
  × **1 pt :** $(\ [X = k]\ )_{k \in [\![1,n]\!]}$ **est un SCE**
  × **1 pt : FPT**
  × **1 pt :** $\mathbb{P}([X = k]) \neq 0$
  × **1 pt : fin du calcul**

b) Écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(\,[Y = i]\,)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

- **1 pt : FPT sur le SCE** $(\ [X = k]\ )_{k \in [\![1,n]\!]}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y = i]) = \dfrac{1}{n} \left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])} + \sum\limits_{k=i}^{n} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) \right)$
- **1 pt : reste du calcul**

6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Démontrer : $i \dbinom{k}{i} = k \dbinom{k-1}{i-1}$.

- **2 pts**

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i\, q^{k-i} \right)$$

- **1 pt :** Y **admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} i\, \mathbb{P}([Y = i])$
- **1 pt : interversion sommes** $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=i}^{n} = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k}$
- **1 pt : utilisation qst précédente**

c) En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\,p}{2}$.

- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt : binôme de Newton**
- **1 pt : reste du calcul**

7. a) Établir :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \left(k\,(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} \, p^i \, q^{k-i} \right)$$

- **1 pt : $Y(Y-1)$ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt : théorème de transfert**
- **1 pt : échange de somme**
- **1 pt : utilisations de *6.a)***

b) Montrer que l'on a :
$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

- **1 pt : formule du binôme de Newton**
- **2 pts : reste du calcul**

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

- **1 pt**
  0 si erreur de logique

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

- **1 pt : formule de Koenig-Huygens**
- **1 pt : reste ($Y^2 = Y(Y-1) + Y$ et linéarité de l'espérance)**