

EDHEC 2020

Exercice 1

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2. a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que \mathcal{B} est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

4. a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de \mathcal{B} .

c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5. a) Écrire la matrice F de f dans la base \mathcal{B} . On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

b) En déduire les valeurs propres de f .

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \text{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où σ est strictement positif.

On rappelle que la fonction $f_X : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X , définie sur \mathbb{R} par :

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^x f_x(t) dt$$

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y , définie par :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 2F_X(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y .

c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Y) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y .

On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$.

a) Montrer que S_n est un estimateur de σ , donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ , que l'on notera T_n , construit de façon affine à partir de S_n .

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X , puis déterminer $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ . En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ .

4. On rappelle qu'en **Scilab**, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande **grand**(i , j , 'nor', \mathbf{m} , \mathbf{s}) simule dans un tableau à i lignes et j colonnes, $i \times j$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance \mathbf{m} et de variance \mathbf{s}^2 .

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```

1  n = input('entrez la valeur de n : ')
2  sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
3  X = ----- // simulations de X1, ..., Xn
4  Y = ----- // simulations de Y1, ..., Yn
5  S = -----
6  T = -----

```

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

On revient au cas général

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y , conditionnellement à l'événement $[X = k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])$.

4. On rappelle les commandes **Scilab** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$,
- `grand(1, 1, 'bin', n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p ,
- `grand(1, 1, 'geom', p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p ,
- `grand(1, 1, 'poi', a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a .

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```

1  n = input('entrez la valeur de n : ')
2  p = input('entrez la valeur de p : ')
3  X = -----
4  Y = -----
```

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égale à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

b) Écrire, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}([Y = i])$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Démontrer : $i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$.

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

c) En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

7. a) Établir :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}(Y(Y-1))$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Problème

On convient que, pour tout réel x , on a : $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de \mathbb{N} , justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

2. Calculer I_0 et I_1 .

3. a) Pour tout n de \mathbb{N} , calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

b) En déduire I_2 .

c) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable **b**) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = input('donnez une valeur pour n : ')
2  a = 1/2
3  b = log(2) - 1/2
4  for k = 2:n
5      aux = a
6      a = -----
7      b = -----
8  end
9  disp(b)

```

4. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n J_{n-1} - \frac{1}{2}$.

6. a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n .

b) En déduire la valeur de J_1 .

7. En utilisant les questions 5. et 6., compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = input('donnez une valeur pour n : ')
2  J = log(2)
3  for k = 1:(n-1)
4      J = -----
5  end
6  I = -----
7  disp(I)

```

8. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.
9. a) Utiliser les questions 4. et 5. pour déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
- b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
- c) Utiliser la question 5. pour déterminer un équivalent de J_n , du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
10. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose : $u_n = \ln(2) - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.
- a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
- b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?
11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ , alors la suite (x_n) converge vers ℓ .
- Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
- a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - k u_k + (-1)^k$.
- b) En déduire l'égalité suivante :
- $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$$
- c) Démontrer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.
12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer :
- a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$ b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$ c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$