

Programme de colle - Semaine 9

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8 .
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note ≤ 8 .

Questions de cours

• Stabilité des lois de Poisson

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y **indépendantes**, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Démonstration.

- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $(X + Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un SCE.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}([X + Y = k]) \\
 = & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [X + Y = k]) \\
 = & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = k - i]) \\
 = & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) \mathbb{P}([Y = k - i]) && \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \\
 = & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) \mathbb{P}([Y = k - i]) \\
 + & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \notin Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) \mathbb{P}([Y = k - i]) && \text{(car } [Y = k - i] = \emptyset \text{ si } k - i \notin Y(\Omega)) \\
 = & \sum_{i=0}^k \mathbb{P}([X = i]) \mathbb{P}([Y = k - i])
 \end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\begin{cases} k - i \in Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ i \in \llbracket 0, +\infty \llbracket \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq k - i \\ 0 \leq i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i \leq k \\ 0 \leq i \end{cases} \Leftrightarrow \{ 0 \leq i \leq k \}$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X + Y = k]) &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}([X = i]) \mathbb{P}([Y = k - i]) \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} && \text{(car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)) \\
&= e^{-\lambda} e^{-\mu} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i! (k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i! (k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} (\lambda + \mu)^k && \text{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Finalemment : $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. □

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Attention : cette propriété n'est pas au programme. Il est néanmoins nécessaire de connaître sa démonstration.

Soient X et Y deux v.a. discrètes admettant un moment d'ordre 2.

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$$

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

La v.a.r. $\lambda X + Y$ admet une variance comme combinaisons linéaire de v.a.r. admettant une variance.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\lambda X + Y) &= \text{Cov}(X + \lambda Y, X + \lambda Y) \\
&= \mathbb{V}(\lambda X) + 2 \text{Cov}(\lambda X, Y) + \mathbb{V}(Y) \\
&= \lambda^2 \mathbb{V}(X) + 2 \lambda \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)
\end{aligned}$$

- On note f la fonction polynomiale définie par :

$$f : \lambda \mapsto \mathbb{V}(X) \lambda^2 + 2 \text{Cov}(X, Y) \lambda + \mathbb{V}(Y)$$

La fonction f est une fonction polynomiale de degré 2 en λ .

On note P le polynôme de degré 2 associé.

- D'après le 1^{er} point :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda) = \mathbb{V}(\lambda X + Y)$$

Or une variance est toujours positive. Ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda) \geq 0$.

- La fonction f étant positive, le polynôme associé P est de signe constant.

Son discriminant Δ est donc négatif ou nul. Or :

$$\Delta = (2 \text{Cov}(X, Y))^2 - 4 \mathbb{V}(X) \mathbb{V}(Y) = 4 \left((\text{Cov}(X, Y))^2 - \mathbb{V}(X) \mathbb{V}(Y) \right)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\text{comme} && \Delta \leq 0 \\
&\text{alors} && 4 \left((\text{Cov}(X, Y))^2 - \mathbb{V}(X) \mathbb{V}(Y) \right) \leq 0 \\
&\text{donc} && (\text{Cov}(X, Y))^2 - \mathbb{V}(X) \mathbb{V}(Y) \leq 0
\end{aligned}$$

□

• **Propriétés de la covariance**

1. Symétrie :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

2. Linéarité à gauche :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \text{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda \text{Cov}(X_1, Y) + \mu \text{Cov}(X_2, Y)$$

3. Linéarité à droite :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \text{Cov}(X, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda \text{Cov}(X, Y_1) + \mu \text{Cov}(X, Y_2)$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cov}(a, X) = 0$$

Preuve.

1. Par définition de la covariance,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))(X - \mathbb{E}(X))) \\ &= \text{Cov}(Y, X) \end{aligned}$$

2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soient X_1, X_2 et Y des v.a.r. admettant un moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) &= \mathbb{E}((\lambda X_1 + \mu X_2)Y) - \mathbb{E}(\lambda X_1 + \mu X_2)\mathbb{E}(Y) && \text{(d'après la formule de Koenig-Huyghens)} \\ &= \mathbb{E}(\lambda X_1 Y + \mu X_2 Y) - \mathbb{E}(\lambda X_1 + \mu X_2)\mathbb{E}(Y) \\ &= \lambda \mathbb{E}(X_1 Y) + \mu \mathbb{E}(X_2 Y) - (\lambda \mathbb{E}(X_1) + \mu \mathbb{E}(X_2))\mathbb{E}(Y) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \lambda \mathbb{E}(X_1 Y) + \mu \mathbb{E}(X_2 Y) - \lambda \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y) - \mu \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(Y) \\ &= \lambda (\mathbb{E}(X_1 Y) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y)) + \mu (\mathbb{E}(X_2 Y) - \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \lambda \text{Cov}(X_1, Y) + \mu \text{Cov}(X_2, Y) && \text{(d'après la formule de Koenig-Huyghens)} \end{aligned}$$

3. Idem point précédent

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une v.a.r. admettant un moment d'ordre 2. D'après la formule de Koenig-Huyghens, on a :

$$\text{Cov}(a, X) = \mathbb{E}(aX) - \mathbb{E}(a)\mathbb{E}(X) = a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(a)\mathbb{E}(X)$$

Or $a \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{E}(a) = a$. D'où $\text{Cov}(a, X) = 0$.

□

Connaissances exigibles

Couples de v.a.r.

- On ne considère que des couples de v.a. **discrètes**.
- Les colleurs sanctionneront très sévèrement les confusions entre objets mathématiques : probabilité / événement, variable aléatoire / événement, expérience / variable aléatoire, etc.
- Lois de couples, lois marginales, lois conditionnelles.
- Indépendance (pour 2 ou n v.a.), lemme des coalitions.
- Loi d'une fonction d'un couple de v.a. discrète $Z = g(X, Y)$. En particulier, loi de la somme, du produit, du maximum, du minimum. Stabilité par somme de la loi binomiale et de la loi de Poisson.
- Espérance de la somme, du produit.
- Covariance, lien avec la variance. X et Y indépendantes implique $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
- Variance d'une somme.
- Coefficient de corrélation linéaire.