DM2

Exercice 1

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. ***a)*** Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n) :` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon) :
2     n = 0
3     while ............ :
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

Exercice 2

On désigne par id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A+I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.
Déterminer l'ensemble F.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

4. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,A\big)$.

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.