DM3

On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ & & P & \mapsto & (X^2+1)\ P' - 2\,(X+1)\,P \end{array}$$

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Commentaire

Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2) (si la notation P_i n'est pas utilisée dans l'énoncé).

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que φ est linéaire
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}_2[X])^2$.

$$\begin{array}{rl} & \Big(\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\Big)(X) \\ = & (X^2+1)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) - 2\,(X+1)\,(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \\ = & (X^2+1)\ (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) - 2\,(X+1)\,(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \qquad \textit{(par linéarité de l'application dérivée)} \\ = & (X^2+1)\ (\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)) - 2\,(X+1)\,(\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X)) \\ = & \lambda \cdot (X^2+1)\ P'(X) + \mu \cdot (X^2+1)\ Q'(X)) - 2\lambda \cdot (X+1)\,P(X) - 2\mu \cdot (X+1)\,Q(X) \\ = & \lambda \cdot \Big((X^2+1)\ P'(X) - 2 \cdot (X+1)\,P(X)\Big) + \mu \cdot \Big((X^2+1)\ Q'(X) - 2 \cdot (X+1)\,Q(X)\Big) \\ = & \lambda \cdot \Big(\varphi(P)\Big)(X) + \mu \cdot \Big(\varphi(Q)\Big)(X) \\ = & \Big(\lambda \cdot \varphi(P) + \mu \cdot \varphi(Q)\Big)(X) \end{array}$$

  L'application φ est donc linéaire.
- Démontrons que φ est à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$
  Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$.
  - Comme $\deg(P) \leqslant 2$, alors :
    × $\deg(P') \leqslant 1$ donc $\deg\big((X^2+1)\ P'\big) \leqslant 3$.
    × $\deg\big(-2(X+1)\ P\big) \leqslant 3$.
    On en déduit : $\deg\big((X^2+1)\ P' - 2\,(X+1)\,P\big) \leqslant 3$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
  Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \ \leqslant \ \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{K}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

– Comme $P \in \mathbb{K}_2[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
  Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1$. On a alors $P = R + a_2 \cdot P_2$ et par linéarité de φ :

$$\varphi(R + a_2 \cdot P_2) \ = \ \varphi(R) + a_2 \cdot \varphi(P_2)$$

  En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg\big(\varphi(R)\big) \leqslant 2$.
  Il reste alors à déterminer $\deg\big(\varphi(P_2)\big)$. Or :

$$\begin{aligned}\Big(\varphi(P_2)\Big)(X) \ &= \ (X^2+1)\ P_2'(X) - 2\,(X+1)\,P_2(X) \\ &= \ 2X(X^2+1) - 2\,(X+1)\,X^2 \\ &= \ 2X^3 + 2X - 2X^3 - 2X^2 \ = \ 2X - 2X^2\end{aligned}$$

  Ainsi, $\deg\big(\varphi(P_2)\big) = 2$ et d'après ce qui précède : $\varphi(P) \in \mathbb{K}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{K}_2[X].}$$

□

2. Pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$, déterminer $\varphi(P_k)$.

Démonstration.

- $$\begin{aligned}\Big(\varphi(P_0)\Big)(X) \ &= \ (X^2+1)\ P_0'(X) - 2\,(X+1)\,P_0(X) \\ &= \ -2\,(X+1) \ = \ -2X-2 \qquad \textit{(car } P_0'(X) = 0\textit{)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \varphi(P_0) = -2 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2.}$$

- $$\begin{aligned}\Big(\varphi(P_1)\Big)(X) \ &= \ (X^2+1)\ P_1'(X) - 2\,(X+1)\,P_1(X) \\ &= \ (X^2+1) - 2\,(X+1)\,X \ = \ -X^2 + 1 - 2X \qquad \textit{(car } P_1'(X) = 1\textit{)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \varphi(P_1) = 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2.}$$

- $$\begin{aligned}\Big(\varphi(P_2)\Big)(X) \ &= \ (X^2+1)\ P_2'(X) - 2\,(X+1)\,P_2(X) \\ &= \ 2X\,(X^2+1) - 2\,(X+1)\,X^2 \ = \ 2X - 2X^2 \qquad \textit{(le calcul a déjà été effectué au-dessus)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \varphi(P_1) = 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 2 \cdot P_2.}$$

□

3. On note : $E_{-2}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id})$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}_2[X]$.
Déterminer une base de $E_{-2}(\varphi)$.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$.

- Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
- $$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id}) \quad & \Longleftrightarrow \quad (\varphi + 2\mathrm{id})(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\ & \Longleftrightarrow \quad (\varphi + 2\mathrm{id})(a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \end{aligned}$$

  Or, par linéarité de $\varphi + 2\,\mathrm{id}$:

  $$\begin{aligned} & (\varphi + 2\mathrm{id})(a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2) \\ = \ & a_0 \cdot (\varphi + 2\mathrm{id})(P_0) + a_1 \cdot (\varphi + 2\mathrm{id})(P_1) + a_2 \cdot (\varphi + 2\mathrm{id})(P_2) \\ = \ & a_0 \cdot \big(\varphi(P_0) + 2 \cdot P_0\big) + a_1 \cdot \big(\varphi(P_1) + 2 \cdot P_1\big) + a_2 \cdot \big(\varphi(P_2) + 2 \cdot P_2\big) && \textit{(par linéarité de l'évaluation en } P_0,\ P_1 \textit{ et } P_2\textit{)} \\ = \ & a_0 \cdot (\cancel{-2 \cdot P_0} - 2 \cdot P_1 + \cancel{2 \cdot P_0}) + a_1 \cdot (P_0 - \cancel{2 \cdot P_1} - P_2 + \cancel{2 \cdot P_1}) \\ & + \ a_2 \cdot (2 \cdot P_1 - \cancel{2 \cdot P_2} + \cancel{2 \cdot P_2}) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ = \ & -2\,a_0 \cdot P_1 + a_1 \cdot (P_0 - P_2) + 2\,a_2 \cdot P_1 \\ = \ & a_1 \cdot P_0 + (-2\,a_0 + 2\,a_2) \cdot P_1 - a_1 \cdot P_2 \end{aligned}$$

  En reprenant les équivalences :

  $$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id}) \quad & \Longleftrightarrow \quad a_1 \cdot P_0 + (-2\,a_0 + 2\,a_2) \cdot P_1 - a_1 \cdot P_2 = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & a_1 & & & = & 0 \\ -2\,a_0 & & & + & 2\,a_2 & = & 0 \\ & - & a_1 & & & = & 0 \end{array} \right. && \textit{(car la famille } (P_0, P_1, P_2) \textit{ est libre)} \\ & \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 & & & + & 2\,a_2 & = & 0 \\ & & a_1 & & & = & 0 \\ & - & a_1 & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 & & & + & 2\,a_2 & = & 0 \\ & & a_1 & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -2\,a_0 & = & -2\,a_2 \\ a_1 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- On en déduit :

  $$\begin{aligned} E_{-2}(\varphi) & = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid (\varphi + 2\mathrm{id})(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}\} \\ & = \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{K}_2[X] \mid a_0 = a_2 \ \text{ et } \ a_1 = 0\} \\ & = \{a_2 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_2 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\ & = \{a_2 \cdot (P_0 + P_2) \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\ & = \mathrm{Vect}\,(P_0 + P_2) \end{aligned}$$

  $$\boxed{E_{-2}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(P_0 + P_2)}$$

□

4. a) Déterminer le rang de l'application φ.

Démonstration.

- On sait que :
  - × l'application φ est linéaire,
  - × l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie.

  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\varphi) &= \mathrm{Vect}\left(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2)\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(-2 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1,\ P_0 - 2 \cdot P_1 - P_2,\ 2 \cdot P_1 - 2 \cdot P_2\right) \qquad \textit{(d'après 2.)} \\
&= \mathrm{Vect}\left(P_0 + P_1,\ P_0 - 2 \cdot P_1 - P_2,\ P_1 - P_2\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(P_0 + P_1,\ P_0 - 2 \cdot P_1 - \cancel{P_2} - (P_1 - \cancel{P_2}),\ P_1 - P_2\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(P_0 + P_1,\ P_0 - 3 \cdot P_1,\ P_1 - P_2\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(P_0 + P_1,\ P_0 - \cancel{3 \cdot P_1} + 3 \cdot (P_0 + \cancel{P_1}),\ P_1 - P_2\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(P_0 + P_1,\ 4 \cdot P_0,\ P_1 - P_2\right)
\end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{G} = (P_0 + P_1,\ 4 \cdot P_0,\ P_1 - P_2)$ est donc :
  - × génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$, d'après ce qui précède,
  - × libre, car c'est une famille constituée de polynômes non nuls, et échelonnée en degré.

  C'est donc une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(\varphi) = \dim\left(\mathrm{Im}(\varphi)\right) = \mathrm{Card}(\mathcal{G}) = 3}$$

□

b) L'application φ est-elle un automorphisme ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\dim\left(\mathrm{Im}(\varphi)\right) \ = \ 3 \ = \ \dim\left(\mathbb{K}_2[X]\right)$$

  Comme de plus : $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}_2[X]$, on en déduit : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est donc surjective.}}$$

- De plus, φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$, espace vectoriel de **dimension finie**.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est bijective. Cette application est bien un automorphisme.}}$$

□

Commentaire

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il est à noter que l'équivalence :

$$f \text{ injective } \ \Leftrightarrow \ f \text{ surjective } \ \Leftrightarrow \ f \text{ bijective}$$

n'est vérifiée que si E et F sont de **MÊME dimension finie**. En particulier, cette propriété est vérifiée pour tous les endomorphismes d'un espace vectoriel E **de dimension finie**.