DS1 /118

Exercice 1 /37

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. ($*$) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

- **2 pts : φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt :** $\varphi' : x \mapsto \mathbf{e}^x + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$
- **1 pt :** $\varphi'' : x \mapsto \mathbf{e}^x - \dfrac{1}{x^3}\ \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$
- **1 pt :** $\varphi''' : x \mapsto \mathbf{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\ \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$

2. ($*$) Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

- **1 pt : pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi'''(x) > 0$ donc φ'' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt :** $\varphi''(1) = 0$
- **1 pt :**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ'	$+\infty$	$\searrow$	$\mathbf{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt : φ' admet un minimum en 1 et $\varphi'(1) = \mathbf{e}$ donc pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant \mathbf{e}$**

3. ($*$) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^X}{X} = +\infty$ **par croissances comparées**
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3, +\infty[,\ \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\, x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

- **1 pt : On note $h : x \mapsto \varphi(x) - \mathrm{e}\, x$. La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$.**
- **1 pt :** $\forall x \in]0, +\infty[$**,** $h'(x) \geqslant 0$**.**
- **1 pt :** $\forall x \in [3, +\infty[$**,** $h(x) \geqslant h(3)$
- **1 pt :** $h(3) \ = \ \varphi(3) - 3\,\mathbf{e} \ > \ 15 - 3\,\mathbf{e} \ > \ 0$

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

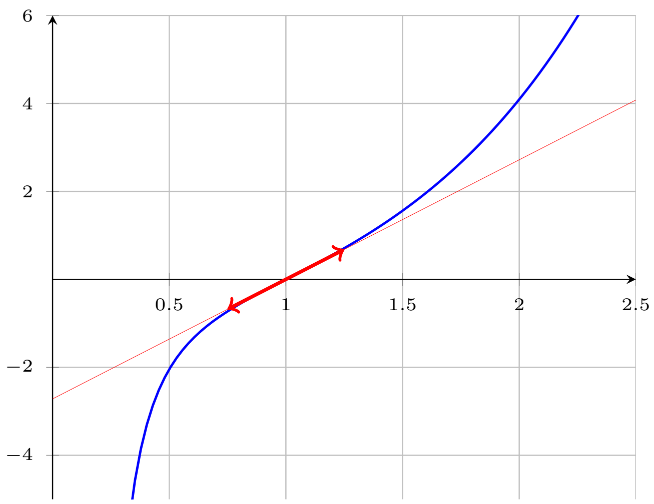
- **1 pt : La fonction φ'' est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$, la fonction φ change donc de convexité en 1, seul point d'inflexion de la courbe représentative de φ**
- **1 pt : La courbe représentative de φ admet pour point d'inflexion, le point de coordonnées** $(1, 0)$
- **1 pt : L'équation de la tangente à la courbe représentative de φ en 1 est :**
  $y \ = \ \varphi'(1)(x-1) + \varphi(1) \ = \ \mathbf{e}\,(x-1)$

7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

- **1 pt :**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$		$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- **4 pts : (1 pt tangente, 1 point concavité/convexité, 1 pt limites, 1 pt croissance)**



Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

8. $(*)$ Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

0 pt en cas de mauvaise rédaction de la récurrence

9. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

- **1 pt :** $u_n \in [3, +\infty[$ **donc on peut utiliser la question *5.***
- **1 pt :** $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geqslant \mathrm{e}u_n \geqslant u_n$
- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$ **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **par théorème de comparaison**

10. $(*)$ Écrire un programme **Python** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

```python
import numpy as np
n = 0
u = 3
while u < 10**3 :
    u = np.exp(u) - u * np.exp(1/u)
    n = n + 1
print(n)
```

- **1 pt : importation** `numpy`
- **1 pt : initialisation** `n` **et** `u`
- **1 pt :**

```python
while u < 10**3 :
```

- **1 pt : mise à jour** `u`
- **1 pt : mise à jour** `n`
- **1 pt :**

```python
print(n)
```

0 en cas d'erreur d'indentation

Exercice 2 /13

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. $(*)$ Tout nombre réel positif est inférieur ou égal à son carré.

- **1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant x^2$**
- **1 pt : Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+,\ x_0 > x_0^2$**
- **1 pt : En choisissant $x_0 = \dfrac{1}{2}$, on remarque : $x_0 > x_0^2$. Ainsi la négation de la proposition *1.* est vraie. La proposition *1.* est donc fausse.**

2. Tout réel positif de racine carrée supérieure ou égale à 2, est lui-même supérieur ou égal à 4.

- **1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ (\sqrt{x} \geqslant 2) \ \Rightarrow\ (x \geqslant 4)$**
- **1 pt : Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+,\ \ (\sqrt{x_0} \geqslant 2)$ `ET` $(x_0 < 4)$**
- **2 pts : démonstration de *2.***
  - × **1 pt : structure d'implication**
  - × **1 pt : par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$**

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 2$ admet une racine réelle.

- **1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\exists z_0 \in \mathbb{R},\ z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0$**
- **1 pt : Sa négation est : $\forall z \in \mathbb{R},\ z^2 - 3z + 2 \neq 0$**
- **1 pt : En choisissant $z_0 = 1$, on remarque que la proposition *3.* est vraie.**

4. La suite $(2n - \sqrt{5})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

- **1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\exists r \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ 2(n+1) - \sqrt{5} = 2n - \sqrt{5} + r$**
- **1 pt : Sa négation est : $\forall r \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{R},\ 2(n_0+1) - \sqrt{5} \neq 2n_0 - \sqrt{5} + r$**
- **1 pt : La suite $(2n - \sqrt{5})_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2**

Exercice 3 /14

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables. Toute réponse devra être justifiée.

1. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x^3 \leqslant 3)$ et $\big(|x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\big)$.

- **3 pts : en choisissant $x_0 = -3$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes**
  - × **1 pt : $(x_0^3 \leqslant 3)$ est vraie**
  - × **2 pts : $\big(|x_0| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\big)$ est fausse (dont 1 pt pour la stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$)**
- **1 pt : L'implication suivante est fausse : $(x^3 \leqslant 3) \ \Rightarrow\ \big(|x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\big)$.**
- **2 pts : $\big(|x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\big) \ \Rightarrow\ (x^3 \leqslant 3)$**
  - × **1 pt : structure de démonstration de l'implication**
  - × **1 pt : par croissance de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$**

2. Paramètre : $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

- **1 pt : les deux propositions sont équivalentes pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$**

3. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Propositions : $(x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0)$ et $(\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0)$

- **3 pts : les deux propositions sont équivalentes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$**
  - $\times$ **1 pt : structure de démonstration de la double implication**
  - $\times$ **1 pt : $(\Rightarrow)$**
  - $\times$ **1 pt : $(\Leftarrow)$**

4. Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Propositions : $(x^2 + y^2 > 1)$ et $\big(|x| > 1 \ \texttt{OU} \ |y| > 1\big)$.

- **1 pt : en choisissant $x_0 = y_0 = 1$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes**
- **1 pt : L'implication suivante est fausse : $(x^2 + y^2 > 1) \ \Rightarrow \ \big(|x| > 1 \ \texttt{OU} \ |y| > 1\big)$**
- **2 pts : $\big(|x| > 1 \ \texttt{OU} \ |y| > 1\big) \ \Rightarrow \ (x^2 + y^2 > 1)$**
  - $\times$ **1 pt : structure de démonstration de l'implication et disjonction de cas**
  - $\times$ **1 pt : reste de la démonstration**

Exercice 4 /7

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. $(*)$ Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
Propositions : $P(x, y) : (x^2 - y^2 = 0)$ et $Q(x, y) : (x = y)$.

- **1 pt : La proposition $Q(x, y)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(x, y)$.
  En effet, en choisissant $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$, ...**
- **1 pt : La proposition $Q(x, y)$ est une condition suffisante à $P(x, y)$.**

2. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Propositions : $P(a, b, c) : \big(|a + b + c| = 0\big)$ et $Q(a, b, c) : (a = b = c = 0)$.

- **1 pt : La proposition $Q(a, b, c)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(a, b, c)$.
  En effet, en choisissant $a_0 = b_0 = 1$ et $c_0 = -2$, ...**
- **1 pt : La proposition $Q(a, b, c)$ est une condition suffisante à $P(a, b, c)$.**

3. Paramètres : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a\big)$: (la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a) et $Q\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a\big)$: $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n)$.

- **1 pt : La proposition $Q\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a\big)$ est une condition nécessaire à $P\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a\big)$.**
- **2 pts : La proposition $Q\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a\big)$ n'est pas une condition suffisante à $P\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a\big)$.
  En effet, en choisissant $a = 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$, ...**

Exercice 5 /26

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $5^{3x+4} - 2^{2x-3} = 0$

2. $|x+1| + |2x+1| = 0$

3. $\sqrt{-x^2+x+3} \leqslant 2x+1$

4. $|3-2x| \geqslant \sqrt{-2x^2+x+1}$

1.
- **1 pt :** $\mathcal{D}_{(1)} = \mathbb{R}$
- **1 pt : écriture sous forme** exp / ln
- **1 pt : injectivité de** exp **sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt : l'ensemble des solutions de *(1)* est :** $\{-\dfrac{4\ln(5)+3\ln(2)}{3\ln(5)-2\ln(2)}\}$.

2.
- **1 pt :** $\mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}$
- **1 pt : obtention de la disjonction de cas** $x \leqslant -1$, $x \in \,]-1, -\frac{1}{2}]$, $x > -\frac{1}{2}$.
- **3 pts : l'ensemble des solutions de *(2)* est** $\varnothing$ **(1 pt par cas)**

3.
- **2 pts :** $\mathcal{D}_{(3)} == [x_1, x_2] = [-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}]$
- **2 pts : obtention de la disjonction de cas** $x \in [x_1, -\frac{1}{2}[$, $x \in [-\frac{1}{2}, x_2]$ **(démonstration de** $-\dfrac{1}{2} \in [x_1, x_2]$**)**
- **1 pt : L'inéquation *(3)* n'admet donc aucune solution sur** $[x_1, -\frac{1}{2}[$.
- **1 pt :** ***(3)*** $\Leftrightarrow 0 \leqslant 5x^2+3x-2$ ***(par stricte croissance de la fonction carré sur*** $\mathbb{R}_+$***)***
- **1 pt : les racines de** $5X^2+3X-2$ **sont** -1 **et** $\dfrac{2}{5}$
- **1 pt : Sur l'intervalle** $[-\frac{1}{2}, x_2]$**, l'ensemble des solutions de *(3)* est donc :** $\Big(]-\infty, -1] \cup [\dfrac{2}{5}, +\infty[\Big) \cap [-\dfrac{1}{2}, x_2]$
- **1 pt :** $\Big(]-\infty, -1] \cup [\dfrac{2}{5}, +\infty[\Big) \cap [-\dfrac{1}{2}, x_2] = [\dfrac{2}{5}, +\infty[\, \cap \, [-\dfrac{1}{2}, x_2]$
- **2 pts :** $[\dfrac{2}{5}, +\infty[\, \cap \, [-\dfrac{1}{2}, x_2] = [\dfrac{2}{5}, x_2]$ **(démonstration de** $\dfrac{2}{5} \in [-\dfrac{1}{2}, x_2]$**)**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de *(3)* est :** $[\frac{2}{5}, x_2] = [\frac{2}{5}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}]$.

4.
- **2 pts :** $\mathcal{D}_{(4)} = [-\frac{1}{2}, 1]$
  - × **1 pt : les racines de** $-2X^2+X+1$ **sont** 1 **et** $-\dfrac{1}{2}$
  - × **1 pt : signe du trinôme**
- **1 pt :** ***(4)*** $\Leftrightarrow 6x^2-13x+8 \geqslant 0$ ***(par stricte croissance de la fonction carré sur*** $\mathbb{R}_+^*$***)***
- **1 pt : le polynôme** $6X^2-13X+8$ **n'admet pas de racine et son coefficient dominant est strictement positif. On en déduit que l'assertion** $(6x^2-13x+8 \geqslant 0)$ **est toujours vraie.**
  Par raisonnement par équivalence, la première assertion l'est également.
- **1 pt : l'ensemble des solutions de *(4)* est :** $\mathcal{D}_{(4)} = [-\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 6 /10

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}$$

1. $(*)$ Rappeler l'expression de S_n en fonction de n et la démontrer.

- **1 pt :** $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- **3 pts : récurrence**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**

  0 pt en cas de mauvaise rédaction de la récurrence

2. En déduire une expression de T_n en fonction de n.

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} \right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \times \frac{(j-1)\left((j-\cancel{1})+\cancel{1}\right)}{2} \right)$ **(d'après la question précédente)**
- **1 pt :** $\displaystyle\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j-1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k$ **(avec le décalage d'indice $k = j-1$)**
- **1 pt :** $\displaystyle\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2} \times \frac{(n-1)\left((n-\cancel{1})+\cancel{1}\right)}{2}$ **(d'après la question précédente)**
- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $T_n = \dfrac{(n-1)\,n}{4}$

Exercice 7 /11

1. Montrer que la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- **1 pt**

2. Montrer que, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, $n!$ est un nombre pair.

- **1 pt : si $n \geqslant 2$, alors :** $n! = 1 \times 2 \times \displaystyle\prod_{i=3}^{n} i$.
- **1 pt :** $k = \displaystyle\prod_{i=3}^{n} i \in \mathbb{N}$

On admettra par la suite que pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, $n!$ est un multiple de 3.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $a \leqslant b$.

a) Exprimer le quotient $\dfrac{b!}{a!}$ comme produit explicite d'entiers naturels.

- **1 pt :** $\dfrac{b!}{a!} = \displaystyle\prod_{i=a+1}^{b} i$

b) Que peut-on en déduire sur le réel $\dfrac{b!}{a!}$?

- **1 pt : D'après la question précédente, $\dfrac{b!}{a!}$ est un produit d'entiers.**

  On en déduit que le réel $\dfrac{b!}{a!}$ est un entier.

4. Démontrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $b! = c! + 2$.

- **1 pt : structure de raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : cas $c \in \{0, 1\}$**
- **1 pt : cas $c = 2$**
- **3 pts : cas $c \geqslant 3$**
  × **1 pt : $b > c$ par stricte croissance de $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$**
  × **1 pt : comme $b \geqslant c \geqslant 3$, d''après la question *3.b)*, on en déduit que $\dfrac{b!}{3!}$ et $\dfrac{c!}{3!}$ sont des entiers.**
  × **1 pt : $\dfrac{1}{3} = \dfrac{b!}{6} - \dfrac{c!}{6}$ est un entier.**
  Absurde !