DS1

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle,
    - telle que : $h_1(]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

  On en déduit que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$.

- Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \mathrm{e}^x - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x\ \frac{1}{x^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) &= \mathrm{e}^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\
\varphi''(x) &= \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ \frac{1}{x^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} &= \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^3}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\
\varphi'''(x) &= \mathrm{e}^x + \frac{3}{x^4}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}\ \frac{1}{x^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^x + \left(\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} &= \mathrm{e}^x + \frac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{gathered}
\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) = \mathrm{e}^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\
\varphi''(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^3}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\
\varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}
\end{gathered}}$$

□

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

Démonstration.

- Soit $x \in]0,+\infty[$. Déterminons le signe de $\varphi'''(x)$.
  - × Tout d'abord : $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0$.
  - × Ensuite, comme $x > 0$: $\dfrac{3x+1}{x^5} > 0$

  On en déduit : $\varphi'''(x) > 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'''(x)$		$+$		$+$	
Variations de φ''	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  × tout d'abord : $\varphi''(1) \ = \ \mathrm{e}^1 - \dfrac{1}{1^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{1}} \ = \ \mathrm{e} - \mathrm{e} \ = \ 0$.
  × ensuite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \ = \ 0 \times 1 \ = \ 0$. De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x \ = \ +\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi''(x) = +\infty$.
  × enfin : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \ = \ +\infty$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^x \ = \ \mathrm{e}^0 \ = \ 1$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi''(x) = -\infty$.
- On déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ'	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  × tout d'abord : $\varphi'(1) \ = \ \mathrm{e}^1 - \cancel{\left(\dfrac{1}{1} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1}}} \ = \ \mathrm{e}$.
  × ensuite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -1$. De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi'(x) = +\infty$.
  × enfin : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi'(x) = +\infty$.
- La fonction φ' est :
  × strictement décroissante sur $]0,1]$,
  × strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
  Elle admet donc un unique minimum en 1 égal à e.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \,]0,+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \varphi'(1) = \mathrm{e}.}$$ □

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Démonstration.
- Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$.
- Ensuite, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$: $x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \ = \ \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$. Avec le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, on obtient :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \ = \ \lim_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} \ = \ +\infty \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty.}$$ □

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\frac{\varphi(x)}{x} \; = \; \frac{\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} \; = \; \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

  Or :

  × par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} \; = \; +\infty$.

  × $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \; = \; \mathrm{e}^0 \; = \; 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.}$$

- Pour tout $x \in]0, \infty[$: $\varphi(x) \; = \; x \, \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

$$\boxed{\text{D'après le calcul de limite précédent : } \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

□

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3, +\infty[, \; \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\, x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto \varphi(x) - \mathrm{e}\, x$.
  La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$h'(x) \; = \; \varphi'(x) - \mathrm{e} \; \geqslant \; 0 \quad \textit{(d'après 2.)}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		3		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$		$+$	
Variations de h	$-\infty$	↗	$h(3)$	↗	$+\infty$

- En particulier : $\forall x \in [3, +\infty[, \; h(x) \geqslant h(3)$. Or :

$$h(3) \; = \; \varphi(3) - 3\,\mathrm{e} \; > \; 15 - 3\,\mathrm{e} \; > \; 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } x \in [3, +\infty[\text{ : } h(x) \geqslant 0, \text{ c'est-à-dire } \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\, x.}$$

Commentaire

On pouvait également démontrer cette inégalité en utilisant la convexité de φ.

- D'après la question ***2.*** : $\forall x \in \,]1,+\infty[$, $\varphi''(x) > 0$.
  La fonction φ est donc convexe sur $]1,+\infty[$. Sa courbe représentative est donc située au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 3, droite d'équation :
  $$y \;=\; \varphi'(3)(x-3)+\varphi(3)$$
- Soit $x \in [3,+\infty[$.

Comme	$\varphi'(3) \geqslant \mathrm{e}$	*(d'après la question **2.**)*
alors	$\varphi'(3)(x-3) \geqslant \mathrm{e}\,(x-3)$	*(car $x-3 \geqslant 0$)*
d'où	$\varphi'(3)(x-3)+\varphi(3) \geqslant \mathrm{e}\,(x-3)+15$	*(car $\varphi(3) > 15$ d'après l'énoncé)*

- De plus, comme $\mathrm{e} < 3$:
  $$\mathrm{e}\,(x-3)+15 \;=\; \mathrm{e}\,x - 3\,\mathrm{e}+15 \;\geqslant\; \mathrm{e}\,x$$

Finalement : $\forall x \in [3,+\infty[$, $\varphi(x) \;\geqslant\; \varphi'(3)(x-3)+\varphi(3) \;\geqslant\; \mathrm{e}\,x$. $\square$

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

Démonstration.

- La fonction φ'' est négative sur $]0,1]$ et positive sur $[1,+\infty[$.

  La fonction φ change donc de convexité en 1,
  seul point d'inflexion de la courbe représentative de φ.

- Les coordonnées de ce point d'inflexion sont $\big(1,\varphi(1)\big)$. Or :
  $$\varphi(1) \;=\; \mathrm{e}^1 - 1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{1}} \;=\; \mathrm{e}-\mathrm{e} \;=\; 0$$

La courbe représentative de φ admet pour point d'inflexion, le point de coordonnées $(1,0)$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de φ en 1 est :
$y \;=\; \varphi'(1)(x-1)+\varphi(1) \;=\; \mathrm{e}\,(x-1)$. $\square$

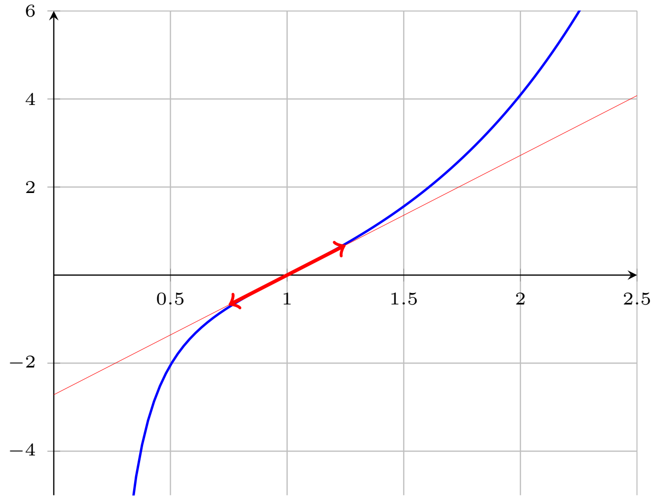
7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Démonstration.

- D'après la question ***2.*** : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant \mathrm{e} > 0$.
  On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$		$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- L'obtention des différents éléments de ce tableau a été détaillée en questions *3* et *4*.
- On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la représentation graphique suivante.



Commentaire

- Un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ est un point en lequel $\mathcal{C}$ change de convexité. Si la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I d'étude, une condition suffisante d'existence de point d'inflexion est que la fonction φ'' s'annule **en changeant de signe** en l'abscisse de ce point.
- L'énoncé demande de représenter la tangente au point d'inflexion. Il est important que le dessin de la courbe mette en évidence :
  × la notion de tangente : la courbe de $\mathcal{C}$ et la tangente doivent apparaître comme confondues à proximité du point $(1, 0)$.
  × la notion de point d'inflexion : sur $]0, 1[$ la fonction est concave et sur $]1, +\infty[$ la fonction est convexe. Cela doit apparaître clairement sur la représentation graphique. En particulier, la tangente obtenue « traverse » la courbe $\mathcal{C}$.

□

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ existe} \\ u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n \end{array}\right.$

▸ **Initialisation** :
D'après l'énoncé : $u_0 = 3$. Or : $3\,\mathrm{e}^0 = 3$. D'où : $u_0 \geqslant 3\,\mathrm{e}^0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ existe} \\ u_{n+1} \geqslant 3\,\mathrm{e}^{n+1} \end{array}\right.$).

- Par hypothèse de récurrence, u_n existe et : $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$. En particulier : $u_n > 0$.
Donc $\varphi(u_n)$ est bien défini. On en déduit que u_{n+1} existe.

- Par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n \geqslant 3$. Donc : $u_n \in [3, +\infty[$.
  Alors, d'après la question ***5.*** :

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(u_n) & \geqslant & \mathrm{e}\, u_n & & \\ \| & & \vee\!\!\!\! \vee & & \\ u_{n+1} & & \mathrm{e} \times 3\,\mathrm{e}^n & = & 3\,\mathrm{e}^{n+1} \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n.}$$

□

9. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  D'après la question précédente : $u_n \in [3, +\infty[$.
  Ainsi, d'après la question ***5.*** :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(u_n) & \geqslant & \mathrm{e}\, u_n \\ \| & & \vee \\ u_{n+1} & & u_n \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

- Toujours d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$$

  Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\,\mathrm{e}^n = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème de comparaison : } \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

□

10. Écrire un programme **Python** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

Démonstration.

```python
import numpy as np
n = 0
u = 3
while u < 10**3 :
    u = np.exp(u) - u * np.exp(1/u)
    n = n + 1
print(n)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  On commence par importer la libraire `numpy` qui contient notamment la fonction exp utile ultérieurement.
  La variable `n` est initialisée à 0.
  La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n), est initialisée à $u_0 = 3$.

```
1 import numpy as np
2 n = 0
3 u = 3
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 6 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$. On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $u_n \geqslant 10^3$. Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $u_n < 10^3$. Pour cela on met en place une structure itérative (while) :

```
4 while u < 10**3 :
```

  Tant que $u_n < 10^3$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable `u` :

```
5     u = np.exp(u) - u * np.exp(1/u)
```

  On met alors à jour en conséquence la variable `n` : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1}.

```
6     n = n + 1
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.
  On affiche alors enfin la valeur de la variable `n`

```
7 print(n)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question. □

Exercice 2

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. Tout nombre réel positif est inférieur ou égal à son carré.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Cette proposition s'écrit de la façon suivante : } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant x^2}$$

$$\boxed{\text{Sa négation est : } \exists x_0 \in \mathbb{R}_+,\ x_0 > x_0^2.}$$

Étudions la véracité de la proposition ***1.***
En choisissant $x_0 = \frac{1}{2}$, on remarque : $x_0 > x_0^2$.

Ainsi la négation de la proposition ***1.*** est vraie.

$$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{1.}} \text{ est donc fausse.}}$$

Commentaire

- On démontre ici que la négation de la proposition ***1.*** est vraie. Cette négation est une proposition quantifiée existentiellement. Il faut donc exhiber un objet vérifiant cette proposition pour conclure quant à sa véracité.
- Notons que tout réel $x_0 \in \,]0, 1[$ constitue un contre-exemple valide.
  Cependant écrire :

  ~~On sait : $\forall x \in \,]0, 1[,\ x > x^2$. Ainsi la proposition ***1.*** est fausse.~~

  est une erreur de logique grave. La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x > x^2)$ n'a en effet pas de lien logique avec la proposition ***1.*** $(\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant x^2)$. En particulier, ces deux propositions ne sont pas la négation l'une de l'autre. Il s'agit ici d'une confusion entre les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- Si l'on ne repère pas immédiatement un contre-exemple à la proposition ***1.***, on peut tout de même conclure en cherchant à se ramener à une proposition équivalente pour laquelle l'étude de la véracité est plus simple. Cela donnerait la rédaction suivante.

  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Deux cas se présentent :

  × si $x > 0$, alors :
  $$x \leqslant x^2 \;\Leftrightarrow 1 \leqslant x$$
  × si $x = 0$, alors l'inégalité est vérifiée (on a bien : $0 \leqslant 0^2$).

  La proposition ***1.*** est donc équivalente à :
  $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (x = 0) \;\; \texttt{OU} \;\; (1 \leqslant x)$$
  Cette proposition est fausse. En effet, en choisissant $x_0 = \frac{1}{2}$, on remarque :
  $$x_0 \in \mathbb{R}_+ \;\; \texttt{ET} \;\; \big((x_0 \neq 0) \;\; \texttt{ET} \;\; (1 > x_0)\big)$$
  Deux propositions équivalentes ayant même valeur de vérité, la proposition ***1.*** est fausse. □

2. Tout réel positif de racine carrée supérieure ou égale à 2, est lui-même supérieur ou égal à 4.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Cette proposition s'écrit de la façon suivante : } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left(\sqrt{x} \geqslant 2\right) \ \Rightarrow\ \left(x \geqslant 4\right)}$$

$$\boxed{\text{Sa négation est : } \exists x_0 \in \mathbb{R}_+,\ \left(\sqrt{x_0} \geqslant 2\right)\ \texttt{ET}\ \left(x_0 < 4\right).}$$

Étudions la véracité de la proposition ***2.***
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Supposons : $\sqrt{x} \geqslant 2$.

$$\begin{array}{llcll} \text{Alors} & \left(\sqrt{x}\right)^2 & \geqslant & 2^2 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{Ainsi} & x & \geqslant & 4 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{2.}} \text{ est donc vraie.}}$$

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Il s'agit essentiellement de mettre en place les structures de démonstration. En l'occurence, il faut ici savoir démontrer :
  - × une propriété quantifiée universellement : $\forall x \in E$, $p(x)$
    `Soit` $x \in E$ `...`
  - × une implication : $p \Rightarrow q$
    `Supposons` p `et démontrons` q.
- Précisons la manière d'agir.

```
1  Soit x ∈ ℝ+.
2  Supposons √x ⩾ 2. Alors :
3          ...
4  Ainsi : x ⩾ 4.
```

  - × Les lignes 1 et 4 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration.
  - × Il s'agit de démontrer une propriété quantifée universellement en x. On commence donc en ligne 1 la démonstration par : « Soit $x \dots$ ».
  - × La ligne 2 correspond à la structure de démonstration d'une implication.
    On souhaite démontrer : $\left(\sqrt{x} \geqslant 2\right) \ \Rightarrow\ \left(x \geqslant 4\right)$. On commence donc par supposer $\left(\sqrt{x} \geqslant 2\right)$, puis on démontre, par implication, $\left(x \geqslant 4\right)$.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler.
- Le message est clair : sur les 4 lignes de rédaction, 3 proviennent de la présentation et seule 1 correspond à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

□

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 2$ admet une racine réelle.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\exists z_0 \in \mathbb{R},\ z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0$.

Sa négation est : $\forall z \in \mathbb{R},\ z^2 - 3z + 2 \neq 0$.

Étudions la véracité de la proposition ***3.*** En choisissant $z_0 = 1$, on remarque :

$$z_0^2 - 3z_0 + 2 \ = \ 1^2 - 3 + 2 \ = \ 1 - 1 \ = \ 0$$

La proposition ***3.*** est donc vraie.

Commentaire

- La proposition ***3.*** est une proposition quantifiée existentiellement. Il faut donc exhiber un objet vérifiant cette proposition pour conclure quant à sa véracité.
- Notons que le réel 2 pouvait également constituer un exemple valide.
- Si l'on ne repère pas immédiatement une racine réelle du trinôme $z^2 - 3z + 2$ (ce qui serait un tort puisqu'on rappelle qu'il est toujours pertinent de tester si les réels suivants sont racines évidentes : 0, 1, -1, 2, -2), on peut conclure quant à l'existence de racines réelles grâce au discriminant.
  Notons Δ le discriminant de ce trinôme. Alors :

  $$\Delta \ = \ (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 \ = \ 9 - 8 \ = \ 1$$

  Comme $\Delta > 0$, le trinôme étudié admet deux racines réelles que l'on note z_1 et z_2.
  Ainsi, z_1 (ou z_2) vérifie la proposition ***3.***. Cette dernière est donc vraie. □

4. La suite $(2n - \sqrt{5})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante :
$\exists r \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ 2(n+1) - \sqrt{5} = 2n - \sqrt{5} + r$.

Sa négation est : $\forall r \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{R},\ 2(n_0 + 1) - \sqrt{5} \neq 2n_0 - \sqrt{5} + r$.

Étudions la véracité de la proposition ***4.***
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$2(n+1) - \sqrt{5} \ = \ 2n + 2 - \sqrt{5} \ = \ 2n - \sqrt{5} + 2$$

Ainsi, en choisissant $r = 2$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2(n+1) - \sqrt{5} = 2n - \sqrt{5} + r$$

La proposition ***4.*** est donc vraie. □

Exercice 3

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables. Toute réponse devra être justifiée.

1. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x^3 \leqslant 3)$ et $\left(|x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\right)$.

Démonstration.

- En choisissant $x_0 = -3$, on remarque que :
  - × la proposition $(x_0^3 \leqslant 3)$ est vraie. En effet : $(-3)^3 \leqslant 0 \leqslant 3$.
  - × la proposition $\left(|x_0| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\right)$ est fausse. En effet : $|-3| = 3 = 3^1$. De plus :

$$\begin{array}{rccll}
 & 1 & > & \dfrac{1}{3} & \\
\text{donc} & \ln(3) & > & \dfrac{1}{3}\ \ln(3) & \textit{(car } \ln(3) > 0\textit{)} \\
\text{d'où} & \mathrm{e}^{\ln(3)} & > & \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ \ln(3)} & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\text{ainsi} & 3 & > & 3^{\frac{1}{3}} & \\
\text{enfin} & |-3| & > & 3^{\frac{1}{3}} &
\end{array}$$

Comme les deux propositions n'ont pas la même valeur de vérité pour chaque valeur de x, elles ne sont pas équivalentes.

Commentaire

- Comme toujours, il est possible de trouver un contre-exemple même sans la moindre inspiration. Pour cela, on peut commencer par chercher à démontrer l'équivalence entre les deux propositions.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x > 0$, alors :

$$\begin{array}{rccll}
 & x^3 & \leqslant & 3 & \\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{3\ \ln(x)} & \leqslant & 3 & \\
\Leftrightarrow & 3\ \ln(x) & \leqslant & \ln(3) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \ln(x) & \leqslant & \dfrac{1}{3}\ \ln(3) & \\
\Leftrightarrow & x & \leqslant & 3^{\frac{1}{3}} & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & |x| & \leqslant & 3^{\frac{1}{3}} & \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

Les deux propositions sont donc bien équivalentes lorsque x est strictement positif.

Commentaire

× si $x \leqslant 0$, alors :

- la proposition $(x^3 \leqslant 3)$ est toujours vraie. En effet :

$$\begin{array}{rrcll} \text{comme} & x & \leqslant & 0 & \\ \text{alors} & x^3 & \leqslant & 0^3 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^3 \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{donc} & x^3 & \leqslant & 0 \leqslant 3 & \end{array}$$

- cependant pour la proposition $\left(|x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\right)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} |x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}} & \Leftrightarrow & -3^{\frac{1}{3}} \leqslant x \leqslant 3^{\frac{1}{3}} \\ & \Leftrightarrow & -3^{\frac{1}{3}} \leqslant x \leqslant 0 \quad \textit{(car } x \leqslant 0\textit{)} \end{array}$$

En particulier, lorsque $x < -3^{\frac{1}{3}}$:

× la $1^{\text{ère}}$ proposition est vraie,

× la 2^{nde} est fausse.

Tout réel x strictement inférieur à $-3^{\frac{1}{3}}$ constituera donc un contre-exemple à l'équivalence de ces deux propositions pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × L'implication suivante est fausse : $(x^3 \leqslant 3) \ \Rightarrow\ \left(|x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\right)$.
  En effet, en reprenant le point précédent, pour $x_0 = -3$:
  ▶ $(x_0^3 \leqslant 3)$ est vraie
  ▶ $\left(|x_0| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\right)$ est fausse.
  Or l'assertion ($\texttt{VRAI} \Rightarrow \texttt{FAUX}$) est fausse.
  × Démontrons : $\left(|x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\right) \ \Rightarrow\ (x^3 \leqslant 3)$.
  Supposons : $|x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}$. Alors :

$$\begin{array}{rcccccl} & -3^{\frac{1}{3}} & \leqslant & x & \leqslant & 3^{\frac{1}{3}} & \\ \text{donc} & \left(-3^{\frac{1}{3}}\right)^3 & \leqslant & x^3 & \leqslant & \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^3 \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{d'où} & -3 & \leqslant & x^3 & \leqslant & 3 & \end{array}$$

  En particulier, on a bien : $x^3 \leqslant 3$.

□

2. Paramètre : $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} x < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x \times x \quad < \quad x \times 1 \quad \textit{(car } x > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \quad < \quad x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les deux propositions sont donc équivalentes pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.}$$

□

3. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Propositions : $(x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0)$ et $(\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0)$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons : $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$.
Le réel $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ est donc une somme nulle de termes positifs. On en déduit que chacun des termes est nul, c'est-à-dire : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i^2 = 0$.
On en déduit : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0$. *(car 0 est le seul réel de carré égal à 0)*

($\Leftarrow$) Supposons : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0$. Alors :

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \ = \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ = \ \sum_{i=1}^{n} 0^2 \ = \ \sum_{i=1}^{n} 0 \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Les deux propositions sont donc équivalentes pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.}$$

□

4. Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Propositions : $(x^2 + y^2 > 1)$ et $\big(|x| > 1 \ \texttt{OU} \ |y| > 1\big)$.

Démonstration.

- En choisissant $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$, on remarque que :
  - × la proposition $(x^2 + y^2 > 1)$ est vraie. En effet :

    $$x_0^2 + y_0^2 \ = \ 1^2 + 1^2 \ = \ 1 + 1 \ = \ 2 \ > \ 1$$

  - × la proposition $\big(|x| > 1 \ \texttt{OU} \ |y| > 1\big)$ est fausse. En effet : $|x_0| = |1| = 1 \not> 1$. De même pour y_0.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme les deux propositions n'ont pas la même valeur de vérité} \\ \text{pour chaque valeur de } (x, y) \text{, elles ne sont pas équivalentes.}\end{array}}$$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  - × L'implication suivante est fausse : $(x^2 + y^2 > 1) \ \Rightarrow \ \big(|x| > 1 \ \texttt{OU} \ |y| > 1\big)$.
    En effet, en reprenant le point précédent, pour $x_0 = y_0 = 1$:
    - ▸ $(x_0^2 + y_0^2 > 1)$ est vraie
    - ▸ $\big(|x_0| > 1 \ \texttt{OU} \ |y_0| > 1\big)$ est fausse.

    Or l'assertion $(\texttt{VRAI} \ \Rightarrow \ \texttt{FAUX})$ est fausse.

× Démontrons : $\big(|x| > 1 \ \texttt{OU} \ |y| > 1\big) \Rightarrow (x^2 + y^2 > 1)$.
Supposons : $|x| > 1 \ \texttt{OU} \ |y| > 1$. Deux cas se présentent :

- si $|x| > 1$, alors, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $x^2 > 1$.
  Or, on a toujours : $y^2 \geqslant 0$. Ainsi :
  $$x^2 + y^2 \geqslant x^2 > 1$$
- si $|y| > 1$, alors, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $y^2 > 1$.
  Or, on a toujours : $x^2 \geqslant 0$. Ainsi :
  $$x^2 + y^2 \geqslant y^2 > 1$$

Dans les deux cas, on obtient bien : $x^2 + y^2 > 1$.

□

Exercice 4

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
Propositions : $P(x, y) : (x^2 - y^2 = 0)$ et $Q(x, y) : (x = y)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

($\Rightarrow$) L'implication $\big(P(x, y) \ \Rightarrow \ Q(x, y)\big)$ est fausse.
En effet, en choisissant $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$, on obtient :

× d'une part :

$$x_0^2 - y_0^2 \ = \ 1^2 - (-1)^2 \ = \ 1 - 1 \ = \ 0$$

× d'autre part : $x_0 \neq y_0$.

Ainsi le couple (x_0, y_0) vérifie : $P(x_0, y_0)$ `ET` `NON`$(Q(x_0, y_0))$.

$$\boxed{\text{La proposition } Q(x, y) \text{ n'est donc pas une condition nécessaire à } P(x, y).}$$

($\Leftarrow$) Supposons $Q(x, y) : x = y$. Alors :

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 & = & y^2 \\ \text{donc} & x^2 - y^2 & = & 0 \end{array}$$

D'où : $P(x, y)$.

$$\boxed{\text{La proposition } Q(x, y) \text{ est donc une condition suffisante à } P(x, y).}$$

□

2. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Propositions : $P(a, b, c) : \big(|a + b + c| = 0\big)$ et $Q(a, b, c) : (a = b = c = 0)$.

Démonstration.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

($\Rightarrow$) L'implication $\big(P(a, b, c) \ \Rightarrow \ Q(a, b, c)\big)$ est fausse.
En effet, en choisissant $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et $c_0 = -2$, on obtient :

× d'une part :

$$|a_0 + b_0 + c_0| \ = \ |1 + 1 - 2| \ = \ |0| \ = \ 0$$

× d'autre part : $a_0 \neq 0$.

Ainsi le triplet (a_0, b_0, c_0) vérifie : $P(a_0, b_0, c_0)$ `ET` `NON`$(Q(a_0, b_0, c_0))$.

$$\boxed{\text{La proposition } Q(a, b, c) \text{ n'est donc pas une condition nécessaire à } P(a, b, c).}$$

($\Leftarrow$) Supposons $Q(a, b, c) : (a = b = c = 0)$. Alors :

$$|a + b + c| \ = \ |0 + 0 + 0| \ = \ |0| \ = \ 0$$

D'où : $P(a, b, c)$.

$$\boxed{\text{La proposition } Q(a, b, c) \text{ est donc une condition suffisante à } P(a, b, c).}$$

□

3. Paramètres : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big)$: (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a) et $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big)$: $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n)$.

Démonstration.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Supposons $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \cancel{u_{n+1}} + a - \cancel{u_{n+1}} && \textit{(car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a)} \\ &= a \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \cancel{u_n} + a - \cancel{u_n} && \textit{(car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a)} \\ &= a \end{aligned}$$

Ainsi : $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.
D'où : $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big)$.

$$\boxed{\text{La proposition } Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big) \text{ est donc une condition nécessaire à } P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big).}$$

($\Leftarrow$) L'implication $\Big(Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big) \ \Rightarrow\ P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big)\Big)$ est fausse.
En effet, en choisissant $a = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$, on obtient :

× d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} - u_{n+1} \ = \ (\cancel{n} + 2) - (\cancel{n} + 1) \ = \ 1$$

De plus :

$$u_{n+1} - u_n \ = \ (\cancel{n} + 1) - \cancel{n} \ = \ 1$$

Ainsi : $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

× d'autre part, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique de raison $a = 0$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} \ = \ n + 1 \ = \ u_n + 1 \ \neq \ u_n + 0$$

Ainsi, le couple $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big)$ vérifie : $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big)$ `ET` `NON`$\Big(P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big)\Big)$.

$$\boxed{\text{La proposition } Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big) \text{ n'est donc pas une condition suffisante à } P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big).}$$

Commentaire

- Si les deux propositions de l'énoncé ne sont pas équivalentes, les deux suivantes le sont pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
  × $p\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
  × $q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

Commentaire

- En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(⇒) Supposons $p\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
Alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \cancel{u_{n+1}} + r - \cancel{u_{n+1}} && \textit{(car } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est arithmétique de raison } r\textit{)} \\ &= r \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \cancel{u_n} + r - \cancel{u_n} && \textit{(car } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est arithmétique de raison } r\textit{)} \\ &= r \end{aligned}$$

Ainsi : $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.
D'où $q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

(⇐) Supposons $q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.
On pose alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$$

On remarque alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} \ = \ u_{(n+1)+1} - u_{n+1} \ = \ u_{n+2} - u_{n+1} \ = \ u_{n+1} - u_n \ = \ v_n$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante.
On en déduit qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = r$.
Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique (de raison r).
D'où $p\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. □

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $5^{3x+4} - 2^{2x-3} = 0$

2. $|x+1| + |2x+1| = 0$

3. $\sqrt{-x^2+x+3} \leqslant 2x+1$

4. $|3-2x| \geqslant \sqrt{-2x^2+x+1}$

Démonstration.

1. Résolvons l'équation *(1)*.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(1)}$.
  Il n'y a aucun problème de définition dans cette équation.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(1)} = \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} 5^{3x+4} - 2^{2x-3} = 0 & \Leftrightarrow & 5^{3x+4} = 2^{2x-3} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^{(3x+4)\ \ln(5)} = \mathrm{e}^{(2x-3)\ \ln(2)} \\ & \Leftrightarrow & (3x+4)\ \ln(5) = (2x-3)\ \ln(2) \quad \textit{(par injectivité de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 3x\ln(5) + 4\ln(5) = 2x\ln(2) - 3\ln(2) \\ & \Leftrightarrow & 3x\ln(5) - 2x\ln(2) = -4\ln(5) - 3\ln(2) \\ & \Leftrightarrow & \big(3\ln(5) - 2\ln(2)\big)\ x = -4\ln(5) - 3\ln(2) \\ & \Leftrightarrow & x = \dfrac{-4\ln(5) - 3\ln(2)}{3\ln(5) - 2\ln(2)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } \textit{(1)} \text{ est donc : } \{-\frac{4\ln(5)+3\ln(2)}{3\ln(5)-2\ln(2)}\}.}$$

2. Résolvons l'équation *(2)*.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(2)}$.
  Il n'y a aucun problème de définition dans cette équation.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  On résout l'équation *(2)* par disjonction de cas selon le signe des termes $(x+1)$ et $(2x+1)$.
  × d'une part : $x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$.
  × d'autre part :

$$2x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$$

On obtient le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	

Trois cas se présentent alors.

× Si $x \leqslant -1$, alors :

$$\begin{aligned} |x+1|+|2x+1| = 0 &\Leftrightarrow -(x+1)-(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x-1-2x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x-2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 = 3x \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{3} = x \end{aligned}$$

Cependant $-\frac{2}{3} \notin]-\infty,-1]$. L'équation *(2)* n'admet donc pas de solution sur $]-\infty,-1]$.

× Si $x \in]-1,-\frac{1}{2}]$, alors :

$$\begin{aligned} |x+1|+|2x+1| = 0 &\Leftrightarrow (x+1)-(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+\cancel{1}-2x-\cancel{1} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Cependant $0 \notin]-1,-\frac{1}{2}]$. L'équation *(2)* n'admet donc pas de solution sur $]-1,-\frac{1}{2}]$.

× si $x > -\dfrac{1}{2}$, alors :

$$\begin{aligned} |x+1|+|2x+1| = 0 &\Leftrightarrow (x+1)+(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1+2x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Cependant $-\frac{2}{3} \notin]-\frac{1}{2},+\infty[$. L'équation *(2)* n'admet donc pas de solution sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$.

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des solutions de (2) est : } \varnothing.}$$

3. Résolvons l'inéquation *(3)*.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(3)}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{L'inéquation (3) est bien définie} \Leftrightarrow -x^2+x+3 \geqslant 0$$

On note Δ le discriminant du trinôme $-X^2+X+3$. Alors :

$$\Delta = 1^2-4\times(-1)\times 3 = 1+12 = 13$$

Le trinôme $-X^2+X+3$ admet donc deux racines réelles notées x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} = -\frac{1+\sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

On obtient alors le signe du trinôme $-x^2 + x + 3$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $-x^2 + x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(3)} = [x_1, x_2] = [-\tfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \tfrac{-1+\sqrt{13}}{2}].}$$

- Soit $x \in [-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}] = [x_1, x_2]$.
  On procède par disjonction de cas selon le signe de $(2x+1)$ (car, comme une racine est toujours positive, on a toujours : $\sqrt{-x^2+x+3} \geqslant 0$).
  On remarque :
  $$2x + 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ 2x \geqslant -1 \ \Leftrightarrow\ x \geqslant -\frac{1}{2}$$
  Cherchons si : $-\dfrac{1}{2} \in [x_1, x_2]$.
  $$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \in [x_1, x_2] \ &\Leftrightarrow\ -\frac{1+\sqrt{13}}{2} \ \leqslant\ -\frac{1}{2} \ \leqslant\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ &\Leftrightarrow\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} \ \geqslant\ \frac{1}{2} \ \geqslant\ -\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ &\Leftrightarrow\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} \ \geqslant\ \frac{1}{2} \ \geqslant\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ &\Leftrightarrow\ 1+\sqrt{13} \ \geqslant\ 1 \ \geqslant\ 1-\sqrt{13} \\ &\Leftrightarrow\ \sqrt{13} \ \geqslant\ 0 \ \geqslant\ -\sqrt{13} \end{aligned}$$
  La dernière assertion est vraie. Par raisonnement par équivalence, la première aussi.
  $$\boxed{\text{On en déduit : } -\frac{1}{2} \in [x_1, x_2].}$$
  Deux cas se présentent alors.
  × si $x \in [x_1, -\frac{1}{2}[$, alors : $2x + 1 < 0$.
  Or on a toujours : $\sqrt{-x^2+x+3} \geqslant 0$. Ainsi :
  $$\sqrt{-x^2+x+3} \ \geqslant\ 0 \ >\ 2x+1$$
  L'inéquation *(3)* n'admet donc aucune solution sur $[x_1, -\frac{1}{2}[$.
  × si $x \in [-\frac{1}{2}, x_2]$, alors :
  $$\begin{aligned} \sqrt{-x^2+x+3} \leqslant 2x+1 \ &\Leftrightarrow\ \left(\sqrt{-x^2+x+3}\right)^2 \leqslant (2x+1)^2 \quad \textit{(par stricte croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\ -x^2+x+3 \leqslant 4x^2+4x+1 \\ &\Leftrightarrow\ 0 \leqslant 5x^2+3x-2 \end{aligned}$$
  On remarque que -1 est racine évidente du polynôme $5X^2 + 3X - 2$. On en déduit la factorisation :
  $$5X^2+3X-2 \ =\ 5\left(X-(-1)\right)\left(X-\frac{2}{5}\right) \ =\ 5\left(X+1\right)\left(X-\frac{2}{5}\right)$$

On obtient le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
Signe de $5x^2 + 3x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, x_2]$, l'ensemble des solutions de *(3)* est donc :

$$\begin{aligned}
& \Big(]-\infty,-1] \cup [\frac{2}{5},+\infty[\Big) \cap [-\frac{1}{2},x_2] \\
= \quad & \Big(]-\infty,-1] \cap [-\frac{1}{2},x_2]\Big) \cup \Big([\frac{2}{5},+\infty[\cap [-\frac{1}{2},x_2]\Big) \quad \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ sur } \cup\textit{)} \\
= \quad & \varnothing \cup \Big([\frac{2}{5},+\infty[\cap [-\frac{1}{2},x_2]\Big) \\
= \quad & [\frac{2}{5},+\infty[\cap [-\frac{1}{2},x_2]
\end{aligned}$$

Pour expliciter cette intersection, il reste à déterminer si $\dfrac{2}{5} \in [-\dfrac{1}{2}, x_2]$.
On a bien : $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{2}{5}$. Démontrons alors : $\dfrac{2}{5} \leqslant x_2$.

$$\begin{array}{rclcrcl}
\dfrac{2}{5} & \leqslant & x_2 & \Leftrightarrow & \dfrac{2}{5} & \leqslant & \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \\
 & & & \Leftrightarrow & 4 & \leqslant & 5\,(-1+\sqrt{13}) \\
 & & & \Leftrightarrow & 4 & \leqslant & -5+5\sqrt{13} \\
 & & & \Leftrightarrow & 9 & \leqslant & 5\sqrt{13} \\
 & & & \Leftrightarrow & \dfrac{9}{5} & \leqslant & \sqrt{13} \\
 & & & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{9}{5}\right)^2 & \leqslant & \left(\sqrt{13}\right)^2 \quad \textit{(par stricte croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
 & & & \Leftrightarrow & \dfrac{81}{25} & \leqslant & 13 \\
 & & & \Leftrightarrow & 81 & \leqslant & 25 \times 13
\end{array}$$

Cette dernière assertion est vraie (en effet : $25 \times 13 \geqslant 25 \times 10 = 250 \geqslant 81$). Par raisonnement par équivalence, la première aussi. On en déduit :

$$[\frac{2}{5},+\infty[\cap [-\frac{1}{2},x_2] \; = \; [\frac{2}{5},x_2]$$

$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des solutions de } \textit{(3)} \text{ est : } [\frac{2}{5},x_2] = [\frac{2}{5},\frac{-1+\sqrt{13}}{2}].}$

Commentaire

On rappelle : $u \leqslant v \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad u^2 \leqslant v^2$.
En toute généralité, comme $\sqrt{u^2} = |u|$ (pour tout $u \in \mathbb{R}$), on a :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad (|u| \leqslant |v| \ \Leftrightarrow \ u^2 \leqslant v^2)}$$

C'est pourquoi on procède par disjonction de cas pour résoudre cette inéquation, en fonction du signe des quantités que l'on considère (ici $\sqrt{-x^2+x+3}$ et $(2x+1)$).

4. Résolvons l'inéquation *(4)*.
- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(4)}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$\text{L'inéquation } (4) \text{ est bien définie } \Leftrightarrow \ -2x^2 + x + 1 \geqslant 0$$
  Le réel 1 est racine évidente du polynôme $-2X^2 + X + 1$. On en déduit la factorisation suivante :
  $$-2X^2 + X + 1 \ = \ -2\left(X^2 - \frac{1}{2}\,X - \frac{1}{2}\right) \ = \ -2\,(X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$$
  On obtient alors le signe du trinôme $-2x^2 + x + 1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $-2x^2 + x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(4)} = [-\tfrac{1}{2}, 1].}$$

- Soit $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

$$\begin{aligned} |3-2x| \ \geqslant \ \sqrt{-2x^2+x+1} \ &\Leftrightarrow \ (|3-2x|)^2 \ \geqslant \ \left(\sqrt{-2x^2+x+1}\right)^2 \quad \textit{(par stricte croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \ (3-2x)^2 \ \geqslant \ -2x^2+x+1 \\ &\Leftrightarrow \ 9 - 12x + 4x^2 \ \geqslant \ -2x^2+x+1 \\ &\Leftrightarrow \ 6x^2 - 13x + 8 \ \geqslant \ 0 \end{aligned}$$

  On note Δ le discriminant du polynôme $6X^2 - 13X + 8$. Alors :
  $$\Delta \ = \ (-13)^2 - 4 \times 6 \times 8 \ = \ 169 - 4 \times 48 \ = \ 169 - 192 \ < \ 0$$
  Le polynôme $6X^2 - 13X + 8$ n'admet pas de racine et son coefficient dominant est strictement positif. On en déduit que l'assertion $(6x^2 - 13x + 8 \geqslant 0)$ est toujours vraie.
  Par raisonnement par équivalence, la première assertion l'est également.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de } (4) \text{ est : } \mathcal{D}_{(4)} = [-\tfrac{1}{2}, 1].}$$

$\square$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes :

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} k \qquad \text{et} \qquad T_n \;=\; \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}$$

1. $(*)$ Rappeler l'expression de S_n en fonction de n et la démontrer.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k \;=\; \dfrac{n(n+1)}{2}$.

▸ **Initialisation**

- D'une part : $\sum\limits_{k=0}^{0} k = 0$.
- D'autre part : $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k \;=\; \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$)

$$\begin{aligned}
\text{On a :} \qquad \sum_{k=0}^{n+1} k \;&=\; \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1) \\
&=\; \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&=\; \frac{n+1}{2}(n+2)
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}.}$$

Commentaire

Notons que cette question est une pure question de cours. Il est inconcevable de ne pas savoir la traiter parfaitement.

□

2. En déduire une expression de T_n en fonction de n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \times \frac{(j-1)\left((j-\cancel{1})+\cancel{1}\right)}{2} \right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cancel{j}} \frac{(j-1)\,\cancel{j}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j-1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k && \textit{(avec le décalage d'indice } k = j-1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{(n-1)\left((n-\cancel{1})+\cancel{1}\right)}{2} && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N} : T_n = \frac{(n-1)\,n}{4}.}$$

Commentaire

Rappelons qu'il y a deux manières d'écrire la double somme $T_n = \sum\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}$:

- d'une part :
$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(i \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j} \right)$$
- d'autre part :
$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \right)$$

Il reste à choisir laquelle de ces deux expressions est pertinente pour la résolution de l'exercice. Dans notre cas, il est possible de calculer la somme $\sum\limits_{i=0}^{j-1} i$ mais pas la somme $\sum\limits_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j}$. C'est pour cela que l'on a opté pour l'utilisation de la 2^{nde} expression.

□

Exercice 7

1. Montrer que la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Démonstration.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \;=\; (n+1)! - n! \;=\; (n+1)\times n! - n! \;=\; n! \times \big((n+1)-1\big) \;=\; n!\times n \;>\; 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (n!)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc strictement croissante.}}$$

□

2. Montrer que, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, $n!$ est un nombre pair.

Démonstration.
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On sait :

$$n! \;=\; \prod_{i=1}^{n} i \;=\; 1\times 2\times \prod_{i=3}^{n} i \qquad \textit{(car } n \geqslant 2\textit{)}$$

Ainsi, en notant $k = \prod\limits_{i=3}^{n} i$, on remarque :

× tout d'abord : $k \in \mathbb{N}$ (car k est un produit d'entiers naturels).

× ensuite : $n! = 2 \times k$

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \in [\![2, +\infty[\![, \ n! \text{ est pair.}}$$

Commentaire

Revenons sur l'écriture :

$$\prod_{i=1}^{n} i \;=\; 1\times 2\times \prod_{i=3}^{n} i$$

Celle-ci n'est bien valable que pour $n \geqslant 2$. En effet :

× si $n = 0$, alors :

$$\prod_{i=1}^{0} i \;=\; \prod_{i\in\varnothing} i \;=\; 1$$

× si $n = 1$, alors :

$$\prod_{i=1}^{1} i \;=\; 1$$

Notons que cette écriture est bien vraie pour $n = 2$:

$$\prod_{i=3}^{2} i \;=\; \prod_{i\in\varnothing} i \;=\; 1$$

Ainsi :

$$\prod_{i=1}^{2} i \;=\; 1\times 2 \;=\; 1\times 2\times \prod_{i=3}^{2} i$$

□

On admettra par la suite que pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, $n!$ est un multiple de 3.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $a \leqslant b$.

a) Exprimer le quotient $\dfrac{b!}{a!}$ comme produit explicite d'entiers naturels.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{b!}{a!} &= \frac{\prod\limits_{i=1}^{b} i}{\prod\limits_{i=1}^{a} i} \\ &= \frac{\cancel{\prod\limits_{i=1}^{a}} i \times \prod\limits_{i=a+1}^{b} i}{\cancel{\prod\limits_{i=1}^{a}} i} \quad \textit{(car } a \leqslant b\textit{)} \\ &= \prod_{i=a+1}^{b} i \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{b!}{a!} = \prod_{i=a+1}^{b} i}$$

Commentaire

Notons que si $a = b$, on a bien :

× d'une part : $\dfrac{b!}{a!} = \dfrac{b!}{b!} = 1$.

× d'autre part : $\prod\limits_{i=a+1}^{b} i = \prod\limits_{i=b+1}^{b} i = \prod\limits_{i \in \varnothing} i = 1$.

L'égalité $\dfrac{b!}{a!} = \prod\limits_{i=a+1}^{b} i$ est donc toujours bien vérifiée.

□

b) Que peut-on en déduire sur le réel $\dfrac{b!}{a!}$?

Démonstration.

D'après la question précédente, $\dfrac{b!}{a!}$ est un produit d'entiers.

On en déduit que le réel $\dfrac{b!}{a!}$ est un entier.

□

4. Démontrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $b! = c! + 2$.

Démonstration.
On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $b! = c! + 2$.
Trois cas se présentent.

- si $c \in \{0, 1\}$, alors :

$$b! \ = \ c! + 2 \ = \ 1 + 2 \ = \ 3$$

Absurde ! En effet, la fonction $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et $2! = 2$ et $3! = 6$. Il n'existe donc pas d'entier b tel que : $b! = 3$.

- si $c = 2$, alors :

$$b! \;=\; c! + 2 \;=\; 2 + 2 \;=\; 4$$

Absurde ! En effet, la fonction $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $2! = 2$ et $3! = 6$. Il n'existe donc pas d'entier b tel que : $b! = 4$.

- si $c \geqslant 3$, alors :
  - × on remarque tout d'abord : $b! = c! + 2 > c!$.
    Or, d'après la question ***1.***, la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. On en déduit : $b > c$.
    Ainsi : $b \geqslant c \geqslant 3$.
  - × D'après la question ***3.b)***, on en déduit que $\dfrac{b!}{3!}$ et $\dfrac{c!}{3!}$ sont des entiers.
    Or :

$$\begin{array}{rrcl} & b! & = & c! + 2 \\ \text{donc} & \dfrac{b!}{3!} & = & \dfrac{c!}{3!} + \dfrac{2}{3!} \\ \text{d'où} & \dfrac{b!}{6} - \dfrac{c!}{6} & = & \dfrac{2}{6} \\ \text{ainsi} & \dfrac{b!}{6} - \dfrac{c!}{6} & = & \dfrac{1}{3} \end{array}$$

Comme $\dfrac{b!}{6}$ et $\dfrac{c!}{6}$ sont des entiers, alors $\dfrac{1}{3} = \dfrac{b!}{6} - \dfrac{c!}{6}$ est un entier.
Absurde !

$$\boxed{\text{Finalement, il n'existe pas de couple } (b, c) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que : } b! = c! + 2.}$$

□