DS2 /102

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /21

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.

- **1 pt**

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$? Le démontrer.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

3. $(*)$ On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$$

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- **2 pts (dont 1 pt pour : $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$)**

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

- **1 pt : structure de l'analyse-synthèse.**
- **3 pts : analyse**
  - × **1 pt : Soit $x \in I$, alors $-x \in I$**
  - × **1 pt : $f(-x) = g(x) - h(x)$**
  - × **1 pt : résolution du système par algorithme du pivot de Gauss**
- **2 pts : synthèse**
  - × **1 pt : $f = g_0 + h_0$**
  - × **1 pt : g_0 paire et h_0 impaire**

5. *a)* Écrire une fonction **Python** calculant le maximum des éléments d'une liste `A`.

- **1 pt : structure de fonction**
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : structure itérative**
- **2 pts : structure conditionnelle**

b) Modifier la fonction précédente pour qu'elle affiche également la première position de ce maximum dans la liste.

- **1 pt :** `ind = 0`
- **1 pt :** `ind = i`
- **1 pt** `return M, ind`

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner un encadrement optimal de $\lfloor x \rfloor$.

- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$**

Exercice 2 : Fonctions hyperboliques et suite récurrente /46

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{sh}\,(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\,(u_n) \end{cases}$$

Partie I : Étude des fonctions sh et f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $\mathrm{sh}\,(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

- **1 pt : La fonction** sh **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **car elle est...**
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$**,** $\mathrm{sh}(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$
- **1 pt : tableau de variations complet de** sh

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\mathrm{sh}'(x)$		$+$		$+$	
Variations de sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

- **1 pt : signe de** $\mathrm{sh}(x)$

2. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- **1 pt : hypothèses du théorème de la bijection**
- **1 pt :** $\mathrm{sh}(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'\,(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
On admettra dans la suite que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$.

- **1 pt : La fonction** f **est dérivable sur** $\mathbb{R}_-^*$ **et** $\mathbb{R}_+^*$ **car elle est...**
- **1 pt :** $f' : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x\ \mathrm{ch}(x)}{\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2}$

4. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \text{sh}(x) - x\,\text{ch}(x)$$

Étudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h(x)$.

- **1 pt : la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est...**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h'(x) = -x\,\text{sh}(x) \leqslant 0$ (d'après *1.*)**
- **1 pt : variations et $h(0) = 0$**

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h'(x)$	0 $\quad$ $-$
Variations de h	$0 \searrow -\infty$
Signe de $h(x)$	0 $\quad$ $-$

- **1 pt : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) \leqslant 0$**

5. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \leqslant 0$ (d'après *3.* et la question précédente)**
- **1 pt : mention de la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$ d'après l'énoncé**
- **1 pt : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$**
- **3 pts : f paire**
  - × **2 pts : cas $x \neq 0$ (dont 1 pt pour dire que, comme $x \neq 0$, alors $-x \neq 0$)**
  - × **1 pt : cas $x = 0$**

Partie II : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On donne :

$$f\left(\tfrac{4}{5}\right) \simeq 0.9, \qquad f(1) \simeq 0.85,$$
$$\text{sh}\left(\tfrac{3}{5}\right) \simeq 0.64, \quad \text{sh}\left(\tfrac{4}{5}\right) \simeq 0.89, \quad \text{sh}(1) \simeq 1.18, \quad \text{sh}\left(\tfrac{6}{5}\right) \simeq 1.51$$

6. Démontrer : $f\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

- **1 pt : $f\left(\frac{4}{5}\right) \geqslant f(x) \geqslant f(1)$ par décroissance de f sur $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt : $\dfrac{4}{5} \leqslant f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant 1$ car...**

7. $(*)$ En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

8. $(*)$ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
*(on pourra utiliser la question **2.**, sans chercher à déterminer α)*

- **1 pt : cas** $x = 0$
- **3 pts : cas** $x \neq 0$
  - $\times$ **1 pt :** $f(x) = x \iff 1 = \text{sh}(x)$
  - $\times$ **1 pt : d'après *2.*, la fonction** sh **réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **sur** $\mathbb{R}$**.**
  - $\times$ **1 pt :** $1 \in \mathbb{R}$

9. Donner un encadrement de α et justifier :

$$\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right], \quad \frac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)}$$

- **1 pt : d'après les données de l'énoncé :** $\text{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant 1 \leqslant \text{sh}(1)$**. Donc :** $\text{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant \text{sh}(\alpha) \leqslant \text{sh}(1)$
- **1 pt :** $\text{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**. D'où :** $\dfrac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1$
- **2 pts :** $\dfrac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)}$

10. On donne : $\dfrac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq -0.47$ et $\dfrac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)} \simeq -0.13$.
Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- **0 pt : IAF (non abordée encore en classe)**
- **3 pts : récurrence**
  - $\times$ **1 pt : initialisation**
  - $\times$ **2 pts : hérédité**

11. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$**. Donc :** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
- **1 pt : utilisation du théorème d'encadrement**

12. $(*)$ Écrire une fonction en **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie la valeur de u_n.

- **1 pt : importation** `numpy`
- **1 pt : structure de fonction**
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : structure itérative**

```python
import numpy as np
def suite_u(n) :
    u = 1
    for i in range(1,n+1) :
        u = 2 * u / (np.exp(u) - np.exp(-u))
    return u
```

13. ***a)*** Déterminer un entier n_0 à partir duquel : $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

- **1 pt : il suffit de trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :** $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4}$
- **2 pts :** $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4} \;\Leftrightarrow\; n \geqslant \dfrac{3\,\ln(5) + 4\,\ln(2)}{\ln(2)}$ **(dont 1 pt pour la stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$)**
- **1 pt : choix de** $n_0 = \left\lfloor \dfrac{3\,\ln(5) + 4\,\ln(2)}{\ln(2)} \right\rfloor$

b) Déduire de cette inégalité une fonction **Python** permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

- **1 pt**

```python
def alpha_approx() :
    n = np.ceil((3 * np.log(5) + 4 * np.log(2)) / np.log(2))
    return suite_u(n)
```

Exercice 3 : Fonctions homographiques /35

On considère la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto \frac{2x-1}{-x+2}$$

1. $(*)$ Démontrer que g est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

- **1 pt : la fonction g est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ car elle est...**
- **1 pt :** $g' : x \mapsto \dfrac{3}{(-x+2)^2}$

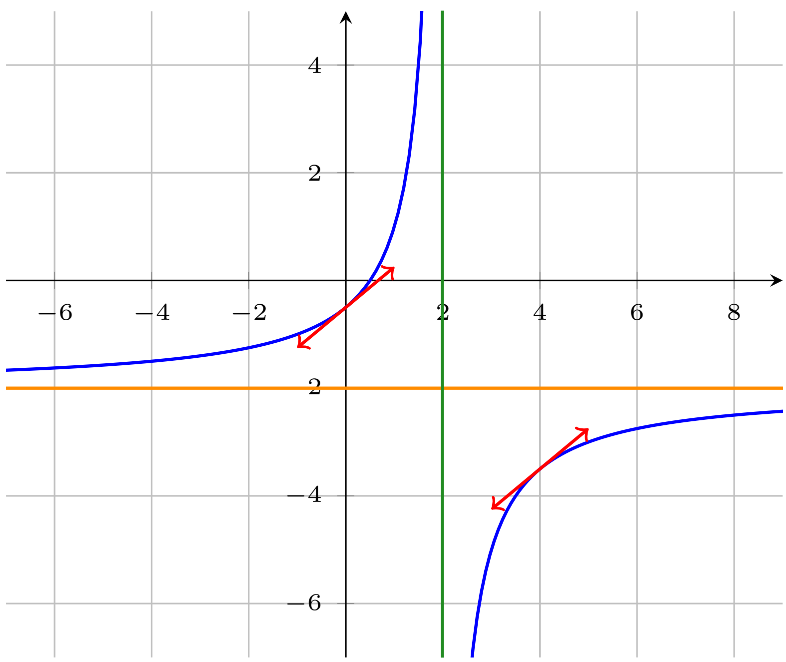
2. $(*)$ Déterminer le tableau de variations complet de g (limites comprises).

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -2$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = -\infty$
- **1 pt : reste du tableau de variations**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	||	$+$	
Variations de g	-2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-2

3. $(*)$ Tracer la courbe représentative de g.

- **1 pt : tangentes**
- **1 pt : asymptotes**
- **1 pt : monotonie**
- **1 pt : propreté**



Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $c \neq 0$. On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

Une telle fonction est appelée *fonction homographique*. Notons que la fonction g est un cas particulier de fonction homographique avec $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$ et $d = 2$.

4. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ de f en fonction de c et d.

- **1 pt :** $\mathcal{D}_{a,b,c,d} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

5. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition en fonction de a, b, c et d.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$
- **1 pt : si** $ad - bc > 0$**, alors** $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = -\infty$**.**
- **1 pt : si** $ad - bc < 0$**, alors :** $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = +\infty$**.**
- **1 pt : si** $ad - bc = 0$**, alors :** $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = \dfrac{a}{c}$ **et** $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = \dfrac{a}{c}$**.**

6. Démontrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et montrer que sa dérivée est de la forme :

$$f' : x \mapsto \frac{ad - bc}{h(x)}$$

où h est une fonction que l'on explicitera.

- **1 pt : la fonction** f **est dérivable sur** $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ **car elle est...**
- **1 pt :** $f' : x \mapsto \dfrac{ad - bc}{h(x)}$ **où** $h : x \mapsto (cx + d)^2$

7. Déterminer la monotonie de f. *On distinguera trois cas.*

- **1 pt : Si** $ad - bc > 0$**, la fonction** f **est donc strictement croissante sur** $]-\infty, -\frac{d}{c}[$ **et sur** $]-\frac{d}{c}, +\infty[$**.**
- **1 pt : Si** $ad - bc = 0$**, la fonction** f **est donc constante sur** $]-\infty, -\frac{d}{c}[$ **et sur** $]-\frac{d}{c}, +\infty[$**.**
- **1 pt : Si** $ad - bc < 0$**, la fonction** f **est donc strictement décroissante sur** $]-\infty, -\frac{d}{c}[$ **et sur** $]-\frac{d}{c}, +\infty[$**.**

8. On considère le cas particulier : $ad - bc > 0$.

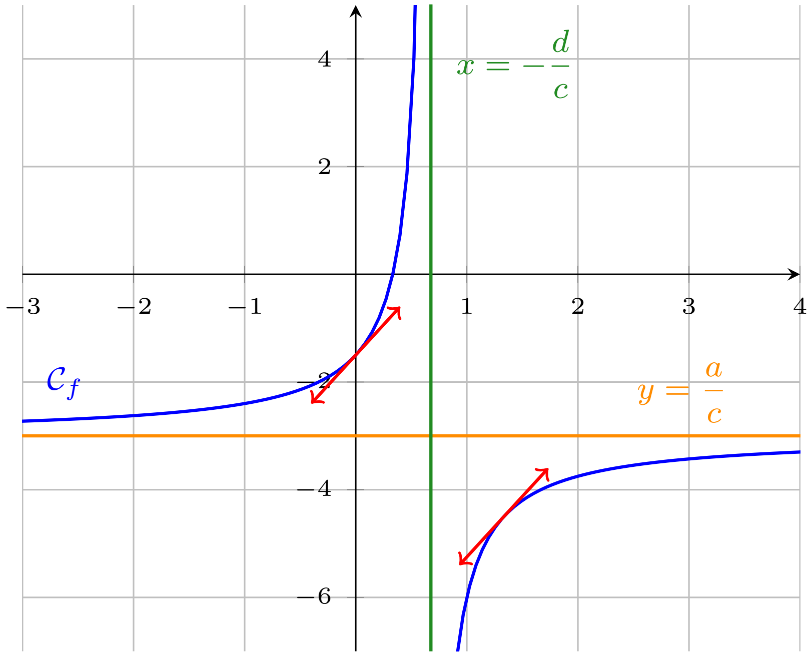
a) Dresser le tableau de variations de f.

- **2 pts : utilisation des questions *5.* et *7.***

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	‖	$+$
Variations de f	$\frac{a}{c}$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $\frac{a}{c}$

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **1 pt : tangentes**
- **1 pt : asymptotes**
- **1 pt : monotonie**
- **1 pt : propreté**



9. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}, \quad f(x) \;=\; \frac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$$

On exprimera α, β et γ en fonction de a, b, c et d.

- **1 pt :** $\alpha = \dfrac{bc - ad}{c^2}$
- **1 pt :** $\beta = -\dfrac{d}{c}$ **et** $\gamma = \dfrac{a}{c}$
- **1 pt : vérification**

10. En supposant connue la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$, où α est le réel déterminé en question précédente, comment retrouve-t-on la représentation graphique de la question ***8.b)*** ?

- **1 pt : on obtient la courbe représentative de la fonction** $h : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta}$ **à partir de celle de la fonction** $u : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$ **en effectuant une translation de vecteur** $(\beta, 0)$**.**
- **1 pt : on obtient la courbe représentative de la fonction** $f : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$ **à partir de celle de la fonction** $h : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta}$ **en effectuant une translation de vecteur** $(0, \gamma)$**.**

Dans toute la fin de l'exercice, on suppose : $ad - bc \neq 0$.

11. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$. *On exprimera* x *en fonction de* y.

- **2 pts : L'unique solution de l'équation $y = f(x)$ sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ est : $\dfrac{-dy+b}{cy-a}$ (dont 1 pt : comme $y \neq \dfrac{a}{c}$, alors : $cy - a \neq 0$)**

12. En déduire que f est bijective sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et déterminer sa bijection réciproque.

- **1 pt : D'après la question précédente :** $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\},\ \exists! x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d},\ y = f(x)$
- **1 pt :** $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \to & \mathcal{D}_{a,b,c,d} \\ x & \mapsto & \dfrac{-dx+b}{cx-a} \end{array} \right.$

13. Peut-on répondre à la question ***11.*** lorsque $y = \dfrac{a}{c}$?

- **1 pt : Dans le cas où $y = \dfrac{a}{c}$, l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$**