DS2

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}}$$

□

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$? Le démontrer.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- **<u>Initialisation</u>** :
  - × D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{0} k^3 = \sum\limits_{k\in\varnothing} k^3 = 0$.
  - × D'autre part : $\dfrac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$.

  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **<u>Hérédité</u>** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$)

$$\begin{aligned}
\text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} k^3\Big) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\,\big(n^2 + 4(n+1)\big) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\,(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\,(n+2)^2
\end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.}$$

□

3. $(*)$ On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$$

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ de :

- $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ qui est :
  - × dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,
  - × telle que : $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Démonstration.
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ telles que :
  1) $f = g + h$,
  2) g est paire,
  3) h est impaire.

  On remarque tout d'abord, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ (car l'intervalle I est symétrique par rapport à 0) et :

$$\begin{array}{rcll} f(-x) & = & (g+h)(-x) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1)}}\textit{)} \\ & = & g(-x) + h(-x) & \\ & = & g(x) - h(x) & \textit{(car } g \textit{ paire et } h \textit{ impaire)} \end{array}$$

  On obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ g(x) & - & h(x) & = & f(-x) \end{array}\right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} g(x) & + & h(x) & = & f(x) & & \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) & + & f(-x) \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,g(x) & & & = & f(x) & + & f(-x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) & + & f(-x) \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\,L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} g(x) & = & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) & = & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}\right.$$

- **Synthèse** : On pose

$$g_0 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad h_0 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$$

On remarque alors :

× tout d'abord : $f = g_0 + h_0$. En effet, pour tout $x \in I$:

$$(g_0+h_0)(x) = g_0(x)+h_0(x) = \frac{f(x)+\cancel{f(-x)}}{2} + \frac{f(x)-\cancel{f(-x)}}{2} = \frac{\cancel{2}\,f(x)}{\cancel{2}} = f(x)$$

× ensuite, g_0 est paire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$g_0(-x) = \frac{f(-x)+f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g_0(x)$$

× enfin, h_0 est impaire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$h_0(-x) = \frac{f(-x)-f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h_0(x)$$

Ainsi, toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Commentaire

Détaillons les attentes d'un raisonnement par analyse-synthèse.

- Dans la première partie du raisonnement, on suppose qu'il existe des fonctions g et h telles que f est de la forme souhaitée. En se basant sur cette hypothèse, on obtient une caractérisation des fonctions g et h :

$$g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Il faut bien comprendre que dans cette première partie du raisonnement, on a **supposé** (et non démontré !) l'existence de deux fonctions g et h. C'est pourquoi il faut, dans la deuxième partie du raisonnement, démontrer l'existence de telles fonctions.
L'idée est alors de d'introduire les fonctions g_0 et h_0 telles que caractérisées dans la partie **analyse** et de **démontrer** que l'on obtient ainsi des fonctions qui satisfont les exigences de la question.

- En résumé, un raisonnement par **analyse-synthèse** se déroule en deux temps :

× **analyse** : on suppose l'existence d'un objet vérifiant certains critères (ici, on suppose l'existence de fonctions g et h). Si cet objet existe, il est alors d'une certaine forme ($g : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$).

× **synthèse** : on vérifie que l'objet obtenu lors de la phase d'analyse répond bien aux critères initiaux (les fonctions g_0 et h_0 ainsi construites permettent bien de décomposer f sous la forme souhaitée).
Cela permet de lever la réserve d'existence.

Ce schéma de démonstration permet non seulement de conclure :

l'objet répond à certains critères	$\Leftrightarrow$	l'objet s'écrit sous une forme particulière

mais aussi de démontrer que chacune des deux propositions de l'équivalence est vérifiée. □

5. ***a)*** Écrire une fonction **Python** calculant le maximum des éléments d'une liste `A`.

Démonstration.
On propose le scrip suivant.

```
1 def maximum(A) :
2     M = A[0]
3     for i in range(len(A)) :
4         if A[i] > M :
5             M = A[i]
6     return M
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `maximum`,
  - × elle prend en paramètre la variable `A`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `M`.

```
1 def maximum(A) :
```

```
6     return M
```

  On initialise ensuite la variable `M` à `A[0]`, le premier élément de la liste `A`.

```
2     M = A[0]
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à :
  1) parcourir la liste `A`,
  2) mettre à jour la variable `M` à chaque fois qu'un élément de la liste `A` lui est strictement supérieur.

  On doit donc :
  1) parcourir tous les éléments de la liste `A`. Pour cela, on parcourt l'ensemble des indices des éléments de cette liste. On utilise à cet effet une structure itérative (boucle for).

```
3     for i in range(len(A)) :
```

  2) mettre à jour, à chaque tour de boucle `i`, la variable `M` pour qu'elle contienne l'élément `A[i]` si celui-ci lui est strictement supérieur. Pour cela, on utilise une structure conditionnelle (structure if).

```
4         if A[i] > M :
5             M = A[i]
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `M` contient le maximum des éléments de la liste `A`. On finit donc ce script en renvoyant la valeur de cette variable.

```
6     return M
```

Commentaire

- On pouvait également proposer le script suivant, plus idiomatique de **Python** (mais moins facilement adaptable pour la question suivante).

```python
def maximum(A) :
    L = A[0]
    for elt in A :
        if elt > M :
            M = elt
    return M
```

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un script **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

b) Modifier la fonction précédente pour qu'elle affiche également la première position de ce maximum dans la liste.

Démonstration.
On propose le scrip suivant.

```python
1 def maximum(A) :
2     M = A[0]
3     ind = 0
4     for i in range(len(A)) :
5         if A[i] > M :
6             M = A[i]
7             ind = i
8     return M, ind
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  - × La structure de fonction est presque la même qu'en question précédente. La seule modification porte sur les variables de sortie qui sont maintenant `M` et `ind`.
  - × On initizlise la variable `M` de la même façon.
  - × On initialise de plus la variable `ind` à 0, premier indice des éléments de la liste `A`.
- **Structure de la fonction**
  Les lignes 4 à 7 consistent à :
  1) parcourir la liste `A`,
  2) mettre à jour la variable `M` à chaque fois qu'un élément de la liste `A` lui est strictement supérieur.
  3) mettre à jour la variable `ind` à chaque mise à jour de la variable `M`
  On doit donc, en plus de ce qui a été fait en question précédente :
  1) mettre à jour, à chaque tour de boucle `i`, la variable `ind` pour qu'elle contienne l'indice `i` si la variable `M` est mise à jour. Pour cela, on ajoute la mise à jour de `ind` dans la structure conditionnelle if.

```python
7             ind = i
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `M` contient le maximum des éléments de la liste `A` et `ind` la première position de ce maximum. On finit donc ce script en renvoyant la valeur de ces deux variables.

```
    return M, ind
```

□

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner un encadrement optimal de $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x}$$

□

Exercice 2 : Fonctions hyperboliques et suite récurrente

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Partie I : Étude des fonctions sh et f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $\operatorname{sh}(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la combinaison linéaire $\operatorname{sh} = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$,
  - × $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction sh est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sh}'(x) & = & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ & = & \operatorname{ch}(x) \end{array}$$

  Or $\mathrm{e}^{x} > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Donc : $\operatorname{sh}'(x) > 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\operatorname{sh}'(x)$		$+$		$+$	
Variations de sh	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de $\operatorname{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

    $\boxed{\text{Ainsi : } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty.}$
  - × De plus : Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

    $\boxed{\text{Ainsi : } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty.}$
- Détaillons enfin l'obtention de la dernière ligne du tableau.
  La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient alors :
  - × $\forall x \leqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \leqslant \mathrm{sh}(0) = 0$.
  - × $\forall x \geqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \geqslant \mathrm{sh}(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathrm{sh}(x) \leqslant 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{sh}(x) \geqslant 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

□

2. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction sh est :

× continue (car dérivable) sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$,

× strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$, d'après la question précédente.

Ainsi sh réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $\mathrm{sh}(]-\infty, +\infty[)$, où :

$$\mathrm{sh}(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x), \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) \right[=]-\infty, +\infty[$$

$$\boxed{\text{La fonction sh réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

□

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
On admettra dans la suite que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est le quotient $f = \dfrac{g_1}{g_2}$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $g_2 : x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ qui :
    - est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question ***1.***,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \frac{1 \times \mathrm{sh}(x) - x \times \mathrm{sh}'(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2} = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f' : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2}.}$$

□

4. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$$

Étudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h(x)$.

Démonstration.

- La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est la somme $h = h_1 - h_2$ de :
  - × $h_1 : x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après ***3.***,
  - × $h_2 : x \mapsto x\ \mathrm{ch}(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$h'(x) \ = \ \cancel{\mathrm{ch}(x)} - (\cancel{1 \times \mathrm{ch}(x)} + x \times \mathrm{sh}(x)) \ = \ -x\ \mathrm{sh}(x)$$

  Or :
  - × d'une part : $x \geqslant 0$,
  - × d'autre part, d'après ***1.***, comme $x \in \mathbb{R}_+$, on sait : $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$.

  On en déduit : $h'(x) \leqslant 0$.
- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	0	$-$	
Variations de h	0	↘	$-\infty$
Signe de $h(x)$	0	$-$	

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord :

$$h(0) \ = \ \mathrm{sh}(0) - \cancel{0 \times \mathrm{ch}(0)} \ = \ 0$$

$$\boxed{h(0) = 0}$$

  - × De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$h(x) \ = \ \mathrm{sh}(x) - x\ \mathrm{ch}(x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} - x\,\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \ = \ x\,\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{2\,x} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} - x\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

    Or :
    - tout d'abord : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\,x} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

      Ensuite : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^x = +\infty$. On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{2\,x} - \dfrac{1}{2}\right) = -\infty$.
    - de plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2} = 0$.
    - enfin, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty.}$$

- Détaillons enfin l'obtention de la dernière ligne du tableau.
  La fonction h est décroissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi :

$$\forall x \geqslant 0, \quad h(x) \ \leqslant \ h(0) \ = \ 0$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \, h(x) \leqslant 0}$$

□

5. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question ***3.*** :

$$f'(x) \ = \ \frac{\mathrm{sh}(x) - x \ \mathrm{ch}(x)}{\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2} \ = \ \frac{h(x)}{\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2}$$

  Or :
  × d'une part, d'après la question précédente : $h(x) \leqslant 0$,
  × d'autre part : $\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2 > 0$.
  On en déduit : $f'(x) \leqslant 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}_+$. (On rappelle que, d'après l'énoncé, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(0) = 0$)

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	$-$	
Variations de f	1	↘	0

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  × Tout d'abord, d'après l'énoncé : $f(0) = 1$.

$$\boxed{f(0) = 1}$$

  × Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) \ = \ \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} \ = \ \frac{x}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}} \ = \ \frac{2x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} \ = \ \frac{2x}{\mathrm{e}^x} \times \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-2x}}$$

  Or :
  - d'une part, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$,
  - d'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-2x}} = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

- On cherche maintenant à déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
  - × Pour cela, on va commencer par déterminer la parité de f.
    Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
    - si $x \neq 0$, alors $-x \neq 0$ et :

$$f(-x) = \frac{-x}{\text{sh}(-x)} = -\frac{x}{\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(-x)}}{2}} = -\frac{2x}{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}} = \frac{2x}{-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}} = \frac{x}{\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \frac{x}{\text{sh}(x)} = f(x)$$

    - si $x = 0$, alors $-0 = 0$ et :

$$f(-0) = f(0)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc paire.}}$$

  - × On obtient, par parité de f, le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

□

Partie II : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On donne :

$$f\left(\tfrac{4}{5}\right) \simeq 0.9, \qquad f(1) \simeq 0.85,$$
$$\text{sh}\left(\tfrac{3}{5}\right) \simeq 0.64, \quad \text{sh}\left(\tfrac{4}{5}\right) \simeq 0.89, \quad \text{sh}(1) \simeq 1.18, \quad \text{sh}\left(\tfrac{6}{5}\right) \simeq 1.51$$

6. Démontrer : $f\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

Démonstration.

- Soit $x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

$$\begin{array}{rcccccl} & \frac{4}{5} & \leqslant & x & \leqslant & 1 & \\ \text{donc} & f\left(\frac{4}{5}\right) & \geqslant & f(x) & \geqslant & f(1) & \textit{(par décroissance de } f \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \end{array}$$

  Or, d'après les données de l'énoncé :
  - × d'une part : $f(1) \geqslant \frac{4}{5}$ (car $0.85 \geqslant 0.8 = \frac{4}{5}$),
  - × d'autre part : $f\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant 1$

  Ainsi, par transitivité :

$$\frac{4}{5} \leqslant f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant 1$$

  Autrement dit : $f(x) \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f\left(\left[\tfrac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\tfrac{4}{5}, 1\right]}$$

□

7. $(*)$ En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

Commentaire

Notons que la suite (u_n), définie par récurrence au début de l'énoncé, est automatiquement bien définie, car la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\ :\ u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

- **Initialisation** :
  On remarque : $u_0 = 1 \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$).
  Par hypothèse de récurrence : $u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  Or, d'après ce qui précède : $f\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{4}{5}, 1\right]$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\tfrac{4}{5}, 1\right].}$$

□

8. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
*(on pourra utiliser la question **2.**, sans chercher à déterminer α)*

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x = 0$, alors :
$$f(0) \ = \ 1 \ \neq \ 0$$
  On en déduit que 0 n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$.
- Si $x \neq 0$, alors :
$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} = x \\ &\Leftrightarrow \quad x = x\ \mathrm{sh}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = \mathrm{sh}(x) \qquad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$
  Or, d'après la question ***2.***, la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  De plus : $1 \in \mathbb{R}$. L'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Finalement, l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

□

9. Donner un encadrement de α et justifier :

$$\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right],\ \frac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)}$$

Démonstration.

- D'après les données de l'énoncé : $\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \ \leqslant\ 1\ \leqslant\ \mathrm{sh}(1)$. Donc :
$$\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \ \leqslant\ \mathrm{sh}(\alpha)\ \leqslant\ \mathrm{sh}(1)$$

Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $\text{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En appliquant sh^{-1}, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} \text{sh}^{-1}\left(\text{sh}\left(\dfrac{4}{5}\right)\right) & \leqslant & \text{sh}^{-1}\big(\text{sh}(\alpha)\big) & \leqslant & \text{sh}^{-1}\big(\text{sh}(1)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{4}{5} & \leqslant & \alpha & \leqslant & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \tfrac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1.}$$

- Soit $x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  - Tout d'abord, d'après la question ***4.***, la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On obtient :

$$h\left(\frac{4}{5}\right) \geqslant h(x) \geqslant h(1)$$

On a même, toujours d'après la question ***4.*** :

$$0 \geqslant h\left(\frac{4}{5}\right) \geqslant h(x) \geqslant h(1)$$

Ainsi :

$$0 \leqslant -h\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant -h(x) \leqslant -h(1)$$

  - De plus, d'après ***1.***, la fonction sh est croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{array}{rccccc} & \text{sh}\left(\dfrac{4}{5}\right) & \leqslant & \text{sh}(x) & \leqslant & \text{sh}(1) \\ \text{donc} & \dfrac{1}{(\text{sh}(\frac{4}{5}))^2} & \geqslant & \dfrac{1}{(\text{sh}(x))^2} & \geqslant & \dfrac{1}{(\text{sh}(1))^2} \end{array}$$

(par stricte décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$)

Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{1}{(\text{sh}(1))^2} \leqslant \frac{1}{(\text{sh}(x))^2} \leqslant \frac{1}{(\text{sh}(\frac{4}{5}))^2}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} -\dfrac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)} & \leqslant & -\dfrac{h(x)}{\text{sh}^2(x)} & \leqslant & -\dfrac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \\ & & \shortparallel & & \\ & & -f'(x) & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \left[\tfrac{4}{5}, 1\right],\ \frac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)}}$$

□

10. On donne : $\dfrac{h\left(1\right)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq -0.47$ et $\dfrac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2\left(1\right)} \simeq -0.13$.
Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$
Puis :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Démonstration.

- Soit $x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$. D'après la question ***9.*** :
$$\frac{h\left(1\right)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \ \leqslant\ f'\left(x\right) \ \leqslant\ \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2\left(1\right)}$$
On en déduit, avec les données de l'énoncé :
$$-\frac{1}{2} \ \leqslant\ \frac{h\left(1\right)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \ \leqslant\ f'\left(x\right) \ \leqslant\ \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2\left(1\right)} \ \leqslant\ \frac{1}{2}$$
Autrement dit : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
- On sait alors que :
  × f est dérivable sur $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$,
  × $\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :
$$\forall (x, y) \in \left[\frac{4}{5}, 1\right], \ \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\ |y - x|$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$ (d'après ***7.***) et $x = \alpha \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$ (d'après ***9.***), on obtient :
$$\left|f(u_n) - f(\alpha)\right| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |u_n - \alpha|$$
Or :
  × d'une part : $u_{n+1} = f(u_n)$,
  × d'autre part, par définition de α en question ***8.*** : $f(\alpha) = \alpha$.
$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$$
- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
  ▸ **Initialisation** :
  On sait : $u_0 = 1$. Or, d'après ***9.*** :
$$\begin{array}{lccccc} & \frac{4}{5} & \leqslant & \alpha & \leqslant & 1 \\ \text{d'où} & 1 - \frac{4}{5} & \geqslant & 1 - \alpha & \geqslant & 1 - 1 \\ \text{ainsi} & \frac{1}{5} & \geqslant & u_0 - \alpha & \geqslant & 0 \end{array}$$
  On en déduit : $|u_0 - \alpha| = u_0 - \alpha \leqslant \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$).
  D'après la question précédente : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\, |u_n - \alpha|$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leqslant \frac{1}{2}\, |u_n - \alpha| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ &\leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

□

11. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Or $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$.
Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \alpha) = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.}$$

□

12. Écrire une fonction en **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.

Démonstration.
On propose le script suivant.

```python
import numpy as np
def suite_u(n) :
    u = 1
    for i in range(1,n+1) :
        u = 2 * u / (np.exp(u) - np.exp(-u))
    return u
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `suite_u`,
  - × elle prend en paramètre la variable `n`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `u`.

```
2   def suite_u(n) :
```

```
6       return u
```

La variable `u` qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 1 : la valeur de u_0.

```
3       u = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 5 consistent à calculer les valeurs successives de la suite (u_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
4       for i in range(1,n+1) :
5           u = 2 * u / (np.exp(u) - np.exp(-u))
```

On tire ici partie de la définition récursive (d'ordre 1) de cette suite. La nouvelle valeur de la suite, que l'on stockera dans la variable `u`, est obtenue à l'aide de la valeur précédente qui est celle alors stockée dans `u`.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient la quantité $u_{\mathtt{n}}$ où `n` est le paramètre entré lors de l'appel de la fonction.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un script **Python** correct démontre la bonne ocmpréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
  On procèdera de même dans les autres questions **Python**.
- Le script **Python** consiste à mettre à jour successivement la variable `u` jusqu'à obtention de la valeur que l'on souhaite calculer. L'idée est la suivante.
  Si avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle (avec $\mathtt{i} \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$) :

  $$\text{la variable } \mathtt{u} \text{ contient la valeur } u_{i-1}$$

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  $$\text{la variable } \mathtt{u} \text{ contient la valeur } u_i$$

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `u` contient $u_{\mathtt{n}}$.

□

13. a) Déterminer un entier n_0 à partir duquel : $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

Démonstration.

- D'après la question ***10.***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Il suffit alors de trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4}$.
  Si c'est le cas, par transitivité :

$$|u_n - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \ \leqslant \ 10^{-4}$$

- Déterminons alors un entier n_0 vérifiant : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4} \ & \Leftrightarrow \ \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 5 \times 10^{-4} \\
& \Leftrightarrow \ n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \ln(5) - 4\ln(10) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \ -n\ln(2) \leqslant \ln(5) - 4\big(\ln(5) + \ln(2)\big) \\
& \Leftrightarrow \ n \geqslant \frac{3\ln(5) + 4\ln(2)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

En choisissant $n_0 = \left\lceil \frac{3\ln(5) + 4\ln(2)}{\ln(2)} \right\rceil$ (ou tout entier supérieur), on obtient bien :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$$

$$\boxed{\text{On pose finalement : } n_0 = \left\lceil \frac{3\ln(5) + 4\ln(2)}{\ln(2)} \right\rceil.}$$

□

b) Déduire de cette inégalité une fonction **Python** permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Démonstration.
D'après l'inégalité de la question précédente, le réel u_{n_0} est une valeur de α à 10^{-4} près. On en déduit donc le script suivant :

```
def alpha_approx() :
    n = np.ceil((3 * np.log(5) + 4 * np.log(2)) / np.log(2))
    return suite_u(n)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `alpha_approx`,
  × elle ne prend pas de paramètre d'entrée,

```
def alpha_approx() :
```

  On stocke ensuite dans une variable `n` la valeur de n_0 déterminée en question précédente.

```
    n = np.ceil((3 * np.log(5) + 4 * np.log(2)) / np.log(2))
```

- **Fin de la fonction**
  On souhaite enfin renvoyer la valeur de u_{n} que l'on obtient en utilisant la fonction `suite_u` définie en question ***12.***

```
    return suite_u(n)
```

□

Exercice 3 : Fonctions homographiques

On considère la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto \frac{2x-1}{-x+2}$$

1. $(*)$ Démontrer que g est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ car elle est le quotient $g = \dfrac{g_1}{g_2}$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto 2x - 1$ qui est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$,
  - × $g_2 : x \mapsto -x + 2$ qui :
    - est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur }]-\infty, 2[\text{ et sur }]2, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2 \times (-x+2) - (2x-1) \times (-1)}{(-x+2)^2} \\ &= \frac{-\cancel{2x} + 4 + \cancel{2x} - 1}{(-x+2)^2} \\ &= \frac{3}{(-x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient : } g' : x \mapsto \frac{3}{(-x+2)^2}.}$$

□

2. $(*)$ Déterminer le tableau de variations complet de g (limites comprises).

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$g'(x) = \frac{3}{(-x+2)^2} > 0$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$	‖	$+$
Variations de g	$-2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -2$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$g(x) = \frac{2x-1}{-x+2} = \frac{2\cancel{x}\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{-\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = -2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{2}{x}}$$

Or : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -2.}$$

  - × De même, on remarque : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2.}$$

  - × Ensuite : $\displaystyle\lim_{x\to2^-}(2x-1) = 3$ et $\displaystyle\lim_{x\to2^-}(-x+2) = 0^+$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to2^-} g(x) = +\infty.}$$

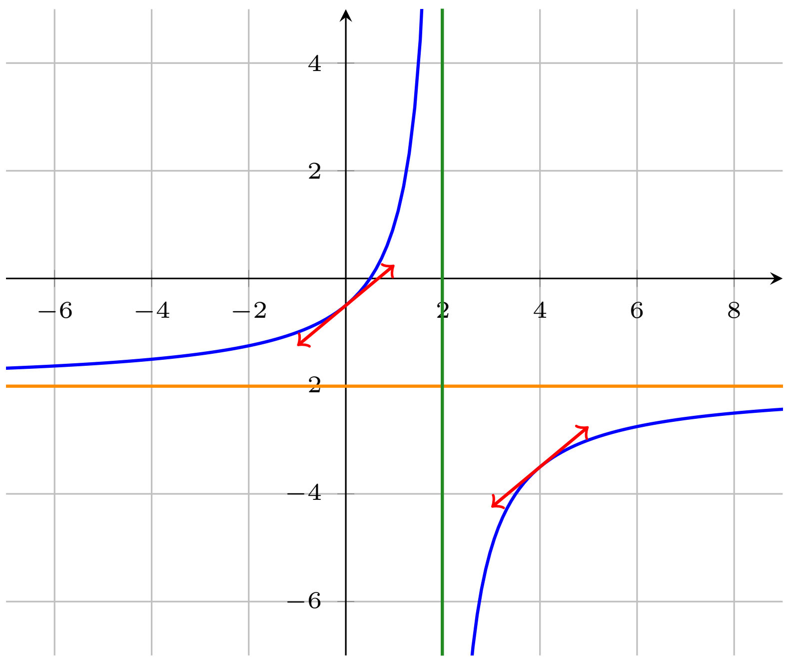
  - × Enfin : Ensuite : $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(2x-1) = 3$ et $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(-x+2) = 0^-$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to2^+} g(x) = -\infty.}$$

□

3. (∗) Tracer la courbe représentative de g.

Démonstration.



Commentaire

- L'équation de la tangente à la courbe représentative de g en 0 est :

$$\begin{array}{rcl} y & = & g(0) + g'(0)\,(x-0) \\ & = & -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\,x \end{array}$$

- L'équation de la tangente à la courbe représentative de g en 4 est :

$$\begin{array}{rcl} y & = & g(4) + g'(4)\,(x-4) \\ & = & -\dfrac{7}{2} + \dfrac{3}{4}\,(x-4) \end{array}$$

□

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $c \neq 0$. On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

Une telle fonction est appelée *fonction homographique*. Notons que la fonction g est un cas particulier de fonction homographique avec $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$ et $d = 2$.

4. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ de f en fonction de c et d.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \text{La quantité } f(x) \text{ est bien définie} & \Leftrightarrow & cx + d \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & cx \neq -d \\ & \Leftrightarrow & x \neq -\dfrac{d}{c} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathcal{D}_{a,b,c,d} = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\}.}$$

□

5. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition en fonction de a, b, c et d.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}, 0\}$:

$$f(x) \;=\; \frac{a\,\cancel{x}\,(1 + \frac{b}{ax})}{c\,\cancel{x}\,(1 + \frac{d}{cx})} \;=\; \frac{a}{c}\,\frac{1 + \frac{b}{ax}}{1 + \frac{d}{cx}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{a}{c} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{a}{c}.}$$

- Ensuite, deux cas se présentent :
  × si $c > 0$, alors :
    - ▶ d'une part : $\displaystyle\lim_{x \to (-\frac{d}{c})^-} (cx+d) = 0^-$ et $\displaystyle\lim_{x \to (-\frac{d}{c})^+} (cx+d) = 0^+$.
    - ▶ d'autre part : $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{d}{c}} (ax+b) = -\frac{ad}{c} + b$.

Trois cas se présentent alors.

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b>0$, alors : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=+\infty$.

  On remarque de plus :

$$\begin{aligned} -\frac{ad}{c}+b &> 0 \\ \Leftrightarrow\quad -ad+bc &> 0 \qquad \textit{(car } c>0\textit{)} \\ \Leftrightarrow\quad 0 &> ad-bc \end{aligned}$$

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b<0$, alors : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=-\infty$.

  On remarque de plus :

$$\begin{aligned} -\frac{ad}{c}+b &< 0 \\ \Leftrightarrow\quad -ad+bc &< 0 \qquad \textit{(car } c>0\textit{)} \\ \Leftrightarrow\quad 0 &< ad-bc \end{aligned}$$

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b=0$, alors : $b=\dfrac{ad}{c}$. Donc, pour tout $x\in\mathcal{D}_{a,b,c,d}$:

$$f(x) = \frac{ax+\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{\frac{cax+ad}{c}}{cx+d} = \frac{a\,\cancel{(cx+d)}}{c\,\cancel{(cx+d)}} = \frac{a}{c}$$

  On en déduit dans ce cas : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=\dfrac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=\dfrac{a}{c}$.

× si $c<0$, alors :

▸ d'une part : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} (cx+d)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} (cx+d)=0^-$

▸ d'autre part : $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}} (ax+b)=-\dfrac{ad}{c}+b$.

Trois cas se présentent alors.

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b>0$, alors : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=-\infty$.

  On remarque de plus :

$$\begin{aligned} -\frac{ad}{c}+b &> 0 \\ \Leftrightarrow\quad -ad+bc &< 0 \qquad \textit{(car } c<0\textit{)} \\ \Leftrightarrow\quad 0 &< ad-bc \end{aligned}$$

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b<0$, alors : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=+\infty$.

  On remarque de plus :

$$\begin{aligned} -\frac{ad}{c}+b &< 0 \\ \Leftrightarrow\quad -ad+bc &> 0 \qquad \textit{(car } c<0\textit{)} \\ \Leftrightarrow\quad 0 &> ad-bc \end{aligned}$$

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b=0$, alors avec le même raisonnement que dans le cas $c>0$, on obtient : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=\dfrac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=\dfrac{a}{c}$.

$$\boxed{\text{Finalement, si } ad-bc>0, \text{ alors : } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=-\infty.}$$

$$\boxed{\text{Si } ad-bc<0, \text{ alors : } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=+\infty.}$$

$$\boxed{\text{Si } ad-bc=0, \text{ alors : } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=\frac{a}{c} \text{ et } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=\frac{a}{c}.}$$

□

6. Démontrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et montrer que sa dérivée est de la forme :

$$f' : x \mapsto \frac{ad-bc}{h(x)}$$

où h est une fonction que l'on explicitera.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ car elle est le quotient $f=\dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - × $f_1 : x\mapsto ax+b$ qui est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $f_2 : x\mapsto cx+d$ qui :
    - est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ en tant que fonction polynomiale,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_{a,b,c,d}.}$$

- Soit $x\in\mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

$$f'(x) \;=\; \frac{a\times(cx+d)-(ax+b)\times c}{(cx+d)^2} \;=\; \frac{\cancel{acx}+ad-\cancel{acx}-bc}{(cx+d)^2} \;=\; \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } f' : x\mapsto \frac{ad-bc}{h(x)} \text{ où la fonction } h \text{ est définie par } h : x\mapsto (cx+d)^2.}$$

□

7. Déterminer la monotonie de f. *On distinguera trois cas.*

Démonstration.
Trois cas se présentent.

- Si $ad-bc>0$, alors :

$$f(x) \;=\; \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \;>\; 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } ad-bc>0, \text{ la fonction } f \text{ est donc strictement croissante}\\ \text{sur }]-\infty,-\frac{d}{c}[\text{ et sur }]-\frac{d}{c},+\infty[.\end{array}}$$

- Si $ad-bc=0$, alors :

$$f(x) \;=\; \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \;=\; 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } ad-bc=0, \text{ la fonction } f \text{ est donc constante}\\ \text{sur }]-\infty,-\frac{d}{c}[\text{ et sur }]-\frac{d}{c},+\infty[.\end{array}}$$

- Si $ad - bc < 0$, alors :

$$f(x) \quad = \quad \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} \quad < \quad 0$$

$$\boxed{\text{Si } ad - bc < 0 \text{, la fonction } f \text{ est donc strictement décroissante sur }]-\infty, -\tfrac{d}{c}[\text{ et sur }]-\tfrac{d}{c}, +\infty[.}$$

☐

8. On considère le cas particulier : $ad - bc > 0$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

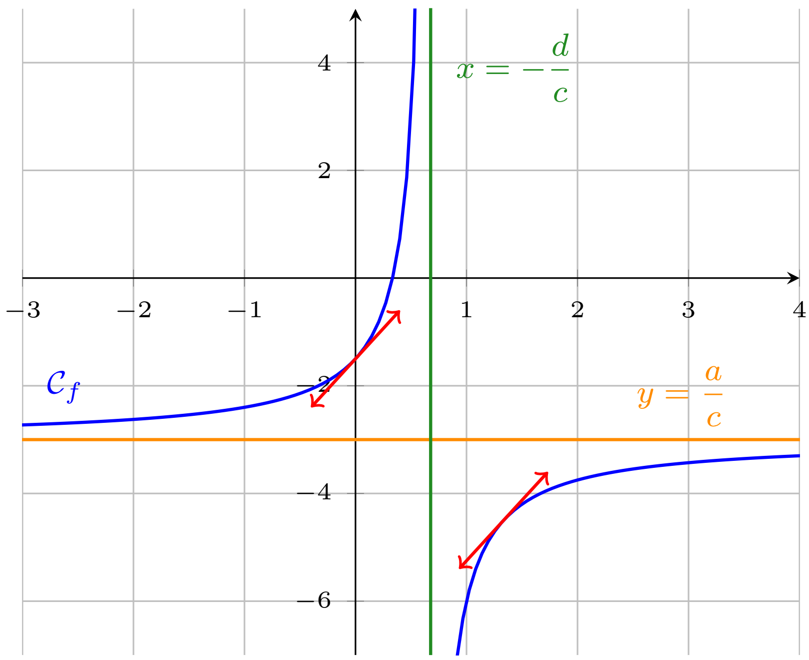
Démonstration.
Avec les questions ***5.*** et ***7.***, on en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	‖	$+$
Variations de f	$\frac{a}{c} \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow \frac{a}{c}$

☐

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.



☐

9. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}, \quad f(x) \ = \ \frac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$$

On exprimera α, β et γ en fonction de a, b, c et d.

Démonstration.

- Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$. On remarque :
  - × d'une part :
  $$\frac{\alpha}{x-\beta} + \gamma \ = \ \frac{\alpha + \gamma\,(x-\beta)}{x-\beta} \ = \ \frac{\alpha + \gamma\,x - \gamma\,\beta}{x-\beta} \ = \ \frac{\gamma\,x + (\alpha - \gamma\,\beta)}{x-\beta}$$
  - × d'autre part :
  $$f(x) \ = \ \frac{ax+b}{cx+d} \ = \ \frac{ax+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} \ = \ \frac{\frac{ax+b}{c}}{x+\frac{d}{c}} \ = \ \frac{\frac{a}{c}\,x + \frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}$$
- On pose alors :
  - × $\beta \ = \ -\dfrac{d}{c}$
  - × $\gamma \ = \ \dfrac{a}{c}$
  - × $\alpha \ = \ \dfrac{b}{c} + \gamma\,\beta \ = \ \dfrac{b}{c} + \dfrac{a}{c} \times \left(-\dfrac{d}{c}\right) \ = \ \dfrac{b}{c} - \dfrac{ad}{c^2} \ = \ \dfrac{bc-ad}{c^2}$
- Vérifions qu'on obtient bien l'égalité souhaitée. Soit $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{x-\beta} + \gamma \ &= \ \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c} \\
&= \ \frac{bc-ad}{c^{\cancel{2}}\left(\frac{cx+d}{\cancel{c}}\right)} + \frac{a}{c} \\
&= \ \frac{bc-ad}{c\,(cx+d)} + \frac{a}{c} \\
&= \ \frac{bc-ad}{c\,(cx+d)} + \frac{a\,(cx+d)}{c\,(cx+d)} \\
&= \ \frac{bc - \cancel{ad} + acx + \cancel{ad}}{c\,(cx+d)} \\
&= \ \frac{\cancel{c}\,(ax+b)}{\cancel{c}\,(cx+d)} \\
&= \ f(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, en posant } \alpha = \dfrac{bc-ad}{c^2},\ \beta = -\dfrac{d}{c} \text{ et } \gamma = \dfrac{a}{c}, \text{ on obtient :} \\ \forall x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d},\ f(x) = \dfrac{\alpha}{x-\beta} + \gamma.\end{array}}$$

□

10. En supposant connue la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$, où α est le réel déterminé en question précédente, comment retrouve-t-on la représentation graphique de la question ***8.b)*** ?

Démonstration.

- Tout d'abord, on obtient la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta}$ à partir de celle de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$ en effectuant une translation de vecteur $(\beta, 0)$.
- Ensuite, on obtient la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$ à partir de celle de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta}$ en effectuant une translation de vecteur $(0, \gamma)$.

Finalement, on obtient la courbe représentative de la fonction f à partir de celle de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$ en effectuant une translation de vecteur $(\beta, \gamma) = \left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$.

□

Dans toute la fin de l'exercice, on suppose : $ad - bc \neq 0$.

11. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$. *On exprimera x en fonction de y.*

Démonstration.
Soit $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{ax+b}{cx+d} \\
&\Leftrightarrow \quad y\,(cx+d) = ax+b \\
&\Leftrightarrow \quad cy\,x + dy = ax+b \\
&\Leftrightarrow \quad (cy-a)\,x = -dy+b \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{-dy+b}{cy-a} \qquad \textit{(car, comme } y \neq \frac{a}{c}\textit{, alors : } cy-a \neq 0\textit{)}
\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $y = f(x)$ sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ est : $\dfrac{-dy+b}{cy-a}$.

□

12. En déduire que f est bijective sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et déterminer sa bijection réciproque.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$. Autrement dit :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\},\ \exists! x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d},\ y = f(x)$$

Ceci est la définition de « la fonction f réalise une bijection de $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ ».

La fonction f réalise une bijection de $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

- On sait de plus, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$\boxed{\text{On en déduit, d'après la question précédente, } f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \to & \mathcal{D}_{a,b,c,d} \\ x & \mapsto & \dfrac{-dx+b}{cx-a} \end{array} \right.}$$

Commentaire

- Nous avons ainsi démontré que, dans le cas où $c \neq 0$, toute fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est bijective, de bijection réciproque :

$$f^{-1} : x \mapsto \frac{-dx+b}{cx-a}$$

- Nous avons donc en particulier démontré que la bijection réciproque d'une fonction homographique est une fonction homographique.

□

13. Peut-on répondre à la question ***11.*** lorsque $y = \dfrac{a}{c}$?

Démonstration.
Supposons : $y = \dfrac{a}{c}$. Soit $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) & \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{ax+b}{cx+d} \\ & \Leftrightarrow \frac{a}{c}\,(cx+d) = ax+b \\ & \Leftrightarrow a\,(cx+d) = c\,(ax+b) \\ & \Leftrightarrow \cancel{acx} + ad = \cancel{acx} + bc \\ & \Leftrightarrow ad - bc = 0 \end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé, on se place depuis la question ***11.*** dans le cas où : $ad - bc \neq 0$.

$$\boxed{\text{Dans le cas où } y = \frac{a}{c}, \text{ l'équation } y = f(x) \text{ n'admet pas de solution sur } \mathcal{D}_{a,b,c,d}.}$$

Commentaire

- On vient en fait de démontrer que le réel $\dfrac{a}{c}$ n'admet pas d'antécédent par f.
- Cela n'est pas surprenant au regard de la question ***8.a)*** où l'on constate que le réel $\dfrac{a}{c}$ n'est pas atteint par la fonction f (il s'agit seulement de la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$).

□