DS3

> ⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 2. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

2. Soient E, F, G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.
Soient B_1 et B_2 des parties de F.

a) Démontrer :
$$g \circ f \text{ est injective} \quad \Rightarrow \quad f \text{ injective}$$

b) Démontrer :
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

c) Démontrer que f est injective si et seulement si $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}\big(f(X)\big) = X$.

3. ***a)*** Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^4(x)$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx$.

4. ***a)*** $(*)$ Écrire à l'aide de **Python** une fonction `occurences` prenant en paramètre deux variables `a` et `s` et renvoyant le nombre d'occurences d'un caractère `a` dans une chaîne de caractères `s`.

b) $(*)$ Écrire une fonction `dico_alphabet` qui prend en paramètre une chaîne de caractère `texte` et qui renvoie un dictionnaire qui associe à chaque lettre de l'alphabet le nombre de fois où elle apparaît dans `texte`.

c) Expliquer ce que permet de faire la fonction **Python** suivante.

```python
def mystere(chaine, message) :
    n = len(message)
    m = len(chaine)
    compteur = 0
    for i in range(n) :
        j = 1
        if message[i] == chaine[0] :
            while i + j < n and j < m and message[i+j] == chaine[j] :
                j += 1
        if j == m :
            compteur += 1
    return compteur
```

Exercice 2

1. Déterminer, pour tout $x \in \,]-\pi, \pi[$, le module et un argument du nombre complexe $\mathrm{e}^{ix} + 1$.

2. Démontrer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\mathrm{e}^{ix} + 1\right)^n \;=\; 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{nx}{2}}$$

3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \;=\; 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

4. ***a)*** Simplifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(k \times 0)$ et $\cos(k \times \pi)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression simple des sommes suivantes à l'aide de la question ***3.***

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$A_n \;=\; \sum_{p \in P_n} \binom{n}{p} \qquad B_n \;=\; \sum_{p \in Q_n} \binom{n}{p} \qquad C_n \;=\; \sum_{p \in R_n} \binom{n}{p}$$

où :

- × $P_n = \{3k \mid k \in \mathbb{N} \ \texttt{ET} \ 0 \leqslant 3k \leqslant n\}$,
- × $Q_n = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{N} \ \texttt{ET} \ 0 \leqslant 3k+1 \leqslant n\}$.
- × $R_n = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{N} \ \texttt{ET} \ 0 \leqslant 3k+2 \leqslant n\}$.

5. Déterminer P_7, Q_7 et R_7, puis $P_7 \cup Q_7 \cup R_7$.

6. À l'aide d'une sommation par paquets, justifier : $A_n + B_n + C_n = 2^n$.

7. On pose : $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$j^{3k} = 1, \qquad j^{3k+1} = j, \qquad j^{3k+2} = \overline{j}$$

b) En déduire : $\forall p \in P_n$, $j^p = 1$. Que dire si $p \in Q_n$? si $p \in R_n$?

8. ***a)*** En utilisant le résultat de la question ***2.***, démontrer :

$$2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}} \;=\; A_n + j\, B_n + \overline{j}\, C_n$$

b) Déterminer une formule analogue pour $A_n + \overline{j}\, B_n + j\, C_n$.

9. ***a)*** Que vaut $1 + j + \overline{j}$?

b) En déduire :

$$A_n \;=\; \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

*Indication : on pourra sommer les relations trouvées aux questions **5.**, **8.a)** et **8.b)**.*

Exercice 3

On considère que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
L'objectif de cet exercice est de démontrer que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés. On en profitera pour démontrer quelques relations faisant intervenir ces trois points.
On rappelle que :

- l'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection des hauteurs du triangle,
- le cercle circonscrit à un triangle est l'unique cercle passant par les sommets du triangle,
- le centre de gravité du triangle est le point d'intersection des médianes du triangle (les médianes d'un triangle sont les droites reliant le milieu d'un côté au sommet opposé à ce côté).

Partie I : Cas où le cercle circonscrit est centré en O

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Soient A, B et C trois points du plan complexe deux à deux distincts et non alignés.
On note a (resp. b, resp. c) l'affixe du point A (resp. B, resp. C).

On suppose dans cette partie seulement que les points A, B et C appartiennent au cercle $\mathcal{C}_0$ de centre O et de rayon R.

1. On note :
- × I_1 le milieu du segment $[AB]$ d'affixe m_1,
- × I_2 le milieu du segment $[BC]$ d'affixe m_2,
- × I_3 le milieu du segment $[AC]$ d'affixe m_3.

Exprimer m_1, m_2 et m_3 en fonction de a, b et c.

2. Justifier qu'il existe $(\theta_A, \theta_B, \theta_C) \in [0, 2\pi[^3$ tel que :

$$a = R\,\mathrm{e}^{i\theta_A}, \qquad b = R\,\mathrm{e}^{i\theta_B} \qquad \text{et} \qquad c = R\,\mathrm{e}^{i\theta_C}$$

3. On note H le point d'affixe $h = a + b + c$ et z le nombre complexe vérifiant : $z = \dfrac{h-c}{b-a}$.

a) Démontrer :

$$z = i\,\frac{\cos\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right)}$$

b) Supposons : $H \neq C$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CH) ?

c) En faisant le même raisonnement pour les droites (BC) et (AH), puis pour les droites (AC) et (BH), déterminer ce que représente le point H pour le triangle ABC.

4. On note G le point d'affixe $g = \dfrac{a+b+c}{3}$.

a) Montrer que G appartient à la droite (AI_2).

b) Démontrer de même que G appartient aux droites (CI_1) et (BI_3).

c) Que représente G pour le triangle ABC ? Quelle relation a-t-on entre les longueurs AG et AI_2 ?

5. Conclure que les points O, G et H sont alignés et déterminer une relation entre les longueurs OG et OH.

Partie II : Cas général

Soient A, B et C trois points du plan complexe deux à deux distincts et non alignés, d'affixes respectives a, b et c.

On ne considère plus que les points A, B et C appartiennent à un cercle de centre O.

6. **On admet** dans cette question qu'il existe un cercle circonscrit au triangle ABC et qu'il est unique. On note Ω son centre et R son rayon.
On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$. On note A', B' et C' les images respectives de A, B et C par cette translation.

a) Déterminer les affixes des points A', B' et C', ainsi que celles de l'orthocentre et du centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

b) Montrer que, dans ce cas général, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC sont alignés.

7. On cherche maintenant à démontrer l'assertion admise précédemment : il existe un unique cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Justifier que, s'il existe un cercle passant par les points A, B et C, alors son centre Ω d'affixe ω et son rayon R vérifient :

$$R \ = \ |\omega - a| \ = \ |\omega - b| \ = \ |\omega - c|$$

b) Montrer qu'il existe un unique cercle passant par les points A, B et C. On montrera que l'affixe de son centre Ω est :

$$\omega \ = \ b + \frac{a-b}{2}\left(1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right)$$

Exercice 4

Partie I : Convexité

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. On souhaite démontrer dans cette partie :

$$\forall t \in [0,1], \quad \mathrm{e}^{ta+(1-t)b} \ \leqslant \ t\,\mathrm{e}^a + (1-t)\,\mathrm{e}^b \qquad (*)$$

On note g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g : t \mapsto t\,\mathrm{e}^a + (1-t)\,\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{ta+(1-t)b}$.

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

2. Démontrer que la fonction g est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1], \quad g'(t) \ = \ \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b - (a-b)\,\mathrm{e}^{ta+(1-t)b}$$

3. Déterminer g''. En déduire que la fonction g' est strictement décroissante sur $[0,1]$.

4. *a)* Démontrer, à l'aide de la question ***1.*** : $g'(0) \geqslant 0$.

b) Déterminer le signe de $g'(1)$.

5. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que : $g'(\alpha) = 0$.

6. Dresser le tableau de variations complet de g.

7. Conclure quant à la question posée.

Partie II : Inégalité arithmético-géométrique

On souhaite démontrer dans cette partie, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp(x_k) \qquad (**)$$

8. En utilisant le résultat $(*)$ de la partie précédente pour $t = \dfrac{1}{2}$, démontrer le résultat $(**)$ demandé pour $n = 2$.

9. Pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, pour tout $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, démontrer, toujours en utilisant $(*)$ pour une valeur de t bien choisie :

$$\exp\left(\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right) \leqslant \frac{n}{n+1} \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n+1} e^{x_{n+1}}$$

10. Démontrer le résultat $(**)$.

11. *Application.* Démontrer, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Exercice 5

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$ suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)\, f(y) + f(x + y) = xy$$

1. **Dans cette question seulement**, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

a) Justifier : $\big(f(0)\big)^2 + f(0) = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?

b) On suppose dans cette question : $f(0) = 0$. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

c) On suppose dans cette question : $f(0) = -1$.

(i) Démontrer que $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$.

(ii) Démontrer que, si $f(1) = 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t - 1$.

(iii) Démontrer que, si $f(-1) = 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = -t - 1$.

2. Conclure quant au problème posé dans cette exercice.