DS3 /125

On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 2. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /30

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

2. Soient E, F, G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.
Soient B_1 et B_2 des parties de F.

a) Démontrer :

$$g \circ f \text{ est injective} \quad \Rightarrow \quad f \text{ injective}$$

- **1 pt : structures de démonstration**
- **1 pt : utilisation de l'injectivité de $g \circ f$.**

b) Démontrer :

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

- **1 pt :** $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
- **1 pt :** $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

c) Démontrer que f est injective si et seulement si $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}\big(f(X)\big) = X$.

- **1 pt : structures de démonstration**
- **2 pts :** $(\Rightarrow)$
- **2 pts :** $(\Leftarrow)$

3. *a)* Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^4(x)$.

- **1 pt :** $\cos^4(x) = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{2^4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4 = \dfrac{1}{2^4}\left(e^{4ix} + 4\,e^{2ix} + 6 + 4\,e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$
- **1 pt :** $\cos^4(x) = \dfrac{1}{8}\big(\cos(4x) + 4\ \cos(2x) + 3\big)$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx$.

- **1 pt : La fonction $x \mapsto \cos^4(x)$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.**
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx$ est donc bien définie.
- **1 pt : linéarité de l'intégrale**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx = \frac{1}{8}\left(\left[\ \frac{1}{4}\ \sin(4x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\ \left[\ \frac{1}{2}\ \sin(2x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\ [\ x\ ]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx = \frac{3\pi}{16}$

4. a) ($*$) Écrire à l'aide de **Python** une fonction `occurences` prenant en paramètre deux variables `a` et `s` et renvoyant le nombre d'occurences d'un caractère `a` dans une chaîne de caractères `s`.

- **1 pt : structure de fonction**
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : structure itérative**
- **1 pt : structure conditionnelle**
- **1 pt : mise à jour** `compteur`

```python
def occurences(a, s) :
    compteur = 0
    for caract in s :
        if caract == a :
            compteur = compteur + 1
    return compteur
```

b) ($*$) Écrire une fonction `dico_alphabet` qui prend en paramètre une chaîne de caractère `texte` et qui renvoie un dictionnaire qui associe à chaque lettre de l'alphabet le nombre de fois où elle apparaît dans `texte`.

- **1 pt : définition** `alphabet`
- **1 pt : définition** `dico` **par compréhension**

```python
def dico_alphabet(texte) :
    alphabet = 'abcdefghijklmnopqrstuvwxyz'
    dico = {lettre : occurences(lettre, texte) for lettre in alphabet}
    return dico
```

c) Expliquer ce que permet de faire la fonction **Python** suivante.

- **3 pts : L'appel** `mystere(chaine, message)` **permet donc de déterminer le nombre d'occurences d'une la chaîne de caractères** `chaine` **dans la chaîne de caractères** `message`**.**
  (dont 1 pt pour la réponse sans explications)

Exercice 2 /29

1. Déterminer, pour tout $x \in \,]-\pi, \pi[$, le module et un argument du nombre complexe $\mathrm{e}^{ix} + 1$.

- **1 pt :** $\mathbf{e}^{ix} + 1 = \mathbf{e}^{i\,\frac{x}{2}} \times 2\,\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
- **1 pt :** $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$

2. Démontrer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\mathrm{e}^{ix} + 1\right)^n \;=\; 2^n\,\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{i\,\frac{nx}{2}}$$

- **1 pt**

3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,\cos(kx) \;=\; 2^n\,\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

- **1 pt : linéarité de** $\mathrm{Re}\,(\cdot)$
- **1 pt : formule du binôme de Newton**
- **1 pt : reste**

4. ***a)*** Simplifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(k \times 0)$ et $\cos(k \times \pi)$.

- **1 pt :** $\cos(k \times 0) = 1$
- **1 pt :** $\cos(k \times \pi) = (-1)^k$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression simple des sommes suivantes à l'aide de la question ***3.***

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$A_n \;=\; \sum_{p \in P_n} \binom{n}{p} \qquad B_n \;=\; \sum_{p \in Q_n} \binom{n}{p} \qquad C_n \;=\; \sum_{p \in R_n} \binom{n}{p}$$

où :

× $P_n = \{3k \mid k \in \mathbb{N} \;\; \texttt{ET} \;\; 0 \leqslant 3k \leqslant n\}$,
× $Q_n = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{N} \;\; \texttt{ET} \;\; 0 \leqslant 3k+1 \leqslant n\}$.
× $R_n = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{N} \;\; \texttt{ET} \;\; 0 \leqslant 3k+2 \leqslant n\}$.

5. Déterminer P_7, Q_7 et R_7, puis $P_7 \cup Q_7 \cup R_7$.

- **1 pt :** $P_7 = \{0, 3, 6\}$**,** $Q_7 = \{1, 4, 7\}$ **et** $R_7 = \{2, 5\}$
- **1 pt :** $P_7 \cup Q_7 \cup R_7 = [\![0, 7]\!]$

6. À l'aide d'une sommation par paquets, justifier : $A_n + B_n + C_n = 2^n$.

- **1 pt :** $A_n + B_n + C_n = \displaystyle\sum_{p \in P_n \cup Q_n \cup R_n} \binom{n}{p}$
- **1 pt :** $P_n \cup Q_n \cup R_n = [\![0, n]\!]$

7. On pose : $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$j^{3k} = 1, \qquad j^{3k+1} = j, \qquad j^{3k+2} = \overline{j}$$

- **1 pt :** $j^{3k} = 1$
- **1 pt :** $j^{3k+1} = j$
- **1 pt :** $\overline{j} = j^2$

b) En déduire : $\forall p \in P_n,\ j^p = 1$. Que dire si $p \in Q_n$? si $p \in R_n$?

- **1 pt**

8. ***a)*** En utilisant le résultat de la question ***2.***, démontrer :

$$2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}} \;=\; A_n + j\, B_n + \overline{j}\, C_n$$

- **1 pt :** $2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathbf{e}^{i\,\frac{n\pi}{3}} = (j+1)^n$ **(d'après *2.* appliquée à** $x = \dfrac{2\pi}{3}$**)**
- **1 pt :** $(j+1)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} j^p$
- **1 pt :** $(j+1)^n = \displaystyle\sum_{p \in P_n} \binom{n}{p} j^p + \sum_{p \in Q_n} \binom{n}{p} j^p + \sum_{p \in R_n} \binom{n}{p} j^p$
- **1 pt : reste**

b) Déterminer une formule analogue pour $A_n + \overline{j}\, B_n + j\, C_n$.

- **1 pt :** $2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathbf{e}^{-i\,\frac{n\pi}{3}} \;=\; (\overline{j}+1)^n$
- **1 pt : calculs de** j^p
- **1 pt :** $2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathbf{e}^{-i\frac{n\pi}{3}} = A_n + \overline{j}\, B_n + j\, C_n$

9. ***a)*** Que vaut $1 + j + \overline{j}$?

- **1 pt :** $1 + j + \overline{j} = 0$

b) En déduire :

$$A_n \;=\; \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

*Indication : on pourra sommer les relations trouvées aux questions **5.**, **8.a)** et **8.b)**.*

- **1 pt : D'après les questions *5.*, *8.a)* et *8.b)* :**

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} A_n & + & B_n & + & C_n & = & 2^n \\ A_n & + & j\, B_n & + & \overline{j}\, C_n & = & 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathbf{e}^{i\frac{n\pi}{3}} \\ A_n & + & \overline{j}\, B_n & + & j\, C_n & = & 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathbf{e}^{-i\frac{n\pi}{3}} \end{array}\right.$$

- **1 pt : On effectue alors l'opération** $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$**. On obtient :**

$$3\, A_n + \left(1 + j + \overline{j}\right) B_n + \left(1 + \overline{j} + j\right) C_n \;=\; 2^n \left(1 + \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathbf{e}^{i\,\frac{n\pi}{3}} + \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathbf{e}^{-i\,\frac{n\pi}{3}}\right)$$

- **1 pt : reste du calcul**

Exercice 3 /30

On considère que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
L'objectif de cet exercice est de démontrer que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés. On en profitera pour démontrer quelques relations faisant intervenir ces trois points.
On rappelle que :

- l'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection des hauteurs du triangle,
- le cercle circonscrit à un triangle est l'unique cercle passant par les sommets du triangle,
- le centre de gravité du triangle est le point d'intersection des médianes du triangle (les médianes d'un triangle sont les droites reliant le milieu d'un côté au sommet opposé à ce côté).

Partie I : Cas où le cercle circonscrit est centré en O

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Soient A, B et C trois points du plan complexe deux à deux distincts et non alignés.
On note a (resp. b, resp. c) l'affixe du point A (resp. B, resp. C).

On suppose dans cette partie seulement que les points A, B et C appartiennent au cercle $\mathcal{C}_0$ de centre O et de rayon R.

1. On note :
- × I_1 le milieu du segment $[AB]$ d'affixe m_1,
- × I_2 le milieu du segment $[BC]$ d'affixe m_2,
- × I_3 le milieu du segment $[AC]$ d'affixe m_3.

Exprimer m_1, m_2 et m_3 en fonction de a, b et c.

- **1 pt**

2. Justifier qu'il existe $(\theta_A, \theta_B, \theta_C) \in [0, 2\pi[^3$ tel que :

$$a = R\,e^{i\theta_A}, \qquad b = R\,e^{i\theta_B} \qquad \text{et} \qquad c = R\,e^{i\theta_C}$$

- **1 pt : définition écriture exponentielle**
- **1 pt : modules égaux à R**

3. On note H le point d'affixe $h = a + b + c$ et z le nombre complexe vérifiant : $z = \dfrac{h-c}{b-a}$.

a) Démontrer :

$$z = i\,\frac{\cos\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}$$

- **1 pt :** $z = \dfrac{R\,e^{i\theta_A} + R\,e^{i\theta_B}}{R\,e^{i\theta_B} - R\,e^{i\theta_A}}$
- **1 pt :** $z = \dfrac{\cancel{e^{i\frac{\theta_A+\theta_B}{2}}}\left(e^{i\frac{\theta_A-\theta_B}{2}} + e^{-i\frac{\theta_A-\theta_B}{2}}\right)}{\cancel{e^{i\frac{\theta_B+\theta_A}{2}}}\left(e^{i\frac{\theta_B-\theta_A}{2}} - e^{-i\frac{\theta_B-\theta_A}{2}}\right)}$
- **1 pt : fin du calcul**

b) Supposons : $H \neq C$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CH) ?

- **1 pt :** $z \in i\,\mathbb{R}$ **donc** $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
- **1 pt :** (AB) **et** (CH) **perpendiculaires**

c) En faisant le même raisonnement pour les droites (BC) et (AH), puis pour les droites (AC) et (BH), déterminer ce que représente le point H pour le triangle ABC.

- **1 pt : en notant** $w = \dfrac{h-a}{b-c}$**, on obtient que** (AH) **et** (CB) **sont perpendiculaires**
- **1 pt : en posant** $u = \dfrac{h-b}{c-a}$**, on obtient que** (BH) **et** (AC) **sont perpendicualires**
- **1 pt :** H **est l'orthocentre du triangle** ABC

4. On note G le point d'affixe $g = \dfrac{a+b+c}{3}$.

a) Montrer que G appartient à la droite (AI_2).

- **1 pt :** $\dfrac{g-a}{m_2-a} = \dfrac{2}{3}$
- **1 pt :** $\dfrac{g-a}{m_2-a} \in \mathbb{R}$. **D'où :** $\arg\left(\dfrac{g-a}{m_2-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$. **Les points** G**,** A **et** I_2 **sont donc alignés.**

b) Démontrer de même que G appartient aux droites (CI_1) et (BI_3).

- **1 pt : même raisonnement avec** $\dfrac{g-c}{m_1-c}$ **pour montrer que** $G \in (CI_1)$
- **1 pt : même raisonnement avec** $\dfrac{g-b}{m_3-b}$ **pour montrer que** $G \in (BI_3)$

c) Que représente G pour le triangle ABC ? Quelle relation a-t-on entre les longueurs AG et AI_2 ?

- **1 pt :** G **est le centre de gravité du triangle** ABC
- **1 pt :** $AG = \dfrac{2}{3}\ AI_2$

5. Conclure que les points O, G et H sont alignés et déterminer une relation entre les longueurs OG et OH.

- **1 pt :** $\dfrac{g-0}{h-0} = \dfrac{1}{3}$ **donc... Ainsi** O**,** G **et** H **sont alignés**
- **1 pt :** $OG = \dfrac{1}{3}\ OH$

Partie II : Cas général

Soient A, B et C trois points du plan complexe deux à deux distincts et non alignés, d'affixes respectives a, b et c.

On ne considère plus que les points A**,** B **et** C **appartiennent à un cercle de centre** O**.**

6. **On admet** dans cette question qu'il existe un cercle circonscrit au triangle ABC et qu'il est unique. On note Ω son centre d'affixe ω et R son rayon.
On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$. On note A', B' et C' les images respectives de A, B et C par cette translation.

a) Déterminer les affixes des points A', B' et C', ainsi que celles de l'orthocentre et du centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

- **1 pt : les points A', B' et C' ont pour affixes respectives $a - \omega$, $b - \omega$ et $c - \omega$**
- **1 pt : $g' = \dfrac{a+b+c}{3} - \omega$ et $h' = a + b + c - 3\omega$**
- **1 pt : $OA' = OB' = OC' = R$**

b) Montrer que, dans ce cas général, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC sont alignés.

- **1 pt : $g = \dfrac{a+b+c}{3}$ et $h = a + b + c - 2\omega$**
- **1 pt : $\dfrac{g-\omega}{h-\omega} = \dfrac{1}{3}$, donc... Ainsi les points Ω, G et H sont alignés**

7. On cherche maintenant à démontrer l'assertion admise précédemment : il existe un unique cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Justifier que, s'il existe un cercle passant par les points A, B et C, alors son centre Ω d'affixe ω et son rayon R vérifient :

$$R \;=\; |\omega - a| \;=\; |\omega - b| \;=\; |\omega - c|$$

- **1 pt**

b) Montrer qu'il existe un unique cercle passant par les points A, B et C. On montrera que l'affixe de son centre Ω est :

$$\omega \;=\; b + \frac{a-b}{2}\left(1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right)$$

- **1 pt : structure de raisonnement par analyse-synthèse**
- **4 pts : reste**
  toute prise d'initiative pertinente sera valorisée

Exercice 4 /25

Partie I : Convexité

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. On souhaite démontrer dans cette partie :

$$\forall t \in [0,1], \quad e^{ta+(1-t)b} \leqslant t\,e^a + (1-t)\,e^b \qquad (*)$$

On note g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g : t \mapsto t\,e^a + (1-t)\,e^b - e^{ta+(1-t)b}$.

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$.

- **1 pt : La fonction $h : x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative se situe donc au dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0.**
- **1 pt : cette tangente est la droite d'équation :** $y = 1+x$

2. Démontrer que la fonction g est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1], \quad g'(t) = e^a - e^b - (a-b)\,e^{ta+(1-t)b}$$

- **1 pt : la fonction $\varphi : t \mapsto e^{ta+(1-t)b}$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ car...**
- **1 pt : calcul de g'**

3. Déterminer g''. En déduire que la fonction g' est strictement décroissante sur $[0,1]$.

- **1 pt :** $\forall t \in [0,1]$, $g''(t) = -(a-b)^2\, e^{ta+(1-t)b}$
- **1 pt :** $\forall t \in [0,1]$, $g''(t) < 0$ **donc g' strictement décroissante sur** $[0,1]$

4. ***a)*** Démontrer, à l'aide de la question ***1.*** : $g'(0) \geqslant 0$.

- **1 pt : d'après *1.* appliqué à $x = a-b$...**
- **1 pt :** $g'(0) = e^b\big(e^{a-b} - 1 - (a-b)\big) \geqslant 0$

b) Déterminer le signe de $g'(1)$.

- **1 pt : application de *1.* à $x = b-a$**

5. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que : $g'(\alpha) = 0$.

- **1 pt : hypothèses théorème de la bijection**
- **1 pt :** $g'\big([0,1]\big) = [g'(1), g'(0)]$
- **1 pt :** $0 \in [g'(1), g'(0)]$ **d'après *4.a)* et *4.b)***

6. Dresser le tableau de variations complet de g.

- **1 pt : tableau de variations**

x	0		α		1
Signe de $g''(x)$		$-$		$-$	
Variations de g'	$g'(0)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g'(1)$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

- **1 pt :** $g(0) = g(1) = 0$
- **1 pt :** $\begin{cases} \forall t \in [0, \alpha],\ \ g'(t) \geqslant g'(\alpha) = 0 \\ \forall t \in \,]\alpha, 1],\ \ g'(t) \leqslant g'(\alpha) = 0 \end{cases}$

7. Conclure quant à la question posée.

- **1 pt : explications** $\forall t \in [0, 1]$**,** $g(t) \geqslant 0$

Partie II : Inégalité arithmético-géométrique

On souhaite démontrer dans cette partie, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \ \leqslant\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp(x_k) \qquad (**)$$

8. En utilisant le résultat $(*)$ de la partie précédente pour $t = \dfrac{1}{2}$, démontrer le résultat $(**)$ demandé pour $n = 2$.

- **1 pt**

9. Pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, démontrer, toujours en utilisant $(*)$ pour une valeur de t bien choisie :

$$\exp\left(\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right) \ \leqslant\ \frac{n}{n+1}\ \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n+1}\ \mathrm{e}^{x_{n+1}}$$

- **1 pt : application de** $(*)$ **à** $t = \dfrac{n}{n+1}$**,** $a = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ **et** $b = x_{n+1}$

10. Démontrer le résultat $(**)$.

- **1 pt : initialisation**
- **4 pts : hérédité**
  × **1 pt : quantification de** $(x_1, \dots, x_{n+1})$
  × **3 pts : reste**

11. *Application.* Démontrer, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \ \leqslant\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- **2 pts : application de** $(**)$ **avec** $x_k = \ln(a_k)$

Exercice 5 /11

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$ suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)\,f(y) + f(x+y) \ = \ xy$$

1. **Dans cette question seulement**, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

a) Justifier : $\big(f(0)\big)^2 + f(0) = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?

- **1 pt :** $\big(f(0)\big)^2 + f(0) = 0$
- **1 pt :** $f(0) = 0$ `OU` $f(0) = -1$

b) On suppose dans cette question : $f(0) = 0$. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

- **1 pt : application de** $(*)$ **à** $x = x$ **et** $y = 0$

c) On suppose dans cette question : $f(0) = -1$.

(i) Démontrer que $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$.

- **1 pt : application de** $(*)$ **à** $x = 1$ **et** $y = -1$

(ii) Démontrer que, si $f(1) = 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t - 1$.

- **1 pt : structure de démonstration d'une implication**
- **1 pt : application de** $(*)$ **à** $x = t - 1$ **et** $y = 1$

(iii) Démontrer que, si $f(-1) = 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = -t - 1$.

- **1 pt : application de** $(*)$ **à** $x = t + 1$ **et** $y = -1$

2. Conclure quant au problème posé dans cet exercice.

- **1 pt : structure de l'analyse-synthèse**
- **1 pt : analyse**
- **2 pts : synthèse : seules** $x \mapsto x - 1$ **et** $x \mapsto -x - 1$ **sont solutions**