DS3

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 2. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Démonstration.
Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : (u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$.

- **Initialisation** :
  - × D'une part : $(u+v)^0 = 1$.
  - × D'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u^k\, v^{0-k} = \binom{0}{0} u^0\, v^0 = 1$.

  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $(u+v)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{(n+1)-k}$).

$$
\begin{aligned}
& (u+v)^{n+1} \\
= \ & (u+v)\,(u+v)^n \\
= \ & (u+v) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= \ & u \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} + v \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{k+1}\, v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n}{n} u^{n+1}\, v^{n+1-(n+1)} \right)$$

$$+ \left(\binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \right)$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0$$

$$= \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 \quad \textit{(par triangle de Pascal)}$$

$$= \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} u^{n+1}\, v^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}.}$$

□

2. Soient E, F, G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.
Soient B_1 et B_2 des parties de F.

a) Démontrer :

$$g \circ f \text{ est injective} \quad \Rightarrow \quad f \text{ injective}$$

Démonstration.
Supposons $g \circ f$ injective et démontrons que $f : E \to F$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$.
On a alors : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
(égalité obtenue en composant chaque membre de l'égalité précédente par g)
Autrement dit : $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.
Or, comme $g \circ f$ est injective, on en déduit : $x_1 = x_2$.

Ainsi f est injective.

$$\boxed{\text{Finalement : } g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective.}}$$

□

b) Démontrer :

$$f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cap B_2) = f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cap f^{-\mathbb{1}}(B_2)$$

Démonstration.
On procède par double inclusion.
($\subset$) Soit $x \in f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cap B_2)$. Alors :

$$\begin{array}{rc} & f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ \text{donc} & f(x) \in B_1 \quad \texttt{ET} \quad f(x) \in B_2 \\ \text{d'où} & x \in f^{-\mathbb{1}}(B_1) \quad \texttt{ET} \quad x \in f^{-\mathbb{1}}(B_2) \\ \text{ainsi} & x \in f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cap f^{-\mathbb{1}}(B_2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cap f^{-\mathbb{1}}(B_2).}$$

($\supset$) Soit $x \in f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cap f^{-\mathbb{1}}(B_2)$. Alors :

$$\begin{array}{rc} & x \in f^{-\mathbb{1}}(B_1) \quad \texttt{ET} \quad x \in f^{-\mathbb{1}}(B_2) \\ \text{donc} & f(x) \in B_1 \quad \texttt{ET} \quad f(x) \in B_2 \\ \text{d'où} & f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ \text{ainsi} & x \in f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cap B_2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cap B_2) \supset f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cap f^{-\mathbb{1}}(B_2).}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cap B_2) = f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cap f^{-\mathbb{1}}(B_2).}$$

□

c) Démontrer que f est injective si et seulement si $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big) = X$.

Démonstration.
On procède par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons f injective et démontrons : $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big) = X$.
Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On procède par double inclusion.
($\subset$) Soit $x \in f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big)$. Alors : $f(x) \in f(X)$.
Il existe donc $x_0 \in X$ tel que : $f(x) = f(x_0)$.
Comme l'application f est injective, on obtient : $x = x_0$.
Or : $x_0 \in X$. On en déduit : $x \in X$.
($\supset$) Soit $x \in X$. On en déduit : $f(x) \in f(X)$.
Par définition de l'image réciproque, on obtient : $x \in f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } f \text{ injective} \Rightarrow \forall X \in \mathscr{P}(E),\ f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big) = X.}$$

($\Leftarrow$) Supposons : $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big) = X$. Démontrons que f est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$.
On note alors : $X = \{x_2\} \in \mathscr{P}(E)$. On obtient en particulier : $f(x_1) \in f(X)$.
Ainsi : $x_1 \in f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big)$.
Or : $f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big) = X$. On en déduit : $x_1 \in X$.
Or : $X = \{x_2\}$. On en conclut : $x_1 = x_2$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall X \in \mathscr{P}(E),\ f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big) = X \Rightarrow f \text{ injective.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } f \text{ est injective si et seulement si } \forall X \in \mathscr{P}(E),\ f^{-\mathbb{1}}\big(f(X)\big) = X.}$$

□

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^4(x)$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 && \textit{(par formule d'Euler)} \\
&= \frac{1}{2^4}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2^4}\left(\mathrm{e}^{4ix} + 4\,\mathrm{e}^{2ix} + 6 + 4\,\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{-4ix}\right) && \textit{(par binôme de Newton)} \\
&= \frac{1}{2^4}\big(2\,\cos(4x) + 4 \times 2\,\cos(2x) + 6\big) \\
&= \frac{1}{8}\big(\cos(4x) + 4\,\cos(2x) + 3\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \cos^4(x) = \frac{1}{8}\big(\cos(4x) + 4\,\cos(2x) + 3\big).}$$

□

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \cos^4(x)$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx$ est donc bien définie.
- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx \\
= \ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\,\big(\cos(4x) + 4\,\cos(2x) + 3\big)\,dx \\
= \ &\frac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)\,dx + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\,dx\right) && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
= \ &\frac{1}{8}\left(\left[\frac{1}{4}\,\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\left[\frac{1}{2}\,\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\,[\,x\,]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
= \ &\frac{1}{8}\left(\cancel{\frac{1}{4}\,\sin\left(4\,\frac{\pi}{2}\right)} + \cancel{2\,\sin\left(2\,\frac{\pi}{2}\right)} + 3\,\frac{\pi}{2}\right) \\
= \ &\frac{1}{8} \times \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx = \frac{3\pi}{16}}$$

□

4. a) (∗) Écrire à l'aide de **Python** une fonction `occurences` prenant en paramètre deux variables `a` et `s` et renvoyant le nombre d'occurences d'un caractère `a` dans une chaîne de caractères `s`.

Démonstration.
On propose le script suivant :

```
1 def occurences(a, s) :
2     compteur = 0
3     for caract in s :
4         if caract == a :
5             compteur = compteur + 1
6     return compteur
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `occurences`,
  × elle prend en paramètre les variables `a` et `s`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `compteur`.

```
1 def occurences(a, s) :
```

```
6     return compteur
```

  On initialise ensuite la variable `compteur`, qui contiendra le nombre d'occurences de du caractère `a` dans la chaîne `s`, à 0. En effet, avant de parcourir la chaîne `s`, le caractère `a` n'a pas encore été rencontré.

```
2     compteur = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à :
  1) parcourir la chaîne de caractères `s`,
  2) mettre à jour la variable `compteur` à chaque fois qu'un caractère de la chaîne `s` est le caractère `a`.

  On doit donc :
  1) parcourir tous les éléments de la chaîne de caractères `s`. Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle `for`).

```
3     for caract in s :
```

  2) mettre à jour, à chaque tour de boucle, la variable `compteur` en l'incrémentant de 1 si le caractère de la chaîne `s` rencontré est le caractère `a`. Pour cela, on utilise une structure conditionnelle (structure `if`).

```
4         if caract == a :
5             compteur = compteur + 1
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `compteur` contient le nombre d'occurences du caractère `a` dans la chaîne de caractères `s`. On finit donc ce script en renvoyant la valeur de cette variable.

```
        return compteur
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un script **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

b) (∗) Écrire une fonction `dico_alphabet` qui prend en paramètre une chaîne de caractère `texte` et qui renvoie un dictionnaire qui associe à chaque lettre de l'alphabet le nombre de fois où elle apparaît dans `texte`.

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
def dico_alphabet(texte) :
    alphabet = ‘abcdefghijklmnopqrstuvwxyz‘
    dico = {lettre : occurences(lettre, texte) for lettre in alphabet}
    return dico
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `dico_alphabet`,
  × elle prend en paramètre la variable `texte`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `dico`.

```
def dico_alphabet(texte) :
```

```
        return dico
```

- **Contenu de la fonction**
  × On commence par définir une chaîne de caractère contenant l'ensemble des lettres de l'alphabet.

```
        alphabet = ‘abcdefghijklmnopqrstuvwxyz‘
```

  × On définit ensuite le dictionnaire `dico` souhaité :
    - les clés de ce dictionnaire sont les lettres de l'alphabet,
    - la valeur associée à une clé donnée est son nombre d'occurences dans la chaîne de caractère `texte`. On obtient ce nombre d'occurences à l'aide de la fonction `occurences` définie en question précédente : `occurences(lettre, texte)`.

  On définit alors le dictionnaire `dico` par compréhension.

```
        dico = {lettre : occurences(lettre, texte) for lettre in alphabet}
```

Commentaire

- Pour définir notre nouveau dictionnaire, on a ici choisi d'utiliser une fonctionnalité **Python** très importante et pratique : la définition d'un dictionnaire par compréhension. Rappelons que l'on peut définir par compréhension tous les objets de type séquentiel (indicé) mutables (dont on peut modifier les éléments individuellement). C'est le cas par exemple des listes et des dictionnaires.
- On pouvait également proposer une fonction utilisant une structure itérative.

```
def dico_alphabet(texte) :
    alphabet = ‘abcdefghijklmnopqrstuvwxyz‘
    dico_texte = {}
    for lettre in alphabet :
        dico_texte[lettre] = occurences(lettre, texte)
    return dico_texte
```

c) Expliquer ce que permet de faire la fonction **Python** suivante.

```
def mystere(chaine, message) :
    n = len(message)
    m = len(chaine)
    compteur = 0
    for i in range(n) :
        j = 1
        if message[i] == chaine[0] :
            while i + j < n and j < m and message[i+j] == chaine[j] :
                j += 1
        if j == m :
            compteur += 1
    return compteur
```

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `mystere`,
  × elle prend en paramètre les variables `chaine` et `message`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `compteur`.

```
def mystere(chaine, message) :
```

```
    return compteur
```

  On stocke :
  × dans la variable `n` la longueur de la chaîne de caractères `message`.

```
    n = len(message)
```

  × dans la variable `m` la longueur de la chaîne de caractères `chaine`.

```
    m = len(chaine)
```

Enfin, on initialise la variable `compteur` à 0.

```
4       compteur = 0
```

- **Structure itérative**

  Les lignes 5 à 11 consistent à :

  1) parcourir la chaîne de caractères `message`,

  2) mettre à jour la variable `compteur` à chaque fois que la chaîne de caractères `chaine` est rencontré dans la chaîne `message`.

  On doit donc :

  1) parcourir tous les éléments de la chaîne de caractères `message`. Pour cela, on parcourt l'ensemble des indices des éléments de cette chaîne. On utilise à cet effet une structure itérative (boucle `for`).

```
5       for i in range(n) :
```

  2) mettre à jour la variable `compteur` en l'incrémentant de 1 si la chaîne `chaine` est rencontrée. Pour cela :

  - on commence par initialiser une variable `j` à 1. Cette variable sera réinitialisée à 1 à chaque tour de boucle.

```
6           j = 1
```

  - on utilise ensuite une structure conditionnelle (structure `if`). À chaque tour de boucle `i`, l'idée est la suivante :

    ▶ si le caractère d'indice `i` de la chaîne `message` est le premier de celui de la chaîne `chaine`, alors on va chercher à savoir si les caractères suivants de la chaîne `message` coïncident aussi avec ceux de la chaîne `chaine`.

```
7           if message[i] == chaine[0] :
```

    ▶ on poursuit ensuite la comparaison des caractères de `message` d'indice strictement supérieur à `i` avec ceux de `chaine`. Autrement dit, on compare les caractères `message[i+j]` et `chaine[j]`. On effectue cette comparaison tant que :

    (i) l'indice `i+j` ne dépasse pas la longueur de la chaîne de caractères `message`,

    (ii) l'indice `j` ne dépasse pas la longueur de la chaîne de caractères `chaine`,

    (iii) les caractères `message[i+j]` et `chaine[j]` sont identiques.

```
8               while i + j < n and j < m and message[i+j] == chaine[j] :
9                   j += 1
```

    ▶ enfin, à l'issue de la boucle `while` précédente, la variable `j` contient le nombre de caractères de `message`, à partir de l'indice `i`, coïncidant avec ceux de `chaine` (dans le même ordre). Ainsi, lorsque `j` est égal à `m`, c'est que l'on a rencontré la chaîne de caractères `chaine` dans son entier. On peut donc incrémenter la variable `compteur` de 1.

```
10              if j == m :
11                  compteur += 1
```

L'appel `mystere(chaine, message)` permet donc de déterminer le nombre d'occurences d'une la chaîne de caractères `chaine` dans la chaîne de caractères `message`. □

Exercice 2

1. Déterminer, pour tout $x \in \,]-\pi, \pi[$, le module et un argument du nombre complexe $\mathrm{e}^{ix} + 1$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]-\pi, \pi[$.

$$\mathrm{e}^{ix} + 1 \; = \; \mathrm{e}^{i\,\frac{x}{2}} \left(\mathrm{e}^{i\,\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-i\,\frac{x}{2}} \right) \; = \; \mathrm{e}^{i\,\frac{x}{2}} \times 2\, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \textit{(par formule d'Euler)}$$

De plus :

$$\begin{array}{rccccc} & -\pi & < & x & < & \pi \\ \text{donc} & -\frac{\pi}{2} & < & \frac{x}{2} & < & \frac{\pi}{2} \\ \text{d'où} & & \cos\left(\frac{x}{2}\right) & > & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le module de } \mathrm{e}^{ix} + 1 \text{ est } 2\, \cos\left(\frac{x}{2}\right)\text{, et l'un de ses arguments est } \frac{x}{2}.}$$

□

2. Démontrer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\mathrm{e}^{ix} + 1\right)^n \; = \; 2^n\, \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{i\,\frac{nx}{2}}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Le calcul effectué en question précédente est valable (même si x n'appartient pas forcément à l'intervalle $]-\pi, \pi[$) :
$$\mathrm{e}^{ix} + 1 \; = \; 2\, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{i\,\frac{x}{2}}$$
- On en déduit :
$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{ix} + 1)^n \; &= \; \left(2\, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{i\,\frac{x}{2}}\right) \\ &= \; 2^n\, \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \left(\mathrm{e}^{i\,\frac{x}{2}}\right)^n \\ &= \; 2^n\, \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{i\,\frac{nx}{2}} \qquad \textit{(par formule de Moivre)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N},\, (\mathrm{e}^{ix} + 1)^n = 2^n\, \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{i\,\frac{nx}{2}}}$$

Commentaire

Notons que si le calcul de la question précédente est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, il n'en est pas de même de sa conclusion. En effet :

- si $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, alors : $\mathrm{e}^{ix} + 1 = 0$. Ainsi, le module de $\mathrm{e}^{ix} + 1$ est 0 et ce nombre complexe n'admet pas d'argument.
- si $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < 0$, alors :
$$\mathrm{e}^{ix} + 1 \; = \; -2\, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times (-1) \times \mathrm{e}^{i\,\frac{x}{2}} \; = \; -2\, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \mathrm{e}^{i\,\pi} \times \mathrm{e}^{i\,\frac{x}{2}}$$
Donc : $\mathrm{e}^{ix} + 1 = -2\, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \, \mathrm{e}^{i\,(\pi + \frac{x}{2})}$. Le module de $\mathrm{e}^{ix} + 1$ est donc $-2\, \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et l'un de ses argument est $\pi + \dfrac{x}{2}$.

□

3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Re}\left(e^{ikx}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right) && \textit{(par linéarité de } \operatorname{Re}(\cdot)\textit{)} \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k\right) && \textit{(par formule de Moivre)} \\
&= \operatorname{Re}\left(\left(e^{ix}+1\right)^n\right) && \textit{(par binôme de Newton)} \\
&= \operatorname{Re}\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}\right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\right) && \textit{(par linéarité de } \operatorname{Re}(\cdot)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right).}$$

□

4. ***a)*** Simplifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(k \times 0)$ et $\cos(k \times \pi)$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
- D'une part : $\cos(k \times 0) = \cos(0) = 1$.
- D'autre part :
  × si k est pair, alors : $\cos(k \times \pi) = 1$.
  × si k est impair, alors : $\cos(k \times \pi) = -1$
  Ce que l'on peut résumer en : $\cos(k \times \pi) = (-1)^k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \cos(k \times 0) = 1 \ \texttt{ET} \ \cos(k \times \pi) = (-1)^k.}$$

□

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression simple des sommes suivantes à l'aide de la question ***3.***

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Démonstration.
- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \times 0) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 2^n \cos^n\left(\frac{0}{2}\right) \cos\left(\frac{n \times 0}{2}\right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.}}\textit{)} \\
&= 2^n \cos^n(0) \cos(0) \\
&= 2^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \times \pi) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n \times \pi}{2}\right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.}}\textit{)} \\
&= 2^n \times 0 \times \cos\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0}$$

□

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$A_n = \sum_{p \in P_n} \binom{n}{p} \qquad B_n = \sum_{p \in Q_n} \binom{n}{p} \qquad C_n = \sum_{p \in R_n} \binom{n}{p}$$

où :

× $P_n = \{3k \mid k \in \mathbb{N} \ \texttt{ET} \ 0 \leqslant 3k \leqslant n\}$,

× $Q_n = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{N} \ \texttt{ET} \ 0 \leqslant 3k+1 \leqslant n\}$.

× $R_n = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{N} \ \texttt{ET} \ 0 \leqslant 3k+2 \leqslant n\}$.

5. Déterminer P_7, Q_7 et R_7, puis $P_7 \cup Q_7 \cup R_7$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$P_7 = \{3k \mid k \in \mathbb{N} \ \texttt{ET} \ 0 \leqslant 3k \leqslant 7\} = \{3 \times 0,\ 3 \times 1,\ 3 \times 2\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P_7 = \{0, 3, 6\}.}$$

- Ensuite :

$$Q_7 = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{N} \ \texttt{ET} \ 0 \leqslant 3k \leqslant 7\} = \{3 \times 0 + 1,\ 3 \times 1 + 1,\ 3 \times 2 + 1\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Q_7 = \{1, 4, 7\}.}$$

- De même :

$$R_7 = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{N} \ \texttt{ET} \ 0 \leqslant 3k \leqslant 7\} = \{3 \times 0 + 2,\ 3 \times 1 + 2\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } R_7 = \{2, 5\}.}$$

- On remarque enfin :

$$P_7 \cup Q_7 \cup R_7 = \{0, 3, 6\} \cup \{1, 4, 7\} \cup \{2, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P_7 \cup Q_7 \cup R_7 = [\![0, 7]\!].}$$

□

6. À l'aide d'une sommation par paquets, justifier : $A_n + B_n + C_n = 2^n$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{array}{rcll} A_n + B_n + C_n & = & \sum\limits_{p \in P_n} \binom{n}{p} + \sum\limits_{p \in Q_n} \binom{n}{p} + \sum\limits_{p \in R_n} \binom{n}{p} & \\ & = & \sum\limits_{p \in P_n \cup Q_n \cup R_n} \binom{n}{p} & \textit{(par sommation par paquets)} \\ & = & \sum\limits_{p \in [\![0,n]\!]} \binom{n}{p} & \textit{(car } P_n \cup Q_n \cup R_n = [\![0,n]\!]\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} & \\ & = & 2^n & \textit{(d'après } \boldsymbol{4.b)}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{A_n + B_n + C_n = 2^n}$$

Commentaire

Notons que :
- l'ensemble P_n est l'ensemble des entiers de $[\![0,n]\!]$ congrus à 0 modulo 3,
- l'ensemble Q_n est l'ensemble des entiers de $[\![0,n]\!]$ congrus à 1 modulo 3,
- l'ensemble R_n est l'ensemble des entiers de $[\![0,n]\!]$ congrus à 2 modulo 3,

Or tout entier est forcément congru à 0 modulo 3 **ou** congru à 1 modulo 3 **ou** congru à 2 modulo 3. On obtient donc bien :

$$P_n \cup Q_n \cup R_n \;=\; [\![0,n]\!]$$

□

7. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$j^{3k} = 1, \qquad j^{3k+1} = j, \qquad j^{3k+2} = \overline{j}$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$j^{3k} \;=\; (j^3)^k \;=\; \left(\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3\right)^k \;=\; \left(e^{\cancel{3} \times \frac{2i\pi}{\cancel{3}}}\right)^k \;=\; \left(e^{2i\pi}\right)^k \;=\; 1^k \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } j^{3k} = 1.}$$

- Ensuite :

$$j^{3k+1} \;=\; j \times j^{3k} \;=\; j \times 1 \;=\; j$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } j^{3k+1} = j.}$$

- Enfin, d'une part :

$$j^{3k+2} \;=\; j^2 \times j^{3k} \;=\; j^2 \times 1 \;=\; \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 \;=\; \mathrm{e}^{2\,\frac{2i\pi}{3}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}$$

D'autre part :

$$\overline{j} \;=\; \overline{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}+2i\pi} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{-2i\pi+6i\pi}{3}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}} \;=\; j^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } j^{3k+2} = \overline{j}.}$$

□

b) En déduire : $\forall p \in P_n,\ j^p = 1$. Que dire si $p \in Q_n$? si $p \in R_n$?

Démonstration.

- Soit $p \in P_n$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p = 3k$. Ainsi :

$$j^p \;=\; j^{3k} \;=\; 1 \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

$$\boxed{\forall p \in P_n,\ j^p = 1}$$

- Soit $p \in Q_n$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p = 3k+1$. Ainsi :

$$j^p \;=\; j^{3k+1} \;=\; j \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

$$\boxed{\forall p \in Q_n,\ j^p = j}$$

- Soit $p \in R_n$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p = 3k+2$. Ainsi :

$$j^p \;=\; j^{3k+2} \;=\; \overline{j} \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

$$\boxed{\forall p \in R_n,\ j^p = \overline{j}}$$

□

8. a) En utilisant le résultat de la question ***2.***, démontrer :

$$2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}} \;=\; A_n + j\,B_n + \overline{j}\,C_n$$

Démonstration.

- On applique la question ***2.*** à $x = \dfrac{2\pi}{3}$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} 2^n \cos^n\left(\dfrac{\frac{\cancel{2}\pi}{3}}{\cancel{2}}\right) \exp\left(i\dfrac{n\,\frac{\cancel{2}\pi}{3}}{\cancel{2}}\right) & = & (\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}+1)^n \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 2^n \cos^n\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i\,\frac{n\pi}{3}} & = & (j+1)^n \end{array}$$

- De plus, par formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (j+1)^n &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} j^p \\ &= \sum_{p\in P_n} \binom{n}{p} j^p \;+\; \sum_{p\in Q_n} \binom{n}{p} j^p \;+\; \sum_{p\in R_n} \binom{n}{p} j^p && \textit{(par sommation par paquets)} \\ &= \sum_{p\in P_n} \binom{n}{p} \times 1 \;+\; \sum_{p\in Q_n} \binom{n}{p} \times j \;+\; \sum_{p\in R_n} \binom{n}{p} \times \overline{j} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{p\in P_n} \binom{n}{p} \;+\; j \sum_{p\in Q_n} \binom{n}{p} \;+\; \overline{j} \sum_{p\in R_n} \binom{n}{p} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}} = A_n + j\,B_n + \overline{j}\,C_n.}$$

□

b) Déterminer une formule analogue pour $A_n + \overline{j}\, B_n + j\, C_n$.

Démonstration.

- On applique la question ***2.*** à $x = -\dfrac{2\pi}{3}$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} 2^n \cos^n\left(\dfrac{-\frac{\cancel{2}\,\pi}{3}}{2}\right) \exp\left(i\dfrac{-n\,\frac{\cancel{2}\,\pi}{3}}{\cancel{2}}\right) & = & (\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}+1)^n \\ \| & & \| \\ 2^n \cos^n\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{-i\,\frac{n\pi}{3}} & = & (\overline{j}+1)^n \end{array}$$

Comme la fonction cos est paire, on a : $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. On obtient :

$$2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{-i\,\frac{n\pi}{3}} \;=\; (\overline{j}+1)^n$$

- De plus, par formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcl} (\overline{j}+1)^n & = & \sum\limits_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} (\overline{j})^p \\ & = & \sum\limits_{p\in P_n} \dbinom{n}{p} (\overline{j})^p \;+\; \sum\limits_{p\in Q_n} \dbinom{n}{p} (\overline{j})^p \;+\; \sum\limits_{p\in R_n} \dbinom{n}{p} (\overline{j})^p \quad \textit{(par sommation par paquets)} \end{array}$$

- Par ailleurs, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, trois cas se présentent :
  - × si $p \in P_n$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p = 3k$. Ainsi :

$$(\overline{j})^p \;=\; (\overline{j})^{3k} \;=\; \left(\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)^{3k} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{\cancel{3}}\times\cancel{3}\,k} \;=\; \mathrm{e}^{-2i\pi} \;=\; 1$$

  - × si $p \in Q_n$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p = 3k+1$. Ainsi :

$$(\overline{j})^p \;=\; (\overline{j})^{3k+1} \;=\; (\overline{j})^{3k} \times \overline{j} \;=\; 1 \times \overline{j} \;=\; \overline{j}$$

  - × si $p \in R_n$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p = 3k+2$. Ainsi :

$$(\overline{j})^p \;=\; (\overline{j})^{3k+2} \;=\; (\overline{j})^{3k} \times (\overline{j})^2 \;=\; 1 \times \overline{(j^2)} \;=\; \overline{(\overline{j})} \qquad \textit{(d'après \textbf{7.a})}$$

  Ainsi : $j^p = j$.

- On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & \sum\limits_{p\in P_n} \dbinom{n}{p} \overline{j}^p \;+\; \sum\limits_{p\in Q_n} \dbinom{n}{p} \overline{j}^p \;+\; \sum\limits_{p\in R_n} \dbinom{n}{p} \overline{j}^p \\ = & \sum\limits_{p\in P_n} \dbinom{n}{p} \times 1 \;+\; \sum\limits_{p\in Q_n} \dbinom{n}{p} \times j \;+\; \sum\limits_{p\in R_n} \dbinom{n}{p} \times \overline{j} \quad \textit{(d'après ce qui précède)} \\ = & \sum\limits_{p\in P_n} \dbinom{n}{p} \;+\; \overline{j} \sum\limits_{p\in Q_n} \dbinom{n}{p} \;+\; j \sum\limits_{p\in R_n} \dbinom{n}{p} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{-i\frac{n\pi}{3}} = A_n + \overline{j}\, B_n + j\, C_n.}$$

□

9. a) Que vaut $1 + j + \overline{j}$?

Démonstration.
On calcule :

$$1 + j + \overline{j} \; = \; 1 + 2 \operatorname{Re}(j) \; = \; 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \; = \; 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \; = \; 1 - 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } 1 + j + \overline{j} = 0.}$$

□

b) En déduire :

$$A_n \; = \; \frac{1}{3}\left(2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

Indication : on pourra sommer les relations trouvées aux questions ***5.***, ***8.a)*** *et* ***8.b)****.*

Démonstration.
D'après les questions ***5.***, ***8.a)*** et ***8.b)*** :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} A_n & + & B_n & + & C_n & = & 2^n \\ A_n & + & j\, B_n & + & \overline{j}\, C_n & = & 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i \frac{n\pi}{3}} \\ A_n & + & \overline{j}\, B_n & + & j\, C_n & = & 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{-i \frac{n\pi}{3}} \end{array}\right.$$

On effectue alors l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$. On obtient :

$$3\, A_n + \left(1 + j + \overline{j}\right) B_n + \left(1 + \overline{j} + j\right) C_n \; = \; 2^n \left(1 + \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i \frac{n\pi}{3}} + \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{-i \frac{n\pi}{3}}\right)$$

Or :
× d'une part, d'après la question précédente : $1 + j + \overline{j} = 0$. Ainsi :

$$3\, A_n + \left(1 + j + \overline{j}\right) B_n + \left(1 + \overline{j} + j\right) C_n \; = \; 3\, A_n + 0 \times B_n + 0 \times C_n \; = \; 3\, A_n$$

× D'autre part, comme $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2^n \left(1 + \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i \frac{n\pi}{3}} + \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{-i \frac{n\pi}{3}}\right) \; &= \; 2^n \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{i \frac{n\pi}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-i \frac{n\pi}{3}}\right) \\ &= \; 2^n \left(1 + \frac{1}{2^n} \mathrm{e}^{i \frac{n\pi}{3}} + \frac{1}{2^n} \mathrm{e}^{-i \frac{n\pi}{3}}\right) \\ &= \; 2^n + \mathrm{e}^{i \frac{n\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-i \frac{n\pi}{3}} \\ &= \; 2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

On en déduit : $3\, A_n = 2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } A_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).}$$

□

Exercice 3

On considère que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
L'objectif de cet exercice est de démontrer que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés. On en profitera pour démontrer quelques relations faisant intervenir ces trois points.
On rappelle que :

- l'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection des hauteurs du triangle,
- le cercle circonscrit à un triangle est l'unique cercle passant par les sommets du triangle,
- le centre de gravité du triangle est le point d'intersection des médianes du triangle (les médianes d'un triangle sont les droites reliant le milieu d'un côté au sommet opposé à ce côté).

Partie I : Cas où le cercle circonscrit est centré en O

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Soient A, B et C trois points du plan complexe deux à deux distincts et non alignés.
On note a (resp. b, resp. c) l'affixe du point A (resp. B, resp. C).

On suppose dans cette partie seulement que les points A, B et C appartiennent au cercle $\mathcal{C}_0$ de centre O et de rayon R.

1. On note :
- × I_1 le milieu du segment $[AB]$ d'affixe m_1,
- × I_2 le milieu du segment $[BC]$ d'affixe m_2,
- × I_3 le milieu du segment $[AC]$ d'affixe m_3.

Exprimer m_1, m_2 et m_3 en fonction de a, b et c.

Démonstration.

$$\boxed{m_1 = \frac{a+b}{2}, \ m_2 = \frac{b+c}{2} \text{ et } m_3 = \frac{a+c}{2}}$$

Commentaire

Cette question est une pure question de cours. Il est donc inconcevable de ne pas savoir y répondre.

□

2. Justifier qu'il existe $(\theta_A, \theta_B, \theta_C) \in [0, 2\pi[^3$ tel que :

$$a = R\,e^{i\theta_A}, \qquad b = R\,e^{i\theta_B} \qquad \text{et} \qquad c = R\,e^{i\theta_C}$$

Démonstration.

- Par définition de l'écriture exponentielle d'un nombre complexe, il existe $(r_A, r_B, r_C) \in (\mathbb{R}_+)^3$ et $(\theta_A, \theta_B, \theta_C) \in [0, 2\pi[^3$ tels que :

$$a = r_A\,e^{i\theta_A}, \qquad b = r_B\,e^{i\theta_B} \qquad \text{et} \qquad c = r_C\,e^{i\theta_C}$$

Par définition du module, on sait même :

$$r_A = |a|, \qquad r_B = |b| \qquad \text{et} \qquad r_C = |c|$$

Ainsi :

$$a = |a|\,e^{i\theta_A}, \qquad b = |b|\,e^{i\theta_B} \qquad \text{et} \qquad c = |c|\,e^{i\theta_C}$$

- Par ailleurs, les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon R. On en déduit :
$$OA \ = \ OB \ = \ OC \ = \ R$$
Autrement dit :
$$|a| \ = \ |b| \ = \ |c| \ = \ R$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } a = R\,\mathrm{e}^{i\theta_A},\ b = R\,\mathrm{e}^{i\theta_B} \text{ et } c = R\,\mathrm{e}^{i\theta_C}.}$$
□

3. On note H le point d'affixe $h = a + b + c$ et z le nombre complexe vérifiant : $z = \dfrac{h-c}{b-a}$.

a) Démontrer :
$$z \ = \ i\,\frac{\cos\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}$$

Démonstration.
On calcule :
$$\begin{aligned}
z &= \frac{h-c}{b-a} \\
&= \frac{(a+b+\cancel{c})-\cancel{c}}{b-a} && \textit{(par définition de } h\textit{)} \\
&= \frac{R\,\mathrm{e}^{i\theta_A}+R\,\mathrm{e}^{i\theta_B}}{R\,\mathrm{e}^{i\theta_B}-R\,\mathrm{e}^{i\theta_A}} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{\cancel{R}\left(\mathrm{e}^{i\theta_A}+\mathrm{e}^{i\theta_B}\right)}{\cancel{R}\left(\mathrm{e}^{i\theta_B}-\mathrm{e}^{i\theta_A}\right)} \\
&= \frac{\cancel{\mathrm{e}^{i\frac{\theta_A+\theta_B}{2}}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta_A-\theta_B}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{\theta_A-\theta_B}{2}}\right)}{\cancel{\mathrm{e}^{i\frac{\theta_B+\theta_A}{2}}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta_B-\theta_A}{2}}-\mathrm{e}^{-i\frac{\theta_B-\theta_A}{2}}\right)} \\
&= \frac{\cancel{2}\cos\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}{\cancel{2}\,i\sin\left(\frac{\theta_B-\theta_A}{2}\right)} && \textit{(par formules d'Euler)} \\
&= -i\,\frac{\cos\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)} && \textit{(car } \frac{1}{i} = -i\textit{)} \\
&= -i\,\frac{\cos\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)} && \textit{(par imparité de } \sin\textit{)}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Finalement : } z = i\,\frac{\cos\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}.}$$
□

b) Supposons : $H \neq C$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CH) ?

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$z = i \, \frac{\cos\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right)}$$

$$\text{donc} \qquad z \in i\,\mathbb{R} \qquad \left(\textit{car } \frac{\cos\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right)} \in \mathbb{R}\right)$$

$$\text{d'où} \qquad \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$$

$$\text{ainsi} \qquad \arg\left(\frac{h-c}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$$

$$\boxed{\text{On en déduit que les droites } (AB) \text{ et } (CH) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

□

c) En faisant le même raisonnement pour les droites (BC) et (AH), puis pour les droites (AC) et (BH), déterminer ce que représente le point H pour le triangle ABC.

Démonstration.

- On note : $w = \dfrac{h-a}{b-c}$. Alors :

$$\begin{aligned}
w &= \frac{h-a}{b-c} \\
&= \frac{(\cancel{a}+b+c)-\cancel{a}}{b-c} && \textit{(par définition de } h\textit{)} \\
&= \frac{R\,e^{i\theta_B} + R\,e^{i\theta_C}}{R\,e^{i\theta_B} - R\,e^{i\theta_C}} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{\cancel{R}\left(e^{i\theta_B} + e^{i\theta_C}\right)}{\cancel{R}\left(e^{i\theta_B} - e^{i\theta_C}\right)} \\
&= \frac{\cancel{e^{i\frac{\theta_B+\theta_C}{2}}}\left(e^{i\frac{\theta_B-\theta_C}{2}} + e^{-i\frac{\theta_B-\theta_C}{2}}\right)}{\cancel{e^{i\frac{\theta_B+\theta_C}{2}}}\left(e^{i\frac{\theta_B-\theta_C}{2}} - e^{-i\frac{\theta_B-\theta_C}{2}}\right)} \\
&= \frac{\cancel{2}\cos\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}{\cancel{2}\,i\,\sin\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)} && \textit{(par formules d'Euler)} \\
&= -i\,\frac{\cos\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)} && \left(\textit{car } \frac{1}{i} = -i\right)
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$w = -i \frac{\cos\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}$$

donc $\quad w \in i\,\mathbb{R} \quad$ *(car* $-\dfrac{\cos\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)} \in \mathbb{R}$*)*

d'où $\quad \arg(w) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

ainsi $\quad \arg\left(\dfrac{h-a}{b-c}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\boxed{\text{Les droites } (AH) \text{ et } (CB) \text{ sont donc perpendiculaires.}}$$

$$\boxed{\text{En posant } u = \frac{h-b}{c-a}, \text{ on obtient de même que } (BH) \text{ et } (AC) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

- On sait que :
  × les droites (AB) et (CH) sont perpendiculaires. Donc (CH) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
  × les droites (BC) et (AH) sont perpendiculaires. Donc (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
  × les droites (AC) et (BH) sont perpendiculaires. Donc (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

  Le point H est donc le point de concours des trois hauteurs du triangle ABC.

$$\boxed{\text{On en déduit que le point } H \text{ est l'orthocentre du triangle } ABC.}$$

□

4. On note G le point d'affixe $g = \dfrac{a+b+c}{3}$.

a) Montrer que G appartient à la droite (AI_2).

Démonstration.

- On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{g-a}{m_2-a} &= \frac{\frac{a+b+c}{3}-a}{\frac{b+c}{2}-a} \\ &= \frac{\frac{(a+b+c)-3a}{3}}{\frac{(b+c)-2a}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\,\frac{\cancel{b+c-2a}}{\cancel{b+c-2a}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Ainsi : $\dfrac{g-a}{m_2-a} \in \mathbb{R}$. Donc : $\arg\left(\dfrac{g-a}{m_2-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$. Les points G, A et I_2 sont donc alignés.

$$\boxed{\text{On en conclut que le point } G \text{ appartient à la droite } (AI_2).}$$

□

b) Démontrer de même que G appartient aux droites (CI_1) et (BI_3).

Démonstration.

- On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{g-c}{m_1-c} &= \frac{\frac{a+b+c}{3}-c}{\frac{a+b}{2}-c} \\ &= \frac{\frac{(a+b+c)-3c}{3}}{\frac{(a+b)-2c}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Ainsi : $\dfrac{g-c}{m_1-c} \in \mathbb{R}$. Donc : $\arg\left(\dfrac{g-c}{m_1-c}\right) \equiv 0\ [\pi]$. Les points G, C et I_1 sont donc alignés.

$$\boxed{\text{On en conclut que le point } G \text{ appartient à la droite } (CI_1).}$$

- On calcule enfin :

$$\begin{aligned} \frac{g-b}{m_3-b} &= \frac{\frac{a+b+c}{3}-b}{\frac{a+c}{2}-b} \\ &= \frac{\frac{(a+b+c)-3b}{3}}{\frac{(a+c)-2b}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Ainsi : $\dfrac{g-b}{m_3-b} \in \mathbb{R}$. Donc : $\arg\left(\dfrac{g-b}{m_3-b}\right) \equiv 0\ [\pi]$. Les points G, B et I_3 sont donc alignés.

$$\boxed{\text{On en conclut que le point } G \text{ appartient à la droite } (BI_3).}$$ □

c) Que représente G pour le triangle ABC ? Quelle relation a-t-on entre les longueurs AG et AI_2 ?

Démonstration.

- Les droites (AI_2), (CI_1) et (BI_3) sont les médianes du triangle ABC.
  D'après les questions ***4.a)*** et ***4.b)***, le point G est donc le point de concours des médianes du triangle ABC.

$$\boxed{\text{Le point } G \text{ est donc le centre de gravité du triangle } ABC.}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} AG &= |g-a| \\ &= \left|\frac{2}{3}\,(m_2-a)\right| \quad \textit{(d'après \textbf{4.a)})} \\ &= \frac{2}{3}\,|m_2-a| \\ &= \frac{2}{3}\,I_2A \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } AG = \frac{2}{3}\,AI_2.}$$ □

5. Conclure que les points O, G et H sont alignés et déterminer une relation entre les longueurs OG et OH.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$\frac{g-0}{h-0} \;=\; \frac{\frac{\cancel{a+b+c}}{3}}{\cancel{a+b+c}} \;=\; \frac{1}{3}$$
Ainsi : $\dfrac{g-0}{h-0} \in \mathbb{R}$. Donc : $\arg\left(\dfrac{g-0}{h-0}\right) \equiv 0\ [\pi]$.
$$\boxed{\text{On en déduit que } O,\ G \text{ et } H \text{ sont alignés.}}$$
- De plus, d'après le calcul précédent :
$$OG \;=\; |g| \;=\; \left|\frac{1}{3}\,h\right| \;=\; \frac{1}{3}\,|h| \;=\; \frac{1}{3}\,OH$$
$$\boxed{OG = \frac{1}{3}\,OH}$$

□

Partie II : Cas général

Soient A, B et C trois points du plan complexe deux à deux distincts et non alignés, d'affixes respectives a, b et c.

On ne considère plus que les points A, B et C appartiennent à un cercle de centre O.

6. **On admet** dans cette question qu'il existe un cercle circonscrit au triangle ABC et qu'il est unique. On note Ω son centre d'affixe ω et R son rayon.
On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$. On note A', B' et C' les images respectives de A, B et C par cette translation.

a) Déterminer les affixes des points A', B' et C', ainsi que celles de l'orthocentre et du centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Démonstration.

- Le point A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$. Ainsi :
$$\overrightarrow{OA'} \;=\; \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\Omega O}$$
D'où, en notant α l'affixe de A' :
$$\alpha - 0 \;=\; (a-0) + (0-\omega)$$
Ainsi : $\alpha = a - \omega$.
$$\boxed{\text{Le point } A' \text{ a pour affixe } a-\omega.}$$
- On obtient les affixes de B' et C', notées β et γ, avec le même raisonnement.
$$\boxed{\text{Le point } B' \text{ a pour affixe } b-\omega.\ \text{Le point } C' \text{ a pour affixe } c-\omega.}$$
- De plus, d'après ***4.***, le centre de gravité G' du triangle $A'B'C'$ a pour affixe :
$$g' \;=\; \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \;=\; \frac{(a-\omega)+(b-\omega)+(c-\omega)}{3} \;=\; \frac{a+b+c}{3} - \frac{3\,\omega}{3} \;=\; \frac{a+b+c}{3} - \omega$$
$$\boxed{\text{L'affixe de } G' \text{ est donc : } g' = \frac{a+b+c}{3} - \omega.}$$

- De plus, d'après ***3.***, l'orthocentre H' du triangle $A'B'C'$ a pour d'affixe :

$$h' \;=\; \alpha+\beta+\gamma \;=\; (a-\omega)+(b-\omega)+(c-\omega) \;=\; (a+b+c)-3\,\omega$$

$$\boxed{\text{L'affixe de } H' \text{ est : } h' = a+b+c-3\omega.}$$

- Enfin, les points A', B' et C' appartiennent au cercle de centre O et de rayon R. En effet :

$$\begin{array}{rcll} OA' & = & |\alpha - 0| & \\ & = & |a-\omega| & \\ & = & \Omega A & \\ & = & R & \textit{(car } A \textit{ appartient au cercle de centre } \Omega \textit{ et de rayon } R\textit{)} \end{array}$$

De même : $OB' = R$ et $OC' = R$.
Les points A', B' et C' appartiennent donc au cercle de centre O et de rayon R.

$$\boxed{\text{Le centre du cercle circonscrit au triangle } A'B'C' \text{ est donc } O \text{ d'affixe } 0.}$$

□

b) Montrer que, dans ce cas général, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC sont alignés.

Démonstration.

- Notons tout d'abord :
  × G le centre de gravité du triangle ABC. Comme A est l'image de A' par la translation $O\Omega$, B celle de B' et C celle de C', alors G est l'image de G' par la translations $O\Omega$. On en déduit la valeur de son affixe g :

$$g \;=\; g'+\omega \;=\; \left(\frac{a+b+c}{3} - \cancel{\omega}\right) + \cancel{\omega} \;=\; \frac{a+b+c}{3}$$

  × H l'orthocentre du triangle ABC. Comme A est l'image de A' par la translation $O\Omega$, B celle de B' et C celle de C', alors H est l'image de H' par la translations $O\Omega$. On en déduit la valeur de son affixe h :

$$h \;=\; h'+\omega \;=\; (a+b+c-3\,\omega)+\omega \;=\; a+b+c-2\omega$$

  Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est déjà noté Ω d'affixe ω.

- Démontrons alors que Ω, G et H sont alignés.

$$\frac{g-\omega}{h-\omega} \;=\; \frac{\frac{a+b+c}{3}-\omega}{(a+b+c-2\,\omega)-\omega} \;=\; \frac{\frac{\cancel{a+b+c-3\,\omega}}{3}}{\cancel{a+b+c-3\,\omega}} \;=\; \frac{1}{3}$$

  On obtient : $\dfrac{g-\omega}{h-\omega} \in \mathbb{R}$. D'où : $\arg\left(\dfrac{g-\omega}{h-\omega}\right) \equiv 0\ [\pi]$.

$$\boxed{\text{Les points } \Omega,\ G \text{ et } H \text{ sont donc alignés.}}$$

□

7. On cherche maintenant à démontrer l'assertion admise précédemment : il existe un unique cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Justifier que, s'il existe un cercle passant par les points A, B et C, alors son centre Ω d'affixe ω et son rayon R vérifient :

$$R \ = \ |\omega - a| \ = \ |\omega - b| \ = \ |\omega - c|$$

Démonstration.
Supposons qu'il existe un cercle passant par les poits A, B et C de centre Ω d'affixe ω et de rayon R. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Omega A & = & R \\ \Omega B & = & R \\ \Omega C & = & R \end{array} \right. \qquad \text{donc} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} |a - \omega| & = & R \\ |b - \omega| & = & R \\ |c - \omega| & = & R \end{array} \right.$$

Or : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|-z| = |z|$. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |\omega - a| & = & R \\ |\omega - b| & = & R \\ |\omega - c| & = & R \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } R = |\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|.}$$

□

b) Montrer qu'il existe un unique cercle passant par les points A, B et C. On montrera que l'affixe de son centre Ω est :

$$\omega \ = \ b + \frac{a-b}{2} \left(1 + i \, \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a) \right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a) \right)} \right)$$

Démonstration.
On porcède par analyse-synthèse.

- **Analyse**.
Supposons qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R tel que les points A, B et C appartiennent à $\mathcal{C}$.
  × Alors, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rrcccccc} & R & = & |\omega - a| & = & |\omega - b| & = & |\omega - c| \\ \text{donc} & R^2 & = & |\omega - a|^2 & = & |\omega - b|^2 & = & |\omega - c|^2 \end{array}$$

  Or :

$$\begin{array}{rcl} |\omega - a|^2 & = & (\omega - a)\,\overline{(\omega - a)} \\ & = & (\omega - a)\left(\overline{\omega} - \overline{a}\right) \\ & = & \omega\,\overline{\omega} - a\,\overline{\omega} - \overline{a}\,\omega + a\,\overline{a} \\ & = & |\omega|^2 - a\,\overline{\omega} - \overline{a}\,\omega + |a|^2 \end{array}$$

  On exprime de même $|\omega - b|^2$ et $|\omega - c|^2$ et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |\omega|^2 - a\,\overline{\omega} - \overline{a}\,\omega + |a|^2 & = & R^2 \\ |\omega|^2 - b\,\overline{\omega} - \overline{b}\,\omega + |b|^2 & = & R^2 \\ |\omega|^2 - c\,\overline{\omega} - \overline{c}\,\omega + |c|^2 & = & R^2 \end{array} \right.$$

× Or :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} |\omega|^2 & - & a\,\overline{\omega} & - & \overline{a}\,\omega & = & R^2 - |a|^2 \\ |\omega|^2 & - & b\,\overline{\omega} & - & \overline{b}\,\omega & = & R^2 - |b|^2 \\ |\omega|^2 & - & c\,\overline{\omega} & - & \overline{c}\,\omega & = & R^2 - |c|^2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} |\omega|^2 & - & a\,\overline{\omega} & - & \overline{a}\,\omega & = & R^2 - |a|^2 \\ & & (a-b)\,\overline{\omega} & + & (\overline{a}-\overline{b})\,\omega & = & |a|^2 - |b|^2 \\ & & (a-c)\,\overline{\omega} & + & (\overline{a}-\overline{c})\,\omega & = & |a|^2 - |c|^2 \end{array}\right.$$

En effectuant l'opération : $L_3 \leftarrow (a-b)\,L_3 - (a-c)\,L_2$, on obtient alors :

$$\big((a-b)(\overline{a}-\overline{c}) - (a-c)(\overline{a}-\overline{b})\big)\,\omega \;=\; (a-b)\big(|a|^2 - |c|^2\big) - (a-c)\big(|a|^2 - |b|^2\big)$$

Ainsi :

$$\omega \;=\; \frac{(a-b)\big(|a|^2 - |c|^2\big) - (a-c)\big(|a|^2 - |b|^2\big)}{(a-b)(\overline{a}-\overline{c}) - (a-c)(\overline{a}-\overline{b})}$$

Or :

- d'une part :

$$\begin{aligned} (a-b)(\overline{a}-\overline{c}) - (a-c)(\overline{a}-\overline{b}) &= (a-b)\,\overline{(a-c)} - (a-c)\,\overline{(a-b)} \\ &= \overline{\overline{(a-b)}\,(a-c)} - \overline{(a-b)}\,(a-c) \\ &= -\Big(\overline{(a-b)}\,(a-c) - \overline{\overline{(a-b)}\,(a-c)}\Big) \\ &= -2i\ \mathrm{Im}\,\Big(\overline{(a-b)} \times \big(-(c-a)\big)\Big) \\ &= 2i\ \mathrm{Im}\,\Big(\overline{(a-b)}\,(c-a)\Big) \end{aligned}$$

- d'autre part :

$$\begin{aligned} & (a-b)\big(|a|^2 - |c|^2\big) - (a-c)\big(|a|^2 - |b|^2\big) \\ = \;& \cancel{a\,|a|^2} - b\,|a|^2 - a\,|c|^2 + b\,|c|^2 - \cancel{a\,|a|^2} + c\,|a|^2 + a\,|b|^2 - c\,|b|^2 \\ = \;& (c-b)\,|a|^2 + (a-c)\,|b|^2 + (b-a)\,|c|^2 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{(c-b)\,|a|^2 + (a-c)\,|b|^2 + (b-a)\,|c|^2}{2i\ \mathrm{Im}\,\Big(\overline{(a-b)}\,(c-a)\Big)} \\ &= -i\,\frac{(c-b)\,|a|^2 + (a-c)\,|b|^2 + (b-a)\,|c|^2}{2\ \mathrm{Im}\,\Big(\overline{(a-b)}\,(c-a)\Big)} \end{aligned}$$

× Enfin, on essaie de simplifier la formule proposée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
& b+\frac{a-b}{2}\left(1+i\,\frac{\operatorname{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) \\
=\; & b+\frac{a-b}{2}\left(1+i\,\frac{\frac{\overline{(c-b)}\,(c-a)+\overline{\overline{(c-b)}\,(c-a)}}{2}}{\operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) \\
=\; & b+\frac{a-b}{2}\left(1+i\,\frac{(\overline{c}-\overline{b})\,(c-a)+(c-b)\,(\overline{c}-\overline{a})}{2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) \\
=\; & b+\frac{a-b}{2}\left(1+i\,\frac{2\,|c|^2-\overline{c}\,a-\overline{a}\,c-\overline{b}\,c-\overline{c}\,b+\overline{b}\,a+\overline{a}\,b}{2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) \\
=\; & b+\frac{a-b}{2}\left(\frac{\operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}{\operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}+i\,\frac{2\,|c|^2-\overline{c}\,a-\overline{a}\,c-\overline{b}\,c-\overline{c}\,b+\overline{b}\,a+\overline{a}\,b}{2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}{\operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} &= \frac{\frac{\overline{(a-b)}\,(c-a)-\overline{\overline{(a-b)}\,(c-a)}}{2i}}{\operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
&= \frac{(\overline{a}-\overline{b})\,(c-a)-(a-b)\,(\overline{c}-\overline{a})}{2i\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
&= -i\,\frac{\overline{a}\,c-\overline{c}\,a-\overline{b}\,c+\overline{c}\,b-\overline{a}\,b+\overline{b}\,a}{2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& b+\frac{a-b}{2}\left(\frac{\operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}{\operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}+i\,\frac{2\,|c|^2-\overline{c}\,a-\overline{a}\,c-\overline{b}\,c-\overline{c}\,b+\overline{b}\,a+\overline{a}\,b}{2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) \\
=\; & b+\frac{a-b}{2}\left(-i\,\frac{\overline{a}\,c-\overline{c}\,a-\overline{b}\,c+\overline{c}\,b-\overline{a}\,b+\overline{b}\,a}{2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}+i\,\frac{2\,|c|^2-\overline{c}\,a-\overline{a}\,c-\overline{b}\,c-\overline{c}\,b+\overline{b}\,a+\overline{a}\,b}{2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) \\
=\; & b+i\,\frac{a-b}{2}\times\frac{-\overline{a}\,c+\cancel{\overline{b}\,c}-\cancel{\overline{b}\,a}+\cancel{\overline{c}\,a}-\overline{c}\,b+\overline{a}\,b+2\,|c|^2-\cancel{\overline{c}\,a}-\overline{a}\,c-\cancel{\overline{b}\,c}-\overline{c}\,b+\cancel{\overline{b}\,a}+\overline{a}\,b}{2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
=\; & b+i\,\frac{(a-b)\times\cancel{2}\,(-\overline{a}\,c-\overline{c}\,b+\overline{a}\,b+|c|^2)}{\cancel{2}\times 2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
=\; & b+i\,\frac{(a-b)\,(-\overline{a}\,c-\overline{c}\,b+\overline{a}\,b+|c|^2)}{2\ \operatorname{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}
\end{aligned}$$

On obtient, en utilisant l'égalité $a\,\overline{a} = |a|^2$:

$$\begin{aligned}
& b + i\,\frac{(a-b)\,(-\overline{a}\,c - \overline{c}\,b + \overline{a}\,b + |c|^2)}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
= \ & b + i\,\frac{-c\,|a|^2 - \overline{c}\,ab + b\,|a|^2 + (a-b)\,|c|^2 + \overline{a}\,bc + \overline{c}\,b^2 - \overline{a}\,b^2}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
= \ & b + i\,\frac{(b-c)\,|a|^2 + (a-b)\,|c|^2 + (\overline{c}-\overline{a})\,b^2 + \overline{a}\,bc - \overline{c}\,ab}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
= \ & b\,\frac{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} + i\,\frac{(b-c)\,|a|^2 + (a-b)\,|c|^2 + (\overline{c}-\overline{a})\,b^2 + \overline{a}\,bc - \overline{c}\,ab}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}
\end{aligned}$$

Or on a déjà calculé :

$$\frac{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} = -i\,\frac{\overline{a}\,c - \overline{c}\,a - \overline{b}\,c + \overline{c}\,b - \overline{a}\,b + \overline{b}\,a}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& b\,\frac{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} + i\,\frac{(b-c)\,|a|^2 + (a-b)\,|c|^2 + (\overline{c}-\overline{a})\,b^2 + \overline{a}\,bc - \overline{c}\,ab}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
= \ & -i\,b\,\frac{\overline{a}\,c - \overline{c}\,a - \overline{b}\,c + \overline{c}\,b - \overline{a}\,b + \overline{b}\,a}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} + i\,\frac{(b-c)\,|a|^2 + (a-b)\,|c|^2 + (\overline{c}-\overline{a})\,b^2 + \overline{a}\,bc - \overline{c}\,ab}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
= \ & -i\,\frac{\overline{a}\,bc - \overline{c}\,ab - c\,|b|^2 + \overline{c}\,b^2 - \overline{a}\,b^2 + a\,|b|^2}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} + i\,\frac{(b-c)\,|a|^2 + (a-b)\,|c|^2 + (\overline{c}-\overline{a})\,b^2 + \overline{a}\,bc - \overline{c}\,ab}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
= \ & i\,\frac{-\cancel{\overline{a}\,bc} + (c-a)\,|b|^2 + \cancel{\overline{c}\,ab} - \cancel{(\overline{c}-\overline{a})\,b^2} + (b-c)\,|a|^2 + (a-b)\,|c|^2 + \cancel{(\overline{c}-\overline{a})\,b^2} + \cancel{\overline{a}\,bc} - \cancel{\overline{c}\,ab}}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
= \ & i\,\frac{(b-c)\,|a|^2 + (c-a)\,|b|^2 + (a-b)\,|c|^2}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
= \ & -i\,\frac{(c-b)\,|a|^2 + (a-c)\,|b|^2 + (b-a)\,|c|^2}{2\ \mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \\
= \ & \omega
\end{aligned}$$

× Notons par ailleurs que le triangle ABC est aussi le triangle BCA. On obtient ainsi les deux expressions suivantes pour ω (en intervertissant le rôle de a, b et c) :

$$\omega = b + \frac{a-b}{2}\left(1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) = c + \frac{b-c}{2}\left(1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)}\right)$$

- **Synthèse**.
  On note :

  × Ω le point d'affixe ω avec :

$$\omega \ = \ b + \frac{a-b}{2}\left(1 + i\ \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) \ = \ c + \frac{b-c}{2}\left(1 + i\ \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)}\right)$$

  × R le réel défini par : $R = |\omega - a|$. Remarquons qu'on a bien $R > 0$ (car un module est positif et car $\omega \neq a$).

  Démontrons que les points A, B et C sont sur le cercle de centre Ω et de rayon R.
  Il s'agit donc de démontrer :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Omega A & = & R \\ \Omega B & = & R \\ \Omega C & = & R \end{array}\right. \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} |\omega - a| & = & R \\ |\omega - b| & = & R \\ |\omega - c| & = & R \end{array}\right.$$

  × On sait déjà, par définition de R : $|\omega - a| = R$. Ainsi :

$$\begin{array}{cl} & R \\ = & |\omega - a| \\ = & \left| b + \dfrac{a-b}{2}\left(1 + i\ \dfrac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) - a \right| \\ = & \left| -2\ \dfrac{a-b}{2} + \dfrac{a-b}{2}\left(1 + i\ \dfrac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) \right| \\ = & \left| \dfrac{a-b}{2}\left(-1 + i\ \dfrac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) \right| \\ = & \dfrac{|a-b|}{2}\left| -1 + i\ \dfrac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \right| \\ = & \dfrac{|a-b|}{2}\ \sqrt{(-1)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right)^2} \qquad \textit{(car } \dfrac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \in \mathbb{R}\textit{)} \\ = & \dfrac{|a-b|}{2}\ \sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right)^2} \end{array}$$

× On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}
|\omega - b| &= \left|\cancel{b} + \frac{a-b}{2}\left(1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right) - \cancel{b}\right| \\
&= \left|\frac{a-b}{2}\left(1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right)\right| \\
&= \frac{|a-b|}{2}\left|1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right| \\
&= \frac{|a-b|}{2}\sqrt{(1)^2 + \left(\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right)^2} \qquad \textit{(car } \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \in \mathbb{R}\textit{)} \\
&= \frac{|a-b|}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)}\right)^2} \\
&= R
\end{aligned}$$

Avec la seconde expression de ω, on obtient :

$$\begin{aligned}
R &= |\omega - b| \\
&= \left|c + \frac{b-c}{2}\left(1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)}\right) - b\right| \\
&= \left|-2\,\frac{b-c}{2} + \frac{b-c}{2}\left(1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)}\right)\right| \\
&= \left|\frac{b-c}{2}\left(-1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)}\right)\right| \\
&= \frac{|b-c|}{2}\left|-1 + i\,\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)}\right| \\
&= \frac{|b-c|}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)}\right)^2} \qquad \textit{(car } \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)} \in \mathbb{R}\textit{)}
\end{aligned}$$

× Enfin :

$$\begin{aligned}
|\omega - c| &= \left| \cancel{c} + \frac{b-c}{2} \left(1 + i \, \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)} \right) - \cancel{c} \right| \\
&= \left| \frac{b-c}{2} \left(1 + i \, \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)} \right) \right| \\
&= \frac{|b-c|}{2} \left| 1 + i \, \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)} \right| \\
&= \frac{|b-c|}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(a-c)}\,(a-b)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(b-c)}\,(a-b)\right)} \right)^2} \qquad \left(\textit{car } \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \in \mathbb{R}\right) \\
&= R
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe un unique cercle circonscrit au triangle ABC et l'affixe de son centre est :

$$b + \frac{a-b}{2} \left(1 + i \, \frac{\mathrm{Re}\left(\overline{(c-b)}\,(c-a)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{(a-b)}\,(c-a)\right)} \right)$$

Commentaire

On a ici détaillé la réponse à cette question pour permettre au lecteur une bonne compréhension des calculs mis en jeu. Néanmoins, il n'est pas pertinent, le jour du concours ou du DS, de s'attarder sur une question comme celle-ci. Les concours consistant à classer, il est bien plus pertinent d'aller chercher des points dans des questions plus abordables et rentables : questions de cours, récurrences, études de fonctions...

□

Exercice 4

Partie I : Convexité

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. On souhaite démontrer dans cette partie :

$$\forall t \in [0,1], \quad \mathrm{e}^{ta+(1-t)b} \ \leqslant \ t\,\mathrm{e}^a + (1-t)\,\mathrm{e}^b \qquad (*)$$

On note g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g : t \mapsto t\,\mathrm{e}^a + (1-t)\,\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{ta+(1-t)b}$.

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Démonstration.
La fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative se situe donc au dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(0) + h'(0)\,(x-0) \\ &= \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\,x \ = \ 1 + x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.}$$

Commentaire

- Le membre droit de l'inégalité souhaitée est une fonction polynomiale de degré 1. Sa représentation graphique est donc une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - (1 + x)$.

□

2. Démontrer que la fonction g est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1], \quad g'(t) \ = \ \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b - (a-b)\,\mathrm{e}^{ta+(1-t)b}$$

Démonstration.

- La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{ta+(1-t)b}$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ car elle est la composée $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ de :
  - × $\varphi_1 : t \mapsto ta + (1-t)b$ qui est :
    - deux fois dérivable sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $\varphi_1\big([0,1]\big) \subset \mathbb{R}$.
  - × $\varphi_2 = \exp$ qui est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } g \text{ est alors deux fois dérivable sur } [0,1] \text{ en tant que combinaison linéaire} \\ \text{de fonctions deux fois dérivables sur } [0,1].\end{array}}$$

- Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 1 \times \mathrm{e}^a + (-1) \times \mathrm{e}^b - (1 \times a + (-1) \times b)\,\mathrm{e}^{ta+(1-t)b} \\ &= \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b - (a-b)\,\mathrm{e}^{ta+(1-t)b} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ g'(t) = \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b - (a-b)\,\mathrm{e}^{ta+(1-t)b}}$$

□

3. Déterminer g''. En déduire que la fonction g' est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Démonstration.

- Soit $t \in [0,1]$.

$$g''(t) \;=\; -(a-b)\,(1 \times a + (-1) \times b)\, \mathrm{e}^{ta+(1-t)b} \;=\; -(a-b)\,(a-b)\, \mathrm{e}^{ta+(1-t)b}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t \in [0,1],\ g''(t) = -(a-b)^2\, \mathrm{e}^{ta+(1-t)b}.}$$

- Soit $t \in [0,1]$.
  × D'une part : $a \neq b$. Donc : $(a-b)^2 > 0$.
  × D'autre part : $\mathrm{e}^{ta+(1-t)b} > 0$.
  On en déduit : $g''(t) = -(a-b)^2\, \mathrm{e}^{ta+(1-t)b} < 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } g' \text{ est donc strictement décroissante sur } [0,1].}$$

□

4. ***a)*** Démontrer, à l'aide de la question ***1.*** : $g'(0) \geqslant 0$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.*** :

$$g'(0) \;=\; \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b - (a-b)\,\mathrm{e}^b \;=\; \mathrm{e}^b \left(\mathrm{e}^{a-b} - 1 - (a-b)\right)$$

- De plus, en appliquant le résultat de la question ***1.*** à $x = a - b$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{a-b} \;\geqslant\; 1 + (a-b)$$

  Donc : $\mathrm{e}^{a-b} - 1 - (a-b) \;\geqslant\; 0$.
- Or : $\mathrm{e}^b \geqslant 0$. On en déduit :

$$g'(0) \;=\; \mathrm{e}^b \left(\mathrm{e}^{a-b} - 1 - (a-b)\right) \;\geqslant\; 0$$

$$\boxed{g'(0) \geqslant 0}$$

□

b) Déterminer le signe de $g'(1)$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.*** :

$$g'(1) \;=\; \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b - (a-b)\,\mathrm{e}^a \;=\; \mathrm{e}^a \left(1 - \mathrm{e}^{b-a} - (a-b)\right)$$

- De plus, en appliquant le résultat de la question ***1.*** à $x = b - a$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{b-a} \;\geqslant\; 1 + (b-a)$$

  Donc : $0 \;\geqslant\; 1 - \mathrm{e}^{b-a} - (a-b)$.
- Or : $\mathrm{e}^a \geqslant 0$. On en déduit :

$$g'(1) \;=\; \mathrm{e}^a \left(1 - \mathrm{e}^{b-a} - (a-b)\right) \;\leqslant\; 0$$

$$\boxed{g'(1) \leqslant 0}$$

□

5. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que : $g'(\alpha) = 0$.

Démonstration.
La fonction g' est :

- $\times$ continue (car dérivable) sur $[0,1]$, car la fonction g est deux fois dérivable sur $[0,1]$ d'après ***2.***,
- $\times$ strictement décroissante sur $[0,1]$ d'après ***3.***

Ainsi, la fonction g' réalise une bijection de $[0,1]$ sur $g'\big([0,1]\big)$ où :

$$g'\big([0,1]\big) \quad = \quad \big[g'(1), g'(0)\big]$$

Or : $0 \in \big[g'(1), g'(0)\big]$. En effet :

- $\times$ d'après ***4.a)*** : $g'(0) \geqslant 0$,
- $\times$ d'après ***4.b)*** : $g'(1) \leqslant 0$.

Le réel 0 admet donc un unique antécédent par g' dans $[0,1]$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, il existe un unique réel } \alpha \in [0,1] \text{ tel que : } g'(\alpha) = 0.}$$

□

6. Dresser le tableau de variations complet de g.

Démonstration.
D'après les questions précédentes, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		α		1
Signe de $g''(x)$		$-$		$-$	
Variations de g'	$g'(0)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g'(1)$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

Détaillons les éléments de ce tableau.

- Tout d'abord, d'après ***3.***, la fonction g' est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall t \in [0,\alpha],\ g'(t) \geqslant g'(\alpha) = 0 \\ \forall t \in \,]\alpha,1],\ g'(t) \leqslant g'(\alpha) = 0 \end{array}\right.$$

- De plus :

$$g(0) \quad = \quad \cancel{0 \times e^a} + (1-0) \times e^b - e^{0\times a+(1-0)\times b} \quad = \quad e^b - e^b \quad = \quad 0$$

- Enfin :

$$g(1) \quad = \quad 1 \times e^a + \cancel{(1-1) \times e^b} - e^{1\times a+(1-1)\times b} \quad = \quad e^a - e^a \quad = \quad 0$$

□

7. Conclure quant à la question posée.

Démonstration.

- D'après la question précédente :
  - × la fonction g est croissante sur $[0, \alpha]$. Ainsi :

$$\forall t \in [0, \alpha],\ g(x) \geqslant g(0) = 0$$

  - × la fonction g est décroissante sur $[\alpha, 1]$. Ainsi :

$$\forall t \in [\alpha, 1],\ g(x) \geqslant g(1) = 0$$

- Finalement : $\forall t \in [0, 1]$, $g(t) \geqslant 0$. D'où, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$t\,\mathrm{e}^a + (1-t)\,\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{ta+(1-t)b} \ \geqslant\ 0$$

$$\boxed{\text{On obtient } (*) : \forall t \in [0,1],\ t\,\mathrm{e}^a + (1-t)\,\mathrm{e}^b \geqslant \mathrm{e}^{ta+(1-t)b}.}$$

□

Partie II : Inégalité arithmético-géométrique

On souhaite démontrer dans cette partie, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \ \leqslant\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp(x_k) \qquad (**)$$

8. En utilisant le résultat $(*)$ de la partie précédente pour $t = \dfrac{1}{2}$, démontrer le résultat $(**)$ demandé pour $n = 2$.

Démonstration.
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
En appliquant le résultat $(*)$ à $t = \dfrac{1}{2}$, $a = x_1$ et $b = x_2$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \exp\left(\dfrac{1}{2}\,x_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) x_2\right) & \leqslant & \dfrac{1}{2}\ \exp(x_1) + \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \exp(x_2) \\ \parallel & & \parallel \\ \exp\left(\dfrac{1}{2}\ (x_1 + x_2)\right) & & \dfrac{1}{2}\big(\exp(x_1) + \exp(x_2)\big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} x_k\right) \ \leqslant\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} \exp(x_k).}$$

□

9. Pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, démontrer, toujours en utilisant $(*)$ pour une valeur de t bien choisie :

$$\exp\left(\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right) \leqslant \frac{n}{n+1}\ \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n+1}\ \mathrm{e}^{x_{n+1}}$$

Démonstration.
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
On applique l'inégalité $(*)$ à $t = \dfrac{n}{n+1}$, $a = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ et $b = x_{n+1}$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \exp\left(\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) + \left(1-\frac{n}{n+1}\right)x_{n+1}\right) & \leqslant & \frac{n}{n+1}\ \exp\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) + \left(1-\frac{n}{n+1}\right)\exp(x_{n+1}) \\ \parallel & & \parallel \\ \exp\left(\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n+1}\ x_{n+1}\right) & & \frac{n}{n+1}\ \exp\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n+1}\ \exp(x_{n+1}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \exp\left(\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right) \leqslant \frac{n}{n+1}\ \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n+1}\ \mathrm{e}^{x_{n+1}}.}$$ $\square$

10. Démontrer le résultat $(**)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \mathscr{P}(n)$

où $\quad \mathscr{P}(n)\ :\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \exp\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \exp(x_k)$.

- **Initialisation** :
  D'après ***8.*** :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} x_k\right) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} \exp(x_k)$$

  D'où $\mathscr{P}(2)$.
- **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$
  (*i.e.* $\forall (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \exp\left(\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1} \exp(x_k)$).
  Soit $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
  - Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) &= \exp\left(\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n+1}\ x_{n+1}\right) \\ &= \exp\left(\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right) \end{aligned}$$

  - Or, d'après la question précédente :

$$\exp\left(\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right) \leqslant \frac{n}{n+1}\ \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n+1}\ \mathrm{e}^{x_{n+1}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) &\leqslant \frac{n}{n+1}\ \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n+1}\ \exp(x_{n+1}) \\
&\leqslant \frac{\cancel{n}}{n+1} \times \frac{1}{\cancel{n}}\sum_{k=1}^{n} \exp(x_k) + \frac{1}{n+1}\ \exp(n+1) \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \exp(x_k) + \exp(x_{n+1})\right) \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \exp(x_k)
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Par principe de récurrence :}\\ \forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp(x_k).\end{gathered}}$$

□

11. *Application.* Démontrer, pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, pour tout $(a_1,\dots,a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Démonstration.
Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.

- On remarque :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)\right)$$

- On applique donc l'inégalité $(**)$ avec, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \ln(a_k)$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc}
\exp\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)\right) & \leqslant & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\exp\left(\ln(a_k)\right) \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} & & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall (a_1,\dots,a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

□

Exercice 5

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$ suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)\, f(y) + f(x+y) \ = \ xy$$

1. **Dans cette question seulement**, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

a) Justifier : $\big(f(0)\big)^2 + f(0) = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?

Démonstration.

- Notons $(*)$ la proposition :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)\, f(y) + f(x+y) \ = \ xy \qquad (*)$$

- On applique l'égalité de l'énoncé à $x = 0$ et $y = 0$. On obtient :

$$f(0) \times f(0) + f(0+0) \ = \ 0 \times 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \big(f(0)\big)^2 + f(0) = 0.}$$

- On en déduit :

$$f(0) \times \big(f(0) + 1\big) \ = \ 0$$

D'où : $f(0) = 0$ `OU` $f(0) + 1 = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } f(0) = 0 \texttt{ OU } f(0) = -1.}$$

□

b) On suppose dans cette question : $f(0) = 0$. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = 0$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'après $(*)$ appliquée à $x = x$ et $y = 0$. On obtient :

$$\cancel{f(x)\, f(0)} + f(x+0) \ = \ x \times 0 \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = 0.}$$

□

c) On suppose dans cette question : $f(0) = -1$.

(i) Démontrer que $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$.

Démonstration.
On applique la proposition $(*)$ à $x = 1$ et $y = -1$. On obtient :

$$f(1)\, f(-1) + f(1-1) \ = \ 1 \times (-1)$$

Ainsi : $f(1)\, f(-1) + f(0) = -1$. D'où :

$$f(1)\, f(-1) \ = \ -1 - f(0) \ = \ -1 - (-1) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(1) = 0 \texttt{ OU } f(-1) = 0.}$$

□

(ii) Démontrer que, si $f(1) = 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t - 1$.

Démonstration.
Supposons : $f(1) = 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On applique la proposition $(*)$ à $x = t - 1$ et $y = 1$. On obtient :

$$f(t-1)\, f(1) + f\big((t - \cancel{1}) + \cancel{1}\big) \ = \ (t-1) \times 1$$

Or : $f(1) = 0$. Ainsi :

$$\cancel{f(t-1) \times 0} + f(t) \ = \ t - 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut, si } f(1) = 0, \text{ alors : } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t - 1.}$$

□

(iii) Démontrer que, si $f(-1) = 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = -t - 1$.

Démonstration.
Supposons : $f(-1) = 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On applique la proposition $(*)$ à $x = t + 1$ et $y = -1$. On obtient :

$$f(t+1)\, f(-1) + f\big((t + \cancel{1}) - \cancel{1}\big) \ = \ (t+1) \times (-1)$$

Or : $f(-1) = 0$. Ainsi :

$$\cancel{f(t+1) \times 0} + f(t) \ = \ -t - 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut, si } f(-1) = 0, \text{ alors : } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = -t - 1.}$$

□

2. Conclure quant au problème posé dans cet exercice.

Démonstration.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**.
  Supposons que f vérifie $\mathscr{P}$.
  Alors, d'après la question ***1.a)***, deux cas se présentent :
  × si $f(0) = 0$, alors, d'après ***1.b)***, $f : x \mapsto 0$.
  × si $f(0) = -1$, alors deux nouveaux cas se présentent :
    - si $f(1) = 0$, alors, d'après ***1.c)(i)***, $f : x \mapsto x - 1$.
    - si $f(-1) = 0$, alors, d'après ***1.c)(ii)***, $f : x \mapsto -x - 1$.
- **Synthèse**.
  Vérifions si les fonction $f_1 : x \mapsto 0$, $f_2 : x \mapsto x - 1$ et $f_3 : x \mapsto -x - 1$ satisfont la proposition $\mathscr{P}$.
  × Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f_1(x)\, f_1(y) + f_1(x+y) \ = \ 0$$

  Ainsi :

$$f_1(1)\, f_1(1) + f_1(1+1) \ \neq \ 1 \times 1$$

  La fonction f_1 ne satisfait donc pas $\mathscr{P}$.

× Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f_2(x)\, f_2(y) + f_2(x+y) &= (x-1)\,(y-1) + (x+y-1) \\ &= x\,y - \cancel{x} - \cancel{y} + \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{y} - \cancel{1} \\ &= x\,y \end{aligned}$$

La fonction f_2 satisfait donc $\mathscr{P}$.

× Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f_3(x)\, f_3(y) + f_3(x+y) &= (-x-1)\,(-y-1) + \big(-(x+y)-1\big) \\ &= x\,y + \cancel{x} + \cancel{y} + \cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{y} - \cancel{1} \\ &= x\,y \end{aligned}$$

La fonction f_3 satisfait donc $\mathscr{P}$.

$$\boxed{\text{Les fonctions réelles d'une variable réelle vérifiant } \mathscr{P} \text{ sont donc exactement les fonctions } f_2 : x \mapsto x-1 \text{ et } f_3 : x \mapsto -x-1.}$$

□