DS4 /117

On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 3. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /14

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' + 2x\,y \;=\; x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

- **1 pt : l'ensemble des solutions de (H) est $\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$**
- **1 pt : $h : x \mapsto \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : h solution de $(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = x$**
- **1 pt : $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est une solution particulière de (E)**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de (E) est $\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x^2} + \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$**

2. On note E l'ensemble des fonctions bornées.
Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{\,|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$.
Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = \sup(A_f)$.

a) Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

- **3 pts : 1 pt par caractéristique**

b) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

- **1 pt : l'ensemble A_f est non vide et majoré car f bornée (donc $|f|$ majorée). On en déduit que $\sup(A_f)$ existe.**
- **1 pt : cas $\lambda = 0$**
- **4 pts : cas $\lambda \neq 0$**
  - × **2 pts : $\|\lambda\cdot f\|_\infty \leqslant |\lambda|\,\|f\|_\infty$**
  - × **2 pts : $\|\lambda\cdot f\|_\infty \geqslant |\lambda|\,\|f\|_\infty$**

Exercice 2 /50

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) \;=\; \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) \;=\; \ln(x) + 2x - 1$$

a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt : la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que...**
- **1 pt :** $h'(x) > 0$

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que : $h(\alpha) = 0$. Justifier : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

- **1 pt : hypothèses théorème de la bijection**
- **1 pt :** $h\big(]0,+\infty[\big) =]-\infty,+\infty[$
- **1 pt :** $0 \in]-\infty,+\infty[$
- **1 pt :** $h\left(\dfrac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1)$
- **1 pt :** $h^{-1} :]-\infty,+\infty[\to]0,+\infty[$ **strictement croissante sur** $]-\infty,+\infty[$

c) Démontrer : $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\, h(x)\, g(x)$.

- **1 pt : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée...**
- **1 pt :** $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\, h(x)\, g(x)$

d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$**,** $g'(x) > 0$
- **1 pt : tableau de variations de h**

x	0		α		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	‖	$+$		$+$	
Variations de h	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt : tableau de variations de g**

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de g	‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \;=\; g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et : $u_n > 0$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**
  - × **1 pt : existence**
  - × **1 pt :** $u_{n+1} > 0$

5. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$ `u0`.

- **1 pt : importation numpy**
- **1 pt : structure fonction**
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : structure itérative**

```python
import numpy as np
def g(x) :
    y = np.exp( (2 - 1/x) * np.log(x) )
    return y
```

```python
def Prem_Suite_u(u0, n) :
    L = [0]*(n+1)
    L[0] = u0
    for i in range(n) :
        L[i+1] = g(L[i])
    return L
```

6. *a)* Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.

- **1 pt :** $\forall x \leqslant 1$, $(x-1)\ln(x) \geqslant 0$
- **1 pt :** $\forall x > 1$, $(x-1)\ln(x) > 0$

b) Démontrer : $\forall x > 0$, $\dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.

- **1 pt :** $\dfrac{g(x)}{x} = \exp\left(\dfrac{x-1}{x}\ \ln(x)\right)$
- **1 pt : question précédente et croissance de la fonction** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$

c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

- **1 pt :** $\forall x > 0$, $g(x) \geqslant x$
- **1 pt :** $g(x) = x \Leftrightarrow x = 1$

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : d'après *4.* :** $u_n \in \mathbb{R}_+^*$
- **1 pt : application de la question précédente à** u_n **pour démontrer que** (u_n) **est croissante**

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**
  - × **1 pt :** $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$
  - × **1 pt : cas** $u_n \in [\frac{1}{2}, \alpha]$
  - × **1 pt : cas** $u_n \in [\alpha, 1]$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

- **1 pt : la suite** (u_n) **est croissante et majorée par** 1**. Elle converge donc vers une limite** ℓ **telle que :** $\ell \leqslant 1$
- **1 pt : par passage à la limite dans l'encadrement de la question précédente :** $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$
- **1 pt : par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient :** $\ell = g(\ell)$
- **1 pt : l'équation** $g(x) = x$ **admet** 1 **pour unique solution d'après *6.c)***

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 > 1$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

- **1 pt : structure du raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : la suite** (u_n) **est croissante et majorée. Elle converge donc vers une limite** L
- **1 pt : comme la suite** (u_n) **est croissante :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $u_n \geqslant u_0$
- **1 pt :** $L \geqslant u_0 > 1$
- **1 pt :** $g(L) = L$**. Absurde ! (car** $L \neq 1$**)**
- **1 pt : la suite** (u_n) **est croissante et non majorée. Elle diverge donc vers** $+\infty$

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

- **1 pt : par stricte décroissance de** g **sur** $]0, \frac{1}{2}[$ **:** $u_1 > 1$ **(d'après un calcul de *8.a)*)**
- **1 pt : par croissance de la suite** (u_n) **:** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $u_n \geqslant u_1 > 1$
- **1 pt : avec le même raisonnement qu'en *9.b)*, on obtient que la suite** (u_n) **diverge vers** $+\infty$

Exercice 3 /36

Partie I - Étude d'une suite implicite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n \ = \ \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$$

1. Rappeler le domaine de définition, de dérivabilité et la valeur de la dérivée de la fonction tan sur son domaine de dérivabilité.

- **1 pt : La fonction** tan **est dériable (et donc définie) sur** $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\,\pi, \frac{\pi}{2} + k\,\pi\right[$**. De plus :**

$$\forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\,\pi, \frac{\pi}{2} + k\,\pi\right[, \ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

2. Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$, les limites de tan en $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+$ et $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-$.
(On pensera à exploiter la périodicité de tan*)*

- **1 pt : changement de variable** $\boxed{t = x - n\pi}$
- **1 pt :** π**-périodicité de** tan
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} \tan(x) = -\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} \tan(x) = +\infty$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir le tableau des variations sur I_n, en justifiant les limites aux bornes, de la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$.

- **1 pt : la fonction** f **est dérivable sur** I_n
- **1 pt :** $f'(x) \geqslant 0$
- **1 pt : tableau de variations complet**

x	$-\frac{\pi}{2} + n\pi$		$\frac{\pi}{2} + n\pi$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	||
Variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ||

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n$ tel que : $\tan(x_n) - x_n = 0$.

- **1 pt : hypothèses du théorème de la bijection**
- **1 pt :** $f(I_n) = \,]-\infty, +\infty[$
- **1 pt :** $0 \in \,]-\infty, +\infty[$

5. Déterminer la valeur de x_0.

- **1 pt :** x_0 **est l'unique solution de l'équation** $f(x) = 0$ **sur** $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- **1 pt :** $f(0) = 0$ **donc** $x_0 = 0$

6. Montrer que (x_n) est strictement croissante.
(on pourra écrire des encadrements pour x_n et x_{n+1})

- **1 pt :** $x_n < \dfrac{\pi}{2} + n\pi < x_{n+1}$

7. Déterminer la limite de (x_n).

- **1 pt :** $-\dfrac{\pi}{2} + n\pi < x_n$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \ -\dfrac{\pi}{2} + n\pi = +\infty$ **donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

8. Montrer que $(x_n - n\pi)$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

- **1 pt :** $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$
- **1 pt :** $x_n - n\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **donc** $\arctan\big(\tan(x_n - n\pi)\big) = x_n - n\pi$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n - n\,\pi \ = \ \lim\limits_{n \to +\infty} \ \arctan(x_n) \ = \ \lim\limits_{t \to +\infty} \ \arctan(t) \ = \ \dfrac{\pi}{2}$

Partie II - Informatique

9. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant n\,\pi$.

- **1 pt :** $f(x_n) \geqslant f(n\pi)$
- **1 pt :** $x_n \in I_n$ **et** $n\pi \in I_n$
- **1 pt : la bijection réciproque de la restriction de f à I_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car de même monotonie que f.**

10. $(*)$ Écrire une fonction **Python**, nommée `dichotomie`, qui prend en paramètre en entier `n` et un réel `eps` strictement positif, et qui renvoie une valeur approchée de $x_{\mathtt{n}}$ à `eps` près.
On proposera un algorithme impératif.

- **1 pt : structure fonction**
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt :** `c = (a+b)/2`
- **1 pt : structure itérative**
- **2 pts : structure conditionnelle**

```python
def approx_x(n, eps) :
    a = n * np.pi
    b = l_n
    while (b-a) > eps :
        c = (a+b)/2
        if np.tan(c) - c < 0 :
            a = c
        else :
            b = c
    return (a+b)/2
```

11. $(*)$ Proposer une version récursive de l'algorithme précédent.

- **1 pt : structure de fonction**
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : récursivité**

```python
def approx_x(a, b, n, eps) :
    g = a
    d = b
    c = (g+d)/2
    if (d-g) <= eps :
        return (g+d)/2
    if np.tan(c) - c < 0 :
        return approx_x( c, b, n, eps )
    else :
        return approx_x( a, c, n, eps )
```

12. ***a)*** Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $p \in \mathbb{N}$: $\dfrac{\ell_n - n\pi}{2^p} \leqslant \varepsilon$.

- **2 pts : l'ensemble des solutions de cette inéquation est :** $\left[\!\left[\left\lceil \dfrac{\ln\left(\frac{\ell_n - n\pi}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \right\rceil, +\infty \right[\!\right[$ **(dont 1 pt pour la stricte croissance de** $\ln$ **sur** $\mathbb{R}_+^*$**)**

b) $(*)$ Quelle est la complexité de l'algorithme dichotomique présentée en question ***10.*** ? Justifier.

- **1 pt : La complexité de l'algorithme est donc** $\left\lceil \dfrac{\ln\left(\frac{\ell_n - n\pi}{\text{eps}}\right)}{\ln(2)} \right\rceil$**. Il s'agit d'une complexité logarithmique en la longueur de l'intervalle.**
- **2 pts : explications**

Exercice 4 /17

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie.

- **1 pt : La fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{1+t}$ est continue sur le segment $[0,1]$.**

2. Calculer I_0 et I_1.

- **1 pt :** $I_0 = \ln(2)$
- **2 pts :** $I_1 = 1 - \ln(2)$
  × **1 pt :** $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$
  × **1 pt : résultat**

3. *a)* En effectuant le changement de variable $y = 1+t$, démontrer :

$$I_2 = \int_1^2 y - 2 + \frac{1}{y}\, dy$$

- **1 pt : changement de variable** $\boxed{y = 1+t}$

b) En déduire la valeur de I_2.

- **1 pt :** $I_2 = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$

4. Démontrer, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$$

- **1 pt :** $-t \neq 1$

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt$$

- **1 pt : linéarité de l'intégrale**

6. Conclure, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 t^k\, dt = \frac{1}{k+1}$
- **1 pt : reste du calcul**

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^{n+1}$.

- **1 pt : décroissance de la fonction inverse sur** $\mathbb{R}_+^*$
- **1 pt :** $t^{n+1} \geqslant 0$
- **1 pt : transitivité**

b) En déduire l'encadrement :

$$0 \ \leqslant \ I_{n+1} \ \leqslant \ \frac{1}{n+2}$$

- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant 1)$
- **1 pt : reste du calcul**

8. Justifier que la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

- **1 pt : théorème d'encadrement**

9. On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

- **1 pt : explications de** $\lim\limits_{n\to+\infty} \ (-1)^{n+1}\, I_{n+1} = 0$
- **1 pt :** (u_n) **converge et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \ u_n = \ln(2)$