DS6

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 1. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. (*) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y'' + y \ = \ \cos(x)$$

Exercice 2

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note : $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A + 2\,I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note : $E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.
Déterminer $E_{-2}(A)$.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

4. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -2I + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-2)^{n-1}\big(2\,(n-1)\,I + n\,A\big)$.

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Exercice 3

On note I l'intervalle $[0,1]$. Soient f et g deux fonctions continues sur I, **à valeurs dans** I.
On supposera dans tout le problème que f et g commutent, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \quad (f \circ g)(x) \ = \ (g \circ f)(x)$$

Le but de ce problème est de répondre à la question suivante :

(Q) : « f et g possèdent-elles un point fixe en commun dans I ? »

Dans tout le problème, on notera $h : x \mapsto f(x) - x$.

Partie I - Ensemble des points fixes

1. Montrer que la fonction f possède au moins un point fixe dans I.

Pour les mêmes raisons, la fonction g possède également au moins un point fixe dans I.
On note F (resp. G) l'ensemble des points fixes de f (resp. de g) dans I.

2. Montrer que G est stable par f, c'est-à-dire : $\forall x \in G$, alors $f(x) \in G$.
On montrerait de même, et on l'admettra ici, que F est stable par g.

3. Montrer que F possède une borne inférieure m et une borne supérieure M.

4. Rappeler la caractérisation de la borne inférieure :

$$m \ = \ \inf(F) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

5. En déduire qu'il existe une suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de F telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell_n - m \leqslant \dfrac{1}{n}$.

6. En déduire : $\ell_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} m$. Puis : $m \in F$.
On montrerait de même, et on l'admettra ici, que $M \in F$.

Partie II - Une condition suffisante : la stricte décroissance de f sur I

On suppose, **uniquement dans cette partie**, que la fonction f, en plus d'être continue sur I, est strictement décroissante sur I.

7. Montrer qu'il existe un unique élément $\ell \in F$.

8. Démontrer : $g(\ell) \in F$.

9. Déduire des deux questions précédentes : $\ell \in G$.

10. Conclure quant à la question (Q) dans ce cas.

Partie III - Une condition suffisante (bis) : la stricte croissance de f sur I

On suppose, **uniquement dans cette partie**, que la fonction f, en plus d'être continue sur I, est strictement croissante sur I. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in G \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

11. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in G$.

12. On suppose : $x_1 \geqslant x_0$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \geqslant x_n$. Que se passe-t-il si $x_1 \leqslant x_0$?

13. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\hat{\ell}$ et : $\hat{\ell} \in F$.

14. Démontrer : $\hat{\ell} \in G$.

15. Conclure quant à la question (Q) dans ce cas.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On note $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$ l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des complexes ω vérifiant : $\omega^n = 1$.
- On dit qu'un complexe ω est une racine **primitive** $n^{\text{ème}}$ de l'unité si :
  1) $\omega^n = 1$,
  2) $\forall q \in [\![1, n-1]\!]$, $\omega^q \neq 1$.
  En d'autres termes, une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité pour laquelle n est la plus petite puissance q (non nulle) telle que : $\omega^q = 1$.
- On note P_n l'ensemble des racines primitives $n^{\text{ème}}$ de l'unité.
- On admet enfin le résultat suivant.

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3, \qquad \left.\begin{array}{c} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ (a \mid c)$$

Partie I - Caractérisation des racines primitives $n^{\text{ème}}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Expliciter sans démonstration les ensembles P_1, P_2, P_3 et P_4.

2. ***a)*** Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que : $k \wedge n \neq 1$. Démontrer : $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \notin P_n$.

b) Réciproquement, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que : $k \wedge n = 1$. En raisonnant par l'absurde, justifier : $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

On a donc prouvé :

$$P_n \ = \ \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!],\ k \wedge n = 1 \right\}$$

En particulier, $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ est une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

Soient z_1 et z_2 deux racines primitives $n^{\text{ème}}$. On admet qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} u \wedge n \ = \ 1 \\ {z_1}^u = z_2 \end{cases}$$

Partie II - Définition et premières propriétés des polynômes cyclotomiques

Dans la suite de ce problème, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique par :

$$\Phi_n \;=\; \prod_{\omega \in P_n} (X - \omega) \;=\; \prod_{\substack{k=0 \\ k \wedge n = 1}}^{n-1} (X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^n - 1$.

4. Écrire sous forme développée Φ_2, Φ_3, Φ_4.
Vérifier en particulier que ces polynômes sont à coefficients entiers.

5. ***a)*** Justifier : $\Phi_5(X) = \dfrac{X^5 - 1}{X - 1}$.

b) En déduire une forme développée de Φ_5.

c) Plus généralement, si $p \in [\![2, +\infty[\![$ est un nombre premier, calculer Φ_p (on exprimera Φ_p sous forme de somme).

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Si d est un diviseur (positif) de n, on note :

$$E_d \;=\; \{k \in [\![0, n-1]\!] \mid k \wedge n = d\}$$

Justifier : $[\![0, n-1]\!] = \displaystyle\bigcup_{\substack{d=1 \\ d \mid n}}^{n} E_d$.

b) Soit d un diviseur de n. On note :

$$F_d \;=\; \left\{k \in [\![0, \tfrac{n}{d} - 1]\!] \mid k \wedge \tfrac{n}{d} = 1\right\}$$

Démontrer que E_d et F_d sont en bijection.

c) Démontrer :

$$\prod_{k \in E_d} (X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}) \;=\; \Phi_{\frac{n}{d}}(X)$$

d) En déduire :

$$X^n - 1 \;=\; \prod_{\substack{d=1 \\ d \mid n}}^{n} \Phi_d(X)$$

7. Le but de cette question est de montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Démontrer l'initialisation.

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Supposons : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$. On cherche à démontrer $\mathscr{P}(n)$.

b) Énoncer (sans démonstration) le théorème de division euclidienne sur $\mathbb{K}[X]$.

c) On admet que le théorème de division euclidienne est encore valable sur $\mathbb{Z}[X]$ si le polynôme diviseur est unitaire. Comparer la division euclidienne de $X^n - 1$ par :

$$B \;=\; \prod_{\substack{d=1 \\ d \mid n}}^{n-1} \Phi_d$$

avec la question ***6.d)***, et conclure.
(On justifiera bien qu'on peut appliquer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$, et on précisera bien où on utilise l'hypothèse de récurrence)