DS1 /87

On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 6. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 /12

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. Tout nombre réel x est inférieur ou égal à son sinus.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant \sin(x)$
- **1 pt :** $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 > \sin(x_0)$
- **1 pt : démo de la proposition est fausse (par exemple avec :** $x_0 = 2$**)**

2. $(*)$ Tout réel de carré strictement supérieur à 9, est lui-même de valeur absolue supérieure ou égale à 3.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 > 9) \ \Rightarrow\ \big(|x| \geqslant 3\big)$
- **1 pt :** $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ (x_0^2 > 9)\ \texttt{ET}\ \big(|x_0| < 3\big)$
- **1 pt : démo de la proposition est vraie (par croissance de la fonction** $\sqrt{\cdot}$ **sur** $\mathbb{R}_+$**)**

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $\exists (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,\ (z_1 \neq z_2)\ \texttt{ET}\ (z_1^2 - 3z_1 + 3 = 0)\ \texttt{ET}\ (z_2^2 - 3z_2 + 3 = 0)$
- **1 pt :** $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,\ (z_1 = z_2)\ \texttt{OU}\ (z_1^2 - 3z_1 + 3 \neq 0)\ \texttt{OU}\ (z_2^2 - 3z_2 + 3 \neq 0)$
- **1 pt : démo de la proposition est fausse (le polynôme** $X^2 - 3X + 3$ **n'admet pas de racine réelle car** $\Delta = -3$**)**

4. La composée de deux fonctions paires est paire.

- **1 pt :** $\forall (f,g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2,\ \Big(\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\big)\ \texttt{ET}\ \big(\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = g(x)\big)\Big)\ \Rightarrow\ \big(\forall x \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(-x) = (g \circ f)(x)\big)$
- **1 pt :** $\exists (f_0, g_0) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2, \big(\forall x \in \mathbb{R}, f_0(-x) = f_0(x)\big)\ \texttt{ET}\ \big(\forall x \in \mathbb{R}, g_0(-x) = g_0(x)\big)\ \texttt{ET}\ \big(\exists x_0 \in \mathbb{R}, (g_0 \circ f_0)(-x_0) \neq (g_0 \circ f_0)(x_0)\big)$
- **1 pt : démo de la proposition est vraie**

Exercice 2 /6

Déterminer, pour chacune des assertions suivantes, si elle est vraie ou fausse. Justifier toutes vos réponses.

1. $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ m \leqslant x^2 \leqslant M$

- **2 pts : démo de la proposition est fausse (par exemple avec : $x_0 = \sqrt{|M+1|}$)**

2. $(*)$ $\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 2) \Rightarrow (x \geqslant 3)$

- **1 pt : démo de la proposition est fausse (par exemple avec : $x_0 = \frac{5}{2}$)**

3. $\exists ! x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0$

- **1 pt : démo de la proposition est fausse (par exemple avec : $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $x_2 = \frac{\pi}{2}$)**

4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

- **1 pt : cas $n = 3k$ et $n = 3k+1$**
- **1 pt : cas $n = 3k+2$**

Exercice 3 /11

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. Paramètre : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Propositions : $P(f)$: $\big(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y)\big)$ et $Q(f)$: $\big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\big)$.

- **1 pt : $P(f) \ \Rightarrow\ Q(f)$ (utilisation de $P(f)$ avec $y = 1$)**
- **1 pt : $Q(f) \ \Rightarrow\ P(f)$**

2. $(*)$ Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P(x)$: $(x^2 + 4x - 5 = 0)$ et $Q(x)$: $(\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 0)$.

- **1 pt : $\mathcal{D}_P = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_Q = \,]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$**
- **1 pt : $P(x) \ \not\Rightarrow\ Q(x)$ (par exemple : $0 \in \mathcal{D}_P$ et $0 \notin \mathcal{D}_Q$)**
- **1 pt : $Q(x) \ \Rightarrow\ P(x)$ (injectivité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$)**

3. Paramètre : $n \in \mathbb{Z}$.
Propositions : $P(n)$: (n multiple de 2) et $Q(n)$: (n est multiple de 4 ou de 6).

- **1 pt : $P(n) \ \not\Rightarrow\ Q(n)$ (par exemple avec $n_0 = 2$)**
- **2 pts : $Q(n) \ \Rightarrow\ P(n)$ (1 pt par cas)**

4. Paramètre : $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P\big((u_n), \ell\big)$: $\big((u_n)$ converge vers $\ell\big)$ et $Q\big((u_n), \ell\big)$: $(\forall n \geqslant 3,\ \frac{1}{n^2} \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n})$.

- **2 pts : $P\big((u_n), \ell\big) \ \not\Rightarrow\ Q\big((u_n), \ell\big)$ (par exemple, avec $v_n = \frac{1}{n^3}$)**
- **1 pt : $Q\big((u_n), \ell\big) \ \Rightarrow\ P\big((u_n), \ell\big)$ (utilisation du théorème d'encadrement)**

Exercice 4 /22

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\sqrt{x\,(x-3)} = \sqrt{3x-5}$

- **1 pt :** $\mathcal{D}_{(1)} = [3, +\infty[$
- **1 pt : injectivité de la fonction** $\sqrt{\cdot}$ **sur** $\mathbb{R}_+$
- **1 pt :** $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$
- **1 pt :** $x \geqslant 3$
- **1 pt : l'ensemble des solutions de *(1)* est :** $\{5\}$

2. $(*)$ $\big(\ln(x)\big)^2 = -2 - 3\,\ln(x)$

- **1 pt :** $\mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}_+^*$
- **1 pt : changement de variable** $\boxed{t = \ln(x)}$
- **1 pt :** $t^2 + 3t + 2 = (t+1)(t+2)$
- **1 pt : l'ensemble des solutions de *(2)* est** $\{\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-2}\}$

3. $(*)$ $2x - 7 \leqslant \sqrt{4x-11}$

- **1 pt :** $\mathcal{D}_{(3)} = \left[\frac{11}{4}, +\infty\right[$
- **1 pt : cas** $x < \dfrac{7}{2}$ **(inégalité *(3)* vérifiée sur** $\left[\frac{11}{4}, \frac{7}{2}\right[$**)**
- **3 pts : cas** $x \geqslant \dfrac{7}{2}$
  - × **1 pt : stricte croissance de la fonction** $x \mapsto x^2$ **sur** $\mathbb{R}_+$
  - × **1 pt :** $P(X) = X^2 - 8X + 15$ **admet deux racines réelles distinctes :** 3 **et** 5
  - × **1 pt : inégalité *(3)* vérifiée sur** $\left[\frac{7}{2}, 5\right]$
- **1 pt : l'ensemble des solutions de *(3)* est :** $\left[\frac{11}{4}, 5\right]$

4. $|x-1| > |x^2-2|$

- **2 pts : cas** $x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$
  - × **1 pt : le polynôme** $P(X) = X^2 + X - 3$ **admet exactement deux racines réelles :** $-\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ **et** $-\frac{1-\sqrt{13}}{2}$**.**
  - × **1 pt : tous les réels de** $\left]-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\sqrt{2}\right[$ **sont solutions de *(4)***
- **2 pts : cas** $x \in \left]-\sqrt{2}, 1\right]$
  - × **1 pt : le polynôme** $Q(X) = X^2 - X - 1$ **admet exactement deux racines réelles :** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **et** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
  - × **1 pt : tous les réels de l'intervalle** $\left]-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[$ **sont solutions de *(4)***
- **1 pt : cas** $x \in \left]1, \sqrt{2}\right]$ **(tous les réels de** $\left]-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \sqrt{2}\right[$ **sont solutions de *(4)*)**
- **1 pt : cas** $x \in \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ **(tous les réels de l'intervalle** $\left]\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ **sont solutions de *(4)*)**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de *(4)* est :** $\left]-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$

Exercice 5 /25

On note (u_n) la suite de Fibonacci. Elle est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1. $(*)$ Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 1$.

- **3 pts : récurrence ($\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathscr{P}(n)$)**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
    - **- 1 pt :** $u_{n+2} \geqslant 2n - 1$
    - **- 1 pt :** $2n - 1 \geqslant n + 1$
- **1 pt : $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vérifiées**

2. Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{2k} \ = \ u_k \left(u_k + 2\, u_{k-1}\right) \quad \text{et} \quad u_{2k+1} \ = \ (u_{k+1})^2 + (u_k)^2$$

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_{n+1})^2 - u_n\, u_{n+2} = (-1)^n$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

5. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} = u_{2n}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

6. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

7. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n-k}{k}$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité (dont 1 pt pour le triangle de Pascal)**

Exercice 6 /11

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f \circ f)(n) < f(n+1)$.

1. Démontrer : $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$, $(k \geqslant n) \Rightarrow \big(f(k) \geqslant n\big)$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**
  - × **1 pt :** $f\big(f(k-1)\big) < f(k)$ **par définition de** f
  - × **1 pt :** $k - 1 \geqslant n$ **donc** $f(k-1) \geqslant n$**. Et donc :** $f\big(f(k-1)\big) \geqslant n$
  - × **1 pt : par transitivité** $f(k) > n$ **donc** $f(k) \geqslant n + 1$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) \geqslant n$.

- **1 pt : on applique *1.* à** $k = n$**, ce qui est licite car** $n \geqslant n$

3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante.

- **1 pt : il s'agit de démontrer que la suite** $\big(f(n)\big)$ **est strictement croissante**
- **1 pt : d'après la question précédente appliquée à** $f(n)$ **(ce qui est licite car** $f(n) \in \mathbb{N}$**),** $f\big(f(n)\big) \geqslant f(n)$
- **1 pt : par définition de** f **et par transitivité,** $f(n+1) > f\big(f(n)\big) \geqslant f(n)$

4. En conclure : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.

- **1 pt : d'après *2.*,** $f(n) \geqslant n$
- **2 pts : en procédant par l'absurde,** $f(n) \leqslant n$