# DS2

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

## Exercice 1 : Cours

***1.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ ? Le démontrer.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation** :
  - × D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{0} k^2 = \sum\limits_{k\in\varnothing} k^2 = 0$.
  - × D'autre part : $\dfrac{0\times(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$.

  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$)

$$
\begin{aligned}
\text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2\Big) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n+1}{6}\,\big(n(2n+1)+6(n+1)\big) \\
&= \frac{n+1}{6}\,(2n^2+7n+6) \\
&= \frac{n+1}{6}\,(n+2)(2n+3)
\end{aligned}
$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

□

*2.* Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

*Démonstration.*
Soit $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ telles que :
  ***1)*** $f = g + h$,
  ***2)*** $g$ est paire,
  ***3)*** $h$ est impaire.

  On remarque tout d'abord, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ (car l'intervalle $I$ est symétrique par rapport à 0) et :

$$\begin{array}{rcll} f(-x) & = & (g+h)(-x) & \textit{(d'après } \mathbf{1)}\textit{)} \\ & = & g(-x) + h(-x) & \\ & = & g(x) - h(x) & \textit{(car } g \textit{ paire et } h \textit{ impaire)} \end{array}$$

  On obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ g(x) & - & h(x) & = & f(-x) \end{array}\right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} g(x) & + & h(x) & = & f(x) & & \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) & + & f(-x) \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,g(x) & & & = & f(x) & + & f(-x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) & + & f(-x) \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} g(x) & = & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) & = & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}\right.$$

- **Synthèse** : On pose

$$g_0 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad h_0 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$$

  On remarque alors :

  × tout d'abord : $f = g_0 + h_0$. En effet, pour tout $x \in I$ :

$$(g_0+h_0)(x) = g_0(x) + h_0(x) = \frac{f(x) + \cancel{f(-x)}}{2} + \frac{f(x) - \cancel{f(-x)}}{2} = \frac{\cancel{2}\,f(x)}{\cancel{2}} = f(x)$$

  × ensuite, $g_0$ est paire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$g_0(-x) = \frac{f(-x) + f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g_0(x)$$

  × enfin, $h_0$ est impaire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$h_0(-x) = \frac{f(-x) - f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h_0(x)$$

  Ainsi, toute fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. □

***3.*** Soit $E$ un ensemble. Soient $A$ et $B$ des parties de $E$.

***a)*** $(*)$ Démontrer :
$$A = A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad B \subset A$$

*Démonstration.*
Il s'agit ici de démontrer une équivalence.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons : $A \cup B = A$. Démontrons : $B \subset A$.
Soit $x \in B$.
Comme $B \subset A \cup B$, alors : $x \in A \cup B$.
Or : $A \cup B = A$. Ainsi : $x \in A$.

($\Leftarrow$) Supposons : $B \subset A$. Démontrons : $A \cup B = A$.
On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in A \cup B$.
Alors : $x \in A$ ou $x \in B$. Deux cas se présentent alors :

× si $x \in A$, alors on a bien : $x \in A$.

× si $x \notin A$, alors, comme $x \in A \cup B$, on a forcément : $x \in B$.
Or $B \subset A$. Comme $x \in B$, on en déduit que $x \in A$.

($\supset$) $A \cup B \supset A$

$$\boxed{\text{Finalement : } A = A \cup B \Rightarrow B \subset A.}$$

□

***b)*** Démontrer : $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

*Démonstration.*
Soit $x \in E$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in A \cap B$ alors :

× $x \in A$ et donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$.

× $x \in B$ et donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$.

Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A \cap B}(x) & = & 1 & \textit{(puisque } x \in A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)\textit{)} \end{array}$$

Si $x \in A \cap B$, $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.

- Si $x \notin A \cap B$ alors $x \in \overline{A \cap B}$ est vérifiée ou encore $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
  Deux cas se présentent :
  × si $x \in \overline{A}$ alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A \cap B}(x) & = & 0 & \textit{(puisque } x \notin A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \end{array}$$

  × si $x \notin \overline{A}$ alors comme $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ on a forcément $x \in \overline{B}$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A \cap B}(x) & = & 0 & \textit{(puisque } x \notin A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \end{array}$$

  Si $x \notin A \cap B$, $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.

□

***4.*** $(*)$ On note $f$ la fonction définie par $f : x \mapsto \ln(1 + x^5)$.
Démontrer que la fonction $f$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

*Démonstration.*
La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ de :

- $f_1 : x \mapsto 1 + x^5$ qui est :
  × dérivable sur $]-1, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
  × telle que : $f_1\big(\,]-1, +\infty[\,\big) \subset \,]0, +\infty[$.
- $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } ]-1, +\infty[.}$$

□

***5.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer la somme suivante : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a^{i+j}$.

*Démonstration.*
On calcule :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a^{i+j} = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=i}^{n} a^{i+j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left( a^i \sum_{j=i}^{n} a^j \right)$$

Deux cas se présentent alors.

- si $a = 1$, alors :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left( a^i \sum_{j=i}^{n} a^j \right) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left( 1 \times \sum_{j=i}^{n} 1 \right) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k & \textit{(avec le changement d'indice } \boxed{k = n - i + 1}\textit{)} \\ & = & \dfrac{n\,(n+1)}{2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } a = 1, \text{ alors : } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a^{i+j} = \frac{n\,(n+1)}{2}.}$$

- si $a \neq 1$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(a^i \sum_{j=i}^{n} a^j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(a^i \times a^i\ \frac{1-a^{n-i+1}}{1-a}\right) && \textit{(car } a \neq 1\textit{)}\\
&= \frac{1}{1-a}\sum_{i=1}^{n} a^{2i}\left(1-a^{n-i+1}\right)\\
&= \frac{1}{1-a}\sum_{i=1}^{n}\left(a^{2i}-a^{n+i+1}\right)\\
&= \frac{1}{1-a}\left(\sum_{i=1}^{n}(a^2)^i - a^{n+1}\sum_{i=1}^{n} a^i\right) && \textit{(par linéarité de la somme)}\\
&= \frac{1}{1-a}\left(a^2\ \frac{1-(a^2)^n}{1-a^2} - a^{n+1}\times a\ \frac{1-a^n}{1-a}\right) && \textit{(car, comme } a \neq 1, \textit{ alors : } a^2 \neq 1\textit{)}\\
&= \frac{a^2}{(1-a)^2}\left(\frac{1-a^{2n}}{1+a} - a^n\ (1-a^n)\right)\\
&= \frac{a^2}{(1-a)^2}\times\frac{1-a^{2n}-a^n\,(1-a^n)\,(1+a)}{1+a}\\
&= \frac{a^2}{(1-a)^2\,(1+a)}\ \left(1-a^{2n}-a^n\,(1+a-a^n-a^{n+1})\right)\\
&= \frac{a^2}{(1-a)^2\,(1+a)}\ \left(1-\cancel{a^{2n}}-a^n-a^{n+1}+\cancel{a^{2n}}+a^{2n+1}\right)\\
&= \frac{a^2}{(1-a)^2\,(1+a)}\ \left((1-a^n)-a^{n+1}\,(1-a^n)\right)\\
&= \frac{a^2\,(1-a^n)}{(1-a)^2\,(1+a)}\ \left(1-a^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, si } a \neq 1, \text{ alors : } \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a^{i+j} = \frac{a^2\,(1-a^n)\,(1-a^{n+1})}{(1-a)^2\,(1+a)}.}$$

□

# Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, a_{n-k}$$

***6. a)*** Calculer $a_0$, $a_1$, $a_2$ et $a_3$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $a_0 = \dfrac{1}{0+1}\dbinom{0}{0} = 1$.

$$\boxed{a_0 = 1}$$

- Ensuite : $a_1 = \dfrac{1}{1+1}\dbinom{2}{1} = \dfrac{1}{2} \times 2 = 1$.

$$\boxed{a_1 = 1}$$

- De plus :

$$a_2 = \frac{1}{2+1}\binom{4}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 2}{\cancel{2 \times 2}} = 2$$

$$\boxed{a_2 = 2}$$

- Enfin :

$$a_3 = \frac{1}{3+1}\binom{6}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{6} \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3 \times 2}}{\cancel{(3 \times 2)} \times \cancel{(3 \times 2)}} = 5$$

$$\boxed{a_3 = 5}$$

□

***b)*** Calculer $S_0$, $S_1$, $S_2$ et $S_3$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $S_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} a_k\, a_{0-k} = a_0 \times a_0 = 1$.

$$\boxed{S_0 = 1}$$

- Ensuite, toujours d'après la question précédente :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k\, a_{1-k} = a_0\, a_1 + a_1\, a_0 = 2$$

$$\boxed{S_1 = 2}$$

- De plus :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k\, a_{2-k} = a_0\, a_2 + a_1\, a_1 + a_2\, a_0 = 5$$

$$\boxed{S_2 = 5}$$

- Enfin :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{3} a_k\, a_{3-k} = a_0\, a_3 + a_1\, a_2 + a_2\, a_1 + a_3\, a_0 = 14$$

$$\boxed{S_3 = 14}$$

□

*c)* Que remarque-t-on ?

*Démonstration.*
On remarque :

$$S_0 = a_1, \qquad S_1 = a_2, \qquad S_2 = a_3$$

$$\boxed{\text{Il semble donc : } \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = a_{n+1}.}$$

□

***7. a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Par un changement d'indice bien choisi, démontrer :

$$T_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, a_{n-k}$$

*Démonstration.*
Par définition de $T_n$ :

$$\begin{aligned} T_n \ &= \ \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, a_{n-k} \\ &= \ \sum_{i=0}^{n} (n-i)\, a_{n-i}\, a_i && \textit{(avec le changement d'indice } \boxed{i = n-k}\textit{)} \\ &= \ \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_{n-k}\, a_k && \textit{(car la variable } k \textit{ est muette)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, a_{n-k}.}$$

□

***b)*** En déduire : $2\, T_n = n\, S_n$.

*Démonstration.*
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} T_n \ &= \ \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, a_{n-k} \\ &= \ n \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, a_{n-k} && \textit{(par linéarité de la somme)} \\ &= \ n\, S_n - T_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } 2\, T_n = n\, S_n.}$$

□

***8.*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $(n+2)\, a_{n+1} = 2\,(2n+1)\, a_n$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'une part :

$$\begin{aligned} 2\,(2n+1)\, a_n \ &= \ 2\,(2n+1) \times \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \ \frac{2\,(2n+1)}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} \\ &= \ \frac{2\,(2n+1) \times (2n)!}{(n+1) \times n!\ n!} \ = \ \frac{2\,(2n+1)!}{(n+1)!\, n!} \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
(n+2)\,a_{n+1} &= \cancel{(n+2)}\frac{1}{\cancel{n+2}}\binom{2\,(n+1)}{n+1} \\
&= \binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,\big((2n+2)-(n+1)\big)!} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)\times(2n+1)!}{(n+1)\,n!\times(n+1)!} \\
&= \frac{2\,\cancel{(n+1)}\times(2n+1)!}{\cancel{(n+1)}\;n!\;(n+1)!} \\
&= \frac{2\,(2n+1)!}{n!\,(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\,a_{n+1} = 2\,(2n+1)\,a_n.}$$

□

***9. a)*** En utilisant les questions précédentes, démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} + S_{n+1} \ = \ a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} k\,a_k\,a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k\,a_{n+1-k} && \textit{(par définition de } T_{n+1} \textit{ et } S_{n+1}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\,a_k\,a_{n+1-k} && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= (0+1)\,a_0\,a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)\,a_k\,a_{n+1-k} \\
&= a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)\,a_k\,a_{n+1-k} && \textit{(d'après } \textbf{1.a)}\textit{)} \\
&= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2)\,a_{k+1}\,a_{n-k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \big(2\,(2k+1)\,a_k\big)\,a_{n-k} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= a_{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n} \big(2k\,a_k a_{n-k} + a_k\,a_{n-k}\big)
\end{aligned}$$

Par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= a_{n+1} + 2\left(2 \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}\right) \\ &= a_{n+1} + 2\,(2\,T_n + S_n) \quad \textit{(par définition de } T_n \textit{ et } S_n\textit{)} \\ &= a_{n+1} + 2\,(n\,S_n + S_n) \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\ &= a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n}$$

□

***b)*** En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+3}{2}\, S_{n+1} \ = \ a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***7.b)*** : $2\,T_{n+1} = (n+1)\,S_{n+1}$. Donc :

$$T_{n+1} \ = \ \frac{n+1}{2}\, S_{n+1}$$

- Or, d'après la question précédente :

$$T_{n+1} + S_{n+1} \ = \ a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n$$

On en déduit :

$$a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n \ = \ T_{n+1} + S_{n+1} \ = \ \frac{n+1}{2}\, S_{n+1} + S_{n+1} \ = \ \frac{n+3}{2}\, S_{n+1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+3}{2}\, S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n.}$$

□

***10.*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1}$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$ : $S_n = a_{n+1}$.

- ▸ **Initialisation** :
  D'après ***1.a)*** : $a_{0+1} = a_1 = 1$.
  D'après ***1.b)*** : $S_0 = 1$. Ainsi : $S_0 = a_1$.
  D'où : $\mathscr{P}(0)$.
- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* : $S_{n+1} = a_{n+2}$).
  On remarque :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{2}{n+3}\big(a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n\big) \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{2}{n+3}\big(a_{n+1} + 2\,(n+1)\,a_{n+1}\big) \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{2}{n+3}\,\big(a_{n+1} + (2n+2)\,a_{n+1}\big) \\ &= \frac{2}{n+3}\,(2n+3)\,a_{n+1} \end{aligned}$$

Or, d'après ***8.*** :

$$(n+3)\,a_{n+2} \;=\; 2\,\big(2(n+1)+1\big)\,a_{n+1} \;=\; 2\,(2n+3)\,a_{n+1}$$

On en déduit :

$$S_{n+1} \;=\; \frac{\cancel{(n+3)}\;a_{n+2}}{\cancel{n+3}} \;=\; a_{n+2}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = a_{n+1}.}$$

□

***11.*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.
*On pourra utiliser une récurrence forte.*

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$ : $a_n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** :
  D'après ***1.a)*** : $a_0 = 1 \in \mathbb{N}$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(n)$. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* : $a_{n+1} \in \mathbb{N}$).
  - D'après la question précédente :
  $$a_{n+1} \;=\; S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\,a_{n-k}$$
  - Or, par hypothèse de récurrence :
    × d'une part : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{N}$.
    × D'autre part, avec le changement de variable $\boxed{j = n-k}$ : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $a_{n-j} \in \mathbb{N}$.

    On en déduit :
    $$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k\,a_{n-k} \in \mathbb{N}$$
    Ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,a_{n-k} \in \mathbb{N}$. On obtient : $a_{n+1} \in \mathbb{N}$.

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence forte : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{N}.}$$

□

## Problème 1

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\ dt$.

### Partie A : Étude de la fonction $f_n$

Dans cette partie, on fixe un entier naturel $n$ non nul.

***12.*** Démontrer que la fonction $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$.

*Démonstration.*
Pour la suite de l'exercice, on introduit la fonction $h_n : t \mapsto \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$.

- La fonction $h_n$ est continue sur $[0,+\infty[$ car elle est le quotient $h_n = \dfrac{g_1}{g_2}$ où :
  - × $g_1 : t \mapsto t^{2n} - 1$ est continue sur $[0,+\infty[$ car polynomiale.
  - × $g_2 : t \mapsto t+1$ :
    - – est continue sur $[0,+\infty[$ car polynomiale.
    - – `NE S'ANNULE PAS` sur $[0,+\infty[$.

  La fonction $h_n$ admet donc une primitive $H_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
- Soit $x \in [0,+\infty[$. Par définition :

$$f_n(x) \ = \ \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\ dt \ = \ \Big[\ H_n(t)\ \Big]_0^x \ = \ H_n(x) - H_n(0)$$

  Ainsi, la fonction $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ comme somme de la fonction $H_n$ (elle-même $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$) et d'une constante.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

- De plus, pour tout $x \in [0,+\infty[$ : $f_n'(x) = H_n'(x) = h_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.}$$

**Commentaire**

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction $f_n$ est la primitive de $h_n$ sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule au point 0. Ainsi, $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = h_n(x)$.
- L'intérêt de la démonstration précédente est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers. Imaginons par exemple une fonction $g_n$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) = \int_0^{x^2} h_n(t)\ dt = \Big[\ H_n(t)\ \Big]_0^{x^2} = H_n(x^2) - H_n(0)$$

  La fonction $g_n$ `N'EST PAS` une primitive de $h_n$.
  L'expression ci-dessus permet toutefois de conclure que $g_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de $x \mapsto x^2$ par $H_n$ toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles adéquats. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n'(x) = 2x \times H_n'(x^2) = 2x \times h_n(x^2) = 2x\ \frac{x^{2n-1}}{x+1}$$

- Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de dériver sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés. □

***13.*** Étudier les variations de $f_n$.

*Démonstration.*

- Soit $x > 0$. D'après la question précédente :

$$f_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

Comme $x + 1 > 0$, le signe de $f_n'(x)$ est celui de la quantité $x^{2n} - 1$.

$$\begin{array}{rcll} f_n'(x) > 0 & \Leftrightarrow & x^{2n} > 1 & \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(x^{2n}\right) > \ln(1) & \textit{(car la fonction } \ln \textit{ est strictement croissante sur } ]0, +\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 2n \ln(x) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(x) > 0 & \textit{(car } 2n > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x > 1 & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } ]0, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

En remarquant de plus $f_n'(0) = -1$, on en déduit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f_n$ | $0$ | $\searrow$ | $f_n(1)$ | $\nearrow$ | |

□

***14.*** Démontrer que $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que $f_n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

*Démonstration.*

- Avec des arguments similaires à ceux de la question ***1.***, on démontre que la fonction $h_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{Comme } f_n' = h_n, \text{ la fonction } f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

- Soit $x \geqslant 0$.

$$f_n''(x) = \frac{(2n\, x^{2n-1}) \times (x+1) - (x^{2n} - 1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)\, x^{2n} + 2n\, x^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}$$

Comme $x \geqslant 0$, alors $(x+1)^2 > 0$. Ainsi, $f_n''(x)$ est du signe de la quantité $(2n-1)\, x^{2n} + 2n\, x^{2n-1} + 1$.
Or :

× comme $n \geqslant 1$, on a : $2n - 1 \geqslant 1 > 0$ et $2n \geqslant 0$.
× comme $x \geqslant 0$, on a : $x^{2n} \geqslant 0$ et $x^{2n-1} \geqslant 0$.

Ainsi : $(2n-1)\, x^{2n} + 2n\, x^{2n-1} + 1 \geqslant 0$ comme somme de quantités positives.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \geqslant 0,\ f_n''(x) \geqslant 0. \text{ Cela démontre que la fonction } f_n \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

***15. a)*** Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n} - 1 \ \geqslant\ n\,(t^2 - 1)$.

*Démonstration.*
Soit $t \geqslant 1$.

- Rappelons tout d'abord que si $t \neq 1$, on a :

$$\frac{t^{2n}-1}{t^2-1} \ = \ \frac{\left(t^2\right)^n - 1}{t^2-1} \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \left(t^2\right)^k \qquad \textit{(formule d'une somme géométrique)}$$

  On peut réécrire cette formule sous la forme suivante, valable pour tout $t \geqslant 1$ :

$$t^{2n} - 1 \ = \ (t^2-1) \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}$$

- Or, pour tout $t \geqslant 1$, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ t^{2k} \ \geqslant \ 1^{2k} = 1 \qquad \textit{(par croissance de l'application élévation à la puissance } 2k \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{)}$$

  Finalement par sommation de ces $n$ égalités :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \ \geqslant \ \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

  Et enfin, par multiplication par $t^2 - 1 \geqslant 0$, on obtient :

$$\underbrace{(t^2-1) \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}}_{=\, t^{2n}-1} \ \geqslant \ n\,(t^2-1)$$

$$\boxed{\forall t \geqslant 1,\ t^{2n} - 1 \ \geqslant \ n\,(t^2-1)}$$

□

***b)*** Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant \ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2$.

*Démonstration.*
Soit $x \geqslant 1$.

- Alors, pour tout $t \geqslant 1$ :

$$t^{2n} - 1 \ \geqslant \ n\,(t^2-1) \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

$$\text{donc} \quad \frac{t^{2n}-1}{t+1} \ \geqslant \ n\,\frac{t^2-1}{t+1} \qquad \textit{(car } t+1>0\textit{)}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{t^{2n}-1}{t+1} \ \geqslant \ n\,\frac{(t-1)\cancel{(t+1)}}{\cancel{t+1}}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($1 \leqslant x$) :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_1^x n\,(t-1)\, dt \\ & & \shortparallel \\ & & n\left[\dfrac{1}{2}(t-1)^2\right]_1^x \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \geqslant 1,\ \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \ \geqslant\ \frac{n}{2}\,(x-1)^2.}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt + \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \qquad \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\ &= f_n(1) + \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \\ &\geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}\,(x-1)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}\,(x-1)^2.}$$

□

***c)*** En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

*Démonstration.*
D'après la question précédente, pour tout $x \geqslant 1$ :

$$f_n(x) \geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}\,(x-1)^2$$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^2 = +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.}$$

□

***16.*** Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$f_n(0) = \int_0^0 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = 0$$

$$\boxed{f_n(0) = 0}$$

- En question ***13.***, on a démontré que $f_n$ est strictement décroissante sur $[0,1]$.

$$\boxed{\text{Comme } 1 > 0, \text{ on en déduit } f_n(1) < f_n(0) = 0.}$$

□

***17.*** Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note $x_n$ cette solution.

*Démonstration.*

- Rappelons tout d'abord : $f_n(0) = 0$.

  L'équation $f_n(x) = 0$ admet pour solution $x = 0$.

- Si $x \in \,]0, 1]$, alors, par stricte décroissance de $f_n$ sur cet intervalle, on a : $f_n(x) < f_n(0) = 0$.

  Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0, 1]$.

- Il reste à traiter le cas de l'intervalle $]1, +\infty[$.
  La fonction $f_n$ est :
  × continue sur $]1, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

  Ainsi $f_n$ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $f_n(]1, +\infty[)$. Or :

$$f_n(]1, +\infty[) \;=\; \left] \lim_{x \to 1} f_n(x), \lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right[ = \,]f_n(1), +\infty[$$

  Comme $f_n(1) < 0$, on a : $0 \in \,]f_n(1), +\infty[$.

  Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$, notée $x_n$.

Finalement, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement 2 solutions sur $[0, +\infty[$ : $x = 0$ et $x = x_n > 1$, seule solution strictement positive.

**Commentaire**

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction $f$ doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels $f$ est strictement monotone (ici $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$).

□

## Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite $(x_n)$, où pour tout entier naturel $n$ non nul, $x_n$ est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

***18.*** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ = \ x^{2n+1} \left( \frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2(n+1)} - 1}{t+1}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\, dt \\
&= \int_0^x \left( \frac{t^{2n+2} - \cancel{1}}{t+1} - \frac{t^{2n} - \cancel{1}}{t+1} \right) dt && \text{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n}\ (t^2 - 1)}{t+1}\, dt \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n}\ (t-1)\cancel{(t+1)}}{\cancel{t+1}}\, dt \\
&= \int_0^x t^{2n+1}\, dt - \int_0^x t^{2n}\, dt && \text{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= \left[ \frac{1}{2n+2}\ t^{2n+2} \right]_0^x - \left[ \frac{1}{2n+1}\ t^{2n+1} \right]_0^x \\
&= \frac{1}{2n+2}\ \left[ t^{2n+2} \right]_0^x - \frac{1}{2n+1}\ \left[ t^{2n+1} \right]_0^x \\
&= \frac{1}{2n+2}\ x^{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\ x^{2n+1} \\
&= x^{2n+1} \left( \frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left( \frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)}$$

□

**19.** ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$.
Comme $x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1} > 0$ alors $x^{2n+1} > 0$.
Ainsi, le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est celui de $\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1}$.

$$\begin{array}{rcll} f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} \geqslant 0 & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{x}{2n+2} \geqslant \dfrac{1}{2n+1} & \\ & \Leftrightarrow & x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1} & \textit{(car } 2n+2 > 0\textit{)} \end{array}$$

La dernière proposition étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1},\ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x).}$$

□

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé : $x_n \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$.
On peut donc utiliser la propriété précédente pour $x = x_n \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} f_{n+1}(x_n) & \geqslant & f_n(x_n) \\ & & \shortparallel \\ & & 0 \qquad \textit{(par définition de } x_n\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0.}$$

□

***c)*** Montrer alors que la suite $(x_n)$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de $x_{n+1}$, on a : $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})$$

- De plus, on sait :
  × $x_n > 1$ et $x_{n+1} > 1$ d'après la question ***17***.
  × la fonction $f_{n+1}$ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]f_n(1), +\infty[$.
  La réciproque de cette bijection, définie de $]f_n(1), +\infty[$ sur $]1, +\infty[$ est strictement croissante car de même monotonie que $f_{n+1}$ sur $]1, +\infty[$. En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité :

$$x_n \geqslant x_{n+1}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant x_{n+1}. \text{ La suite } (x_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

- La suite $(x_n)$ est :
  - $\times$ décroissante,
  - $\times$ minorée par 1 (par définition, pour tout $n \geqslant 1$ : $x_n > 1$).

  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est convergente.}}$$

**Commentaire**

- La **Partie B** consiste en l'étude de la suite $(x_n)$. On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite $(x_n)$ mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n$ est l'unique solution strictement positive de l'équation $f_n(x) = 0$

  On comprend alors que l'étude de $(x_n)$ va passer par l'étude des propriétés de la fonction $f_n$.
- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ f_m(x_m) = 0}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite $(x_n)$.
  On l'utilise en ***19.b)*** pour $m = n$ et en ***19.c)*** pour $m = n+1$.
- Comme la suite $(x_n)$ est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de $(x_n)$ à l'aide de la différence $x_{n+1} - x_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

  $$f_{n+1}(x_n) \ \geqslant\ f_{n+1}(x_{n+1})$$

  et de conclure : $x_n \ \geqslant\ x_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de $f_{n+1}$. □

***20. a)*** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ : $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

*Démonstration.*
Soit $n \geqslant 1$.

- D'après la question ***16.***, on a : $f_n(1) < 0$.

$$\boxed{\text{On a bien : } f_n(1) \leqslant 0.}$$

- Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{array}{lrcccl}
\text{Alors} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & 1 \\
\text{donc} & 0^{2n} & \leqslant & t^{2n} & \leqslant & 1^{2n} \quad \textit{(par croissance de la fonction élévation à la puissance } 2n\textit{)} \\
\text{ainsi} & -1 & \leqslant & t^{2n}-1 & \leqslant & 0 \\
\text{d'où} & -\dfrac{1}{t+1} & \leqslant & \dfrac{t^{2n}-1}{t+1} & \leqslant & 0 \quad \textit{(car } t+1>0\textit{)}
\end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$ :

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt \ \geqslant\ \int_0^1 \frac{-1}{t+1}\,dt$$

$$\int_0^1 \frac{-1}{t+1}\,dt = \Big[-\ln\left(|t+1|\right)\Big]_0^1 = -\big(\ln(2) - \cancel{\ln(1)}\big)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \geqslant 1,\ -\ln(2) \leqslant f_n(1).}$$

□

***b)*** À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***15.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de $x_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, par définition (question ***17.***), on a : $x_n > 1$.

$$\boxed{\text{On a bien : } x_n - 1 \geqslant 0.}$$

- En apppliquant le résultat de la ***15.b)*** en $x = x_n \geqslant 1$, on obtient :

$$f_n(x_n) \ \geqslant\ f_n(1) + \frac{n}{2}\,(x_n-1)^2 \ \geqslant\ -\ln(2) + \frac{n}{2}\,(x_n-1)^2 \quad \textit{(d'après la question précédente)}$$

  Or, par définition de $x_n$, on a : $f_n(x_n) = 0$. On en déduit, en réordonnant :

$$\begin{array}{lrcll} & \frac{n}{2}\,(x_n-1)^2 & \leqslant & \ln(2) & \\ \text{donc} & (x_n-1)^2 & \leqslant & \frac{2}{n}\ \ln(2) & \textit{(car } \frac{2}{n} > 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & \sqrt{(x_n-1)^2} & \leqslant & \sqrt{\frac{2}{n}\ \ln(2)} & \textit{(par croissance de la fonction racine sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & |x_n - 1| & \leqslant & \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, comme } x_n - 1 \geqslant 0, \text{ on obtient bien : } x_n - 1 \ \leqslant\ \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}}.}$$

- On vient de démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}}$$

  Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}} = 0$.

  Par théorème d'encadrement, on en conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - 1 = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut finalement : } \lim_{n\to+\infty} x_n = 1.}$$

**Commentaire**

- Encore une fois, c'est la propriété de définition des termes de la suite $(x_n)$ qui est utilisée ici. C'est logique puisqu'on ne connaît pas d'expression explicite des termes de $(x_n)$.
- La présence de la quantification « $\forall n \in \mathbb{N}^*$ » peut faire penser à utiliser une récurrence. Ce type de raisonnement nécessite l'existence d'une propriété liant les termes de rangs successifs afin pouvoir mettre en œuvre l'étape d'hérédité. C'est pourquoi la récurrence est l'outil de base de démonstration des propriétés des suites récurrentes d'ordre 1 (le terme au rang $n+1$ s'exprime directement en fonction du terme au rang $n$). L'utilisation est plus rare dans le cas des suites implicites.

□

# Problème II

## Partie A : Fonction tangente hyperbolique

On note th, la fonction tangente hyperbolique, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{th} : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

***21.*** $(*)$ Démontrer que la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

*Démonstration.*

- La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est le quotient $\text{th} = \dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$,
  - × $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ qui :
    - est dérivable sur $\mathbb{R}$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction th est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{th}'(x) &= \frac{\big(\mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x})\big)\,(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{\big((\cancel{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}) - (\cancel{\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^{-x})\big)\,\big((\mathrm{e}^x + \cancel{\mathrm{e}^{-x}}) + (\mathrm{e}^x - \cancel{\mathrm{e}^{-x}})\big)}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{2\,\mathrm{e}^{-x} \times 2\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \;=\; \left(\frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{th}' : x \mapsto \frac{1}{\big(\text{ch}(x)\big)^2}}$$

□

***22.*** $(*)$ Déterminer la parité de th.

*Démonstration.*

- L'intervalle $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{th}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = -\,\text{th}(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction th est donc impaire.}}$$

□

***23.*** Dresser le tableau de variations complet de th. On justifiera les valeurs des limites qui y apparaissent.

*Démonstration.*

- D'après la question ***21.*** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}'(x) \ = \ \frac{1}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2} \ > \ 0$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $\mathrm{th}'(x)$ | $+$ | |
| Variations de th | $-1$ | $1$ |

- Détaillons les éléments de ce tableau.

  × Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{th}(x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \ = \ \frac{\cancel{\mathrm{e}^x}\,(1 - \mathrm{e}^{-2x})}{\cancel{\mathrm{e}^x}\,(1 + \mathrm{e}^{-2x})} \ = \ \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$$

  Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = \frac{1}{1} = 1.}$$

  × Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{th}(x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \ = \ \frac{\cancel{\mathrm{e}^{-x}}\,(\mathrm{e}^{2x} - 1)}{\cancel{\mathrm{e}^{-x}}\,(\mathrm{e}^{2x} + 1)} \ = \ \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

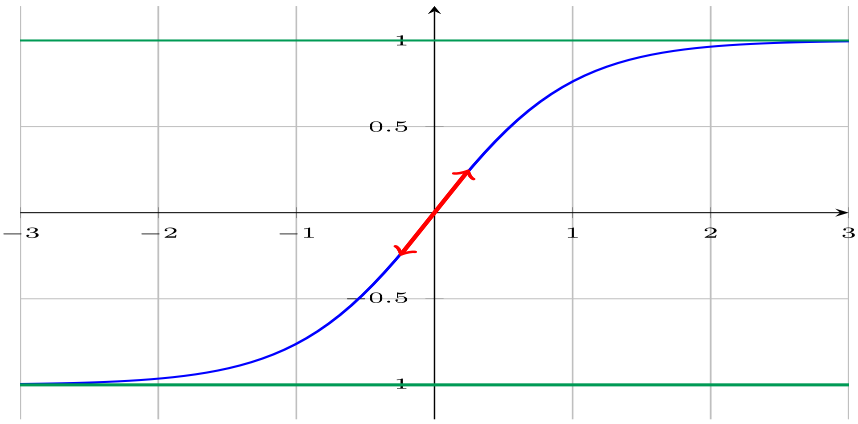
  Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = \frac{-1}{1} = -1.}$$

□

***24.*** $(*)$ Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction th.

*Démonstration.*



L'équation de la tangente à la courbe représentative de th au point d'abscisse 0 est :

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{th}(0) + \mathrm{th}'(0)\,(x-0) \\ &= 0 + 1 \times x \\ &= x \end{aligned}$$

**Commentaire**

On s'efforcera de faire les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes. D'ailleurs, il ne faut pas oublier de faire apparaître les tangentes horizontales et les points d'inflexion si on les a déterminés auparavant. □

***25.*** $(*)$ Justifier que la fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble qu'on déterminera.

*Démonstration.*
La fonction th est :

- × continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$,
- × strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après ***23.***

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $\mathrm{th}\big(]-\infty,+\infty[\big)$ avec :

$$\mathrm{th}\big(]-\infty,+\infty[\big) = \left]\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x), \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x)\right[ = ]-1,1[ \qquad \textit{(d'après 23.)}$$

$$\boxed{\text{La fonction th réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } ]-1,1[.}$$

□

***26.*** Montrer que la bijection réciproque de la fonction th, notée $\mathrm{th}^{-1}$, vérifie :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \mathrm{th}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

*Démonstration.*
On note $g$ la fonction définie par :

$$g \;:\; \begin{array}{ccc} ]-1,1[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$$

Soit $x \in ]-1,1[$.

$$(\mathrm{th} \circ g)(x) = \mathrm{th}\big(g(x)\big) = \frac{\mathrm{e}^{g(x)} - \mathrm{e}^{-g(x)}}{\mathrm{e}^{g(x)} + \mathrm{e}^{-g(x)}}$$

Or :

× d'une part :

$$\exp\big(g(x)\big) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

× d'autre part :

$$\exp\big(-g(x)\big) = \exp\left(-\frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{th}\circ g)(x) &= \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)} \\
&= \frac{\frac{1+x}{1-x} - 2\sqrt{\cancel{\frac{1+x}{1-x}}\ \cancel{\frac{1-x}{1+x}}} + \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}} \\
&= \frac{\dfrac{(1+x)^2 - 2\,(1+x)\,(1-x) + (1-x)^2}{\cancel{(1-x)\,(1+x)}}}{\dfrac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{\cancel{(1-x)\,(1+x)}}} \\
&= \frac{\left(1+\cancel{2x}+x^2\right) - 2\,(1-x^2) + \left(1-\cancel{2x}+x^2\right)}{\left(\cancel{1}+2x+\cancel{x^2}\right) - \left(1-2x+\cancel{x^2}\right)} \\
&= \frac{\cancel{2} + 2\,x^2 - \cancel{2} + 2\,x^2}{4\,x} \\
&= \frac{\cancel{4}\,x^2}{\cancel{4}\,x} = x
\end{aligned}$$

On sait alors que :

× la fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ d'après ***25.***,

× d'après ce qui précède : $\mathrm{th}\circ g = \mathrm{id}_{]-1,1[}$.

On en déduit que $g$ est la bijection réciproque de th. On peut donc la noter $\mathrm{th}^{-1}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in\ ]-1,1[,\ \mathrm{th}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

**Commentaire**

Il faut lire l'énoncé avec attention. La formulation de la question oriente quant à la démarche à suivre pour conclure.

- Pour répondre à la question « démontrer que $f$ est bijective et que sa bijection réciproque est $f^{-1} : x \mapsto h(x)$ » :
  *1)* on note $g : x \mapsto h(x)$. On prendra garde à ne pas utiliser la notation $f^{-1}$ car on ne sait pas encore à ce stade que la fonction $g$ est bien la bijection réciproque de $f$.
  *2)* on démontre : $f \circ g = \mathrm{id}$.
  *3)* on démontre : $g \circ f = \mathrm{id}$. On s'est passé dans cette question de ce $3^{\text{ème}}$ point car on savait déjà que la fonction th était bijective.

  On peut ensuite conclure que la fonction $f$ est bijective de bijection réciproque $g$.
  D'où : $f^{-1} = g$.
- Pour répondre à la question « démontrer que $f$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque » :
  *1)* on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x$. On obtient :

$$y = f(x) \qquad \cdots \qquad x = g(y)$$

  *2)* comme cette équation admet une unique solution, on en déduit que $f$ est bijective de bijection réciproque $g$.

□

***27.*** Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de $\mathrm{th}^{-1}$.

*Démonstration.*
La fonction th est :

× dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après ***21.***,
× bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, d'après ***25.***,
× telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2} \neq 0$ (d'après ***23.***).

On en déduit que $\mathrm{th}^{-1}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in\ ]-1,1[$ :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{th}^{-1})'(x) &= \frac{1}{(\mathrm{th}' \circ \mathrm{th}^{-1})(x)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\left(\mathrm{ch}\left(\mathrm{th}^{-1}(x)\right)\right)^2}} \\
&= \left(\mathrm{ch}\left(\mathrm{th}^{-1}(x)\right)\right)^2 \\
&= \left(\frac{\exp\left(\mathrm{th}^{-1}(x)\right) + \exp\left(-\mathrm{th}^{-1}(x)\right)}{2}\right)^2 && \textit{(par définition de ch)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}{4} && \textit{(d'après les calculs de la question précédente)}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{th}^{-1})'(x) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1+x}{1-x} + 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1-x}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1+x}{1-x} + 2\sqrt{\cancel{\frac{1+x}{1-x}}\;\cancel{\frac{1-x}{1+x}}} + \frac{1-x}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1+x}{1-x} + 2 + \frac{1-x}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{(1+x)^2 + 2\,(1+x)\,(1-x) + (1-x)^2}{(1-x)\,(1+x)} \\
&= \frac{1 + \cancel{2x} + x^2 + 2\,(1-x^2) + 1 - \cancel{2x} + x^2}{4\,(1-x)\,(1+x)} \\
&= \frac{2 + \cancel{2x^2} + 2 - \cancel{2x^2}}{4\,(1-x)\,(1+x)} \\
&= \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\,(1-x)\,(1+x)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } \mathrm{th}^{-1} \text{ est dérivable sur } ]-1,1[ \text{ et :} \\ \forall x \in\, ]-1,1[,\ \left(\mathrm{th}^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\,(1+x)}.\end{array}}$$

□

## Partie B : Fonction sigmoïde

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre **fixé**. On définit la fonction $f_\lambda$ par :

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

***28.*** Déterminer le domaine de dérivabilité de $f_\lambda$ et calculer sa dérivée.

*Démonstration.*

- La fonction $f_\lambda$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est l'inverse $f_\lambda = \dfrac{1}{h}$ de :
  - × $h : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-\lambda x}$ qui :
    - est dérivable sur $\mathbb{R}$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_\lambda \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_\lambda'(x) = -\frac{(-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{(1+\mathrm{e}^{-\lambda x})^2} = \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{(1+\mathrm{e}^{-\lambda x})^2}$$

$$\boxed{f_\lambda' : x \mapsto \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{(1+\mathrm{e}^{-\lambda x})^2}}$$

□

***29.*** En déduire le sens de variation de $f_\lambda$ et calculer les limites de $f_\lambda$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (on distinguera trois cas).

*Démonstration.*
Trois cas se présentent.

- Si $\lambda > 0$.
  - × Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :
  $$f'_\lambda(x) \;=\; \frac{\lambda\, e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} \;>\; 0$$
  - × On obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $f'_\lambda(x)$ | $+$ | |
| Variations de $f_\lambda$ | $0$ ↗ | $1$ |

  - × Détaillons les éléments de ce tableau.
    - Ensuite, comme $\lambda > 0$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\lambda\, x = +\infty$. Ainsi, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\lambda x} \;=\; +\infty$.
    On en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^{-\lambda x}} \;=\; 0$. D'où :
    $$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) \;=\; 0$$
    - Enfin, comme $\lambda > 0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda\, x = -\infty$. Ainsi, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$.
    On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-\lambda x}} \;=\; 1$. D'où :
    $$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) \;=\; 1$$
- Si $\lambda = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f_\lambda(x) \;=\; \frac{1}{1+e^{-0\times x}} \;=\; \frac{1}{1+1} \;=\; \frac{1}{2}$$
$$\boxed{\text{Si } \lambda = 0\text{, la fonction } f_\lambda \text{ est constante égale à } \frac{1}{2}.}$$
- Si $\lambda < 0$.
  - × Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :
  $$f'_\lambda(x) \;=\; \frac{\lambda\, e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} \;<\; 0$$
  - × On obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $f'_\lambda(x)$ | $-$ | |
| Variations de $f_\lambda$ | $1$ ↘ | $0$ |

× Détaillons les éléments de ce tableau.

- Tout d'abord, comme $\lambda < 0$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\lambda\, x = -\infty$. Ainsi, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, x} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\lambda\, x}} = 1$. D'où :
$$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = 1$$
- Enfin, comme $\lambda < 0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda\, x = +\infty$. Ainsi, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, x} = +\infty$. On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\lambda\, x}} = 0$. D'où :
$$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = 0$$

□

***30.*** Démontrer :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_\lambda(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \mathrm{th}\left(\frac{\lambda\, x}{2}\right)$$

*Démonstration.*
Soit $x\in\mathbb{R}$. Par définition de th :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \mathrm{th}\left(\frac{\lambda\, x}{2}\right) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda\, x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda\, x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\lambda\, x}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\lambda\, x}{2}}} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{\mathrm{e}^{\frac{\lambda\, x}{2}}}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)}{\cancel{\mathrm{e}^{\frac{\lambda\, x}{2}}}\left(1+\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{2\left(1+\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)} \\
&= \frac{1+\cancel{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}+1-\cancel{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}}{2\left(1+\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)} \\
&= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\left(1+\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)} = f_\lambda(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x\in\mathbb{R},\ f_\lambda(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \mathrm{th}\left(\frac{\lambda\, x}{2}\right).}$$

□

## Partie C : Équation différentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle équation différentielle une équation faisant intervenir une fonction et ses dérivées et dont les éventuelles solutions sont des **fonctions**. Le but de cette partie est de résoudre l'équation différentielle d'inconnue $f$ avec une condition initiale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f' & = & \lambda f\,(1-f) \\ f(0) & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \qquad (E)$$

On admettra qu'une solution de cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

***31.*** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)} - 1$.
Montrer que la fonction $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $g$ est solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} g' + \lambda\, g = 0 \\ g(0) = 1 \end{array}\right. \qquad (E')$$

*Démonstration.*
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $f$ est solution de $(E)$.
Démontrons que $g$ est solution de $(E')$.

- Tout d'abord, comme $f$ est solution de $(E)$, alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est l'inverse de la fonction $f$ qui :
  - est dérivable sur $\mathbb{R}$,
  - `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

  $$g'(x) \;=\; -\frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^2}$$

  On en déduit :

  $$\begin{aligned} g'(x) + \lambda\, g(x) &= -\frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^2} + \lambda\left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) \\ &= -\frac{\lambda\,\cancel{f(x)}\,\big(1-f(x)\big)}{\big(f(x)\big)^{\cancel{2}}} + \lambda\,\frac{1}{f(x)} - \lambda \quad \textit{(car } f \textit{ est solution de } (E)\textit{)} \\ &= \frac{-\lambda\,\big(1-f(x)\big) + \lambda}{f(x)} \\ &= \frac{-\cancel{\lambda} + \lambda\, f(x) + \cancel{\lambda}}{f(x)} - \lambda \\ &= \frac{\lambda\,\cancel{f(x)}}{\cancel{f(x)}} - \lambda \\ &= \lambda - \lambda \;=\; 0 \end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{Ainsi : } g' - \lambda\, g = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.}$$

- Enfin, comme $f$ est solution de $(E)$, alors : $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$g(0) \;=\; \frac{1}{f(0)} - 1 \;=\; \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 \;=\; 2 - 1 \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{D'où : } g(0) = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, si } f \text{ est solution de } (E)\text{, alors } g \text{ est solution de } (E').}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $g$ est solution de $(E')$.
Démontrons que $f$ est solution de $(E)$.

- Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rrcl} & g(x) & = & \dfrac{1}{f(x)} - 1 \\[2ex] \text{donc} & g(x) + 1 & = & \dfrac{1}{f(x)} \\[2ex] \text{d'où} & \dfrac{1}{g(x)+1} & = & f(x) \end{array}$$

Notons que la fonction $f$ est ainsi bien définie. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$g(x) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{f(x)} + \cancel{1}\right) - \cancel{1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f(x)} = 0$$

Cette dernière assertion est fausse. Par raisonnement par équivalence, la première aussi. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) + 1 \;\neq\; 0$$

- Ensuite, comme $g$ est solution de $(E')$, alors la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est l'inverse $f = \dfrac{1}{h}$ où $h : x \mapsto g(x) + 1$ :
  - $\times$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car la fonction $g$ l'est,
  - $\times$ `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}$, d'après ce qui précède.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & = & -\dfrac{g'(x)}{\big(g(x)+1\big)^2} & \\[2ex] & = & -\dfrac{-\lambda\, g(x)}{\big(g(x)+1\big)^2} & \textit{(car } g \textit{ est solution de } (E')\textit{)} \\[2ex] & = & \lambda\, \dfrac{g(x)}{\big(g(x)+1\big)^2} & \end{array}$$

Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcl} \lambda\, f(x)\, \big(1 - f(x)\big) & = & \lambda\, \dfrac{1}{g(x)+1} \left(1 - \dfrac{1}{g(x)+1}\right) \\[2ex] & = & \lambda\, \dfrac{1}{g(x)+1} \times \dfrac{g(x) + \cancel{1} - \cancel{1}}{g(x)+1} \\[2ex] & = & \lambda\, \dfrac{g(x)}{\big(g(x)+1\big)^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } f' = \lambda\, f\, (1 - f).}$$

- Enfin, comme $g$ est solution de $(E')$, alors : $g(0) = 1$. Ainsi :

$$f(0) \ = \ \frac{1}{g(0)+1} \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(0) = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, si } g \text{ est solution de } (E'), \text{ alors } f \text{ est solution de } (E).}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } g \text{ est solution de } (E').}$$

□

***32.*** Montrer que $g$ est solution de l'équation $(E')$ si et seulement si $g$ est la fonction :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$$

*On pourra étudier la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, g(x)$.*

*Démonstration.*
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $g$ est solution de $(E')$.
Démontrons que $g$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$.

× On commence par étudier la fonction $h$ suggérée par l'énoncé.
Comme $g$ est solution de $(E')$, alors cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

× Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} h'(x) & = & \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \times g(x) + \mathrm{e}^{\lambda\, x} \times g'(x) & \\ & = & \big(\lambda\, g(x) + g'(x)\big)\ \mathrm{e}^{\lambda\, x} & \\ & = & 0 \times \mathrm{e}^{\lambda\, x} & \textit{(car } g \textit{ est solution de } (E')\textit{)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

× On a démontré que la fonction $h'$ est nulle sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $h$ est constante sur $\mathbb{R}$.
Puisque la fonction $h$ est constante sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier constante égale à sa valeur en 0. Or :

$$h(0) \ = \ \mathrm{e}^{\lambda \times 0}\, g(0) \ = \ g(0) \ = \ 1 \qquad \textit{(car } g \textit{ solution de } (E')\textit{)}$$

× On a démontré : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rc} & h(x) = 1 \\ \text{donc} & \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, g(x) = 1 \\ \text{d'où} & g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\lambda\, x}} \end{array}$$

On en déduit : $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$.

$$\boxed{\text{Finalement, si } g \text{ est solution de } (E'), \text{ alors } g \text{ est la fonction } x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, x}.}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $g$ est la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$.
Démontrons que $g$ est solution de $(E')$.

- Tout d'abord, la fonction $g$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur des intervalles adéquats.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$g'(x) + \lambda\, g(x) \;=\; -\lambda\, e^{-\lambda x} + \lambda\, e^{-\lambda x} \;=\; 0$$
Ainsi : $g' + \lambda\, g = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.
- Enfin : $g(0) = e^{-\lambda \times 0} = e^0 = 1$.

$\boxed{\text{Finalement, si } g \text{ est la fonction } x \mapsto e^{-\lambda x}, \text{ alors } g \text{ est solution de } (E').}$

$\boxed{\text{On en conclut que } g \text{ est solution de } (E') \text{ si et seulement si } g \text{ est la fonction } x \mapsto e^{-\lambda x}.}$ □

***33.*** À l'aide de la partie précédente, résoudre complètement l'équation $(E)$.

*Démonstration.*
On remarque :

$$\begin{array}{rcll}
f \text{ solution de } (E) & \Leftrightarrow & g \text{ solution de } (E') & \textit{(d'après } \textbf{\textit{31.}}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & g : x \mapsto e^{-\lambda x} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{32.}}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & f : x \mapsto \dfrac{1}{e^{-\lambda x} + 1} & \textit{(par relation entre } f \textit{ et } g \textit{ déterminée en } \textbf{\textit{31.}}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & f : x \mapsto \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ \text{th}\left(\dfrac{\lambda x}{2}\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{30.}}\textit{)}
\end{array}$$

$\boxed{\text{On en conclut que l'unique solution de } (E) \text{ est la fonction } x \mapsto \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ \text{th}\left(\dfrac{\lambda x}{2}\right).}$ □

*Les fonctions sigmoïdes modélisent l'évolution du pH en fonction de la quantité de solution introduite dans le mélange lors d'un titrage acido-basique.*