DS3

On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 10. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Démonstration.
Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$

où $\quad \mathscr{P}(n) : (u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $(u+v)^0 = 1$.
  - D'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u^k\, v^{0-k} = \binom{0}{0} u^0\, v^0 = 1$.

  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$
  (*i.e.* $(u+v)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{(n+1)-k}$).

$$
\begin{aligned}
& (u+v)^{n+1} \\
= \ & (u+v)\,(u+v)^n \\
= \ & (u+v) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= \ & u \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} + v \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{k+1}\, v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \\
= \quad & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n}{n} u^{n+1}\, v^{n+1-(n+1)} \right) \\
+ \quad & \left(\binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \\
= \quad & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 \\
= \quad & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 \qquad \textit{(par triangle de Pascal)} \\
= \quad & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} u^{n+1}\, v^0 \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k}
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}.}$$

□

2. Soient E, F, G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.
Soient A_1 et A_2 des parties de F.

a) Démontrer :

$$g \circ f \text{ est surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ surjective}$$

Démonstration.
Supposons $g \circ f$ surjective et démontrons que g est surjective.

Soit $z \in G$.
Démontrons qu'il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.
Notons $y = f(x)$. Alors $y \in F$ et y vérifie $z = g(y)$.

Ainsi f est surjective.

$$\boxed{g \circ f \text{ surjective} \ \Rightarrow\ g \text{ surjective.}}$$

□

b) Démontrer :

$$f(A_1 \cup A_2) \ = \ f(A_1) \cup f(A_2)$$

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
Alors il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$.
Ceci signifie que $x \in A_1$ ou $x \in A_2$. Deux cas se présentent alors :

× si $x \in A_1$: alors on a $y = f(x) \in f(A_1)$.

× si $x \notin A_1$: alors, comme $x \in A_1 \cup A_2$, on a forcément $x \in A_2$.
On en déduit que $y = f(x) \in f(A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

$$\boxed{\text{D'où : } f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2).}$$

($\supset$) Soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
Ceci signifie que $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$. Deux cas se présentent alors :

× si $y \in f(A_1)$: il existe donc $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$.
Or $A_1 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

× si $y \notin f(A_1)$: alors comme $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, on a forcément $y \in f(A_2)$. Il existe donc $x \in A_2$ tel que $y = f(x)$.
Or $A_2 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

$$\boxed{\text{D'où : } f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2).}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).}$$

□

c) Démontrer que f est surjective si et seulement si : $\forall Y \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que f et surjective.
Démontrons : $\forall Y \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.
Soit $Y \in \mathscr{P}(F)$.
On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $y \in f\big(f^{-1}(Y)\big)$.
Alors il existe $x \in f^{-1}(Y)$ tel que : $y = f(x)$.
Comme $x \in f^{-1}(Y)$, alors : $f(x) \in Y$.
Or : $y = f(x)$. D'où : $y \in Y$.

($\supset$) Soit $y \in Y$.
Comme f est surjective, alors il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.
Comme $y \in Y$, alors : $f(x) \in Y$. D'où : $x \in f^{-1}(Y)$. On en déduit : $f(x) \in f\big(f^{-1}(Y)\big)$.
De plus : $y = f(x)$. Ainsi : $y \in f\big(f^{-1}(Y)\big)$.

$$\boxed{\text{Finalement, si } f \text{ est surjective, alors : } \forall Y \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y.}$$

$(\Leftarrow)$ Supposons : $\forall Y \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.
Démontrons que f est surjective.
Soit $y \in F$.
Comme $F \in \mathscr{P}(F)$, alors : $f\big(f^{-1}(F)\big) = F$. On en déduit : $y \in f\big(f^{-1}(F)\big)$.
Il existe donc $x \in f^{-1}(F)$ tel que : $y = f(x)$.
Or : $f^{-1}(F) \subset E$. Ainsi : $x \in E$.
On a donc démontré qu'il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si : } \forall Y \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y, \text{ alors } f \text{ est surjective.}}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est surjective si et seulement si : } \forall Y \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y.}$$

□

3. a) $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^4(x)$.

Démonstration.
Par formule d'Euler :

$$\begin{aligned}
\big(\sin(x)\big)^4 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2^4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 && \textit{(car : } i^4 = 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} - 4\,e^{2ix} + 6 - 4\,e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) && \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
&= \frac{1}{2^4}\left(2\,\cos(4x) - 4 \times 2\,\cos(2x) + 6\right) && \textit{(par formule d'Euler)} \\
&= \frac{1}{2^3}\left(\cos(4x) - 4\,\cos(2x) + 3\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^4(x) = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\,\cos(2x) + 3\right)}$$

□

b) $(*)$ En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\, dx$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \sin^4(x)$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\, dx$ est donc bien définie.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^4 \, dx \\
= \ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} \, \big(\cos(4x) - 4\,\cos(2x) + 3\big) \, dx \\
= \ & \frac{1}{8} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x) \, dx - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \, dx + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx \right) && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
= \ & \frac{1}{8} \left(\left[\frac{1}{4} \sin(4x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3 \, [\ x\ ]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
= \ & \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \big(\cancel{\sin(2\pi)} - \cancel{\sin(0)}\big) - 2 \big(\cancel{\sin(\pi)} - \cancel{\sin(0)}\big) + 3 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \right) \\
= \ & \frac{1}{8} \times \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) \, dx = \frac{3\pi}{16}.}$$

□

Exercice 2

On note : $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. On note de plus :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} D & \to & D \\ z & \mapsto & -z\,\dfrac{1-\overline{z}}{1-z} \end{array}$$

4. Quelle est la représentation géométrique dans le plan de l'ensemble D ?

Démonstration.

> La représentation géométrique dans le plan de l'ensemble D est le disque **ouvert** de centre O (l'origine du plan) et de rayon 1.

□

5. Démontrer : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\left| -z\,\dfrac{1-\overline{z}}{1-z} \right| = |z|$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
\left| -z\,\frac{1-\overline{z}}{1-z} \right|^2 &= -z\,\frac{1-\overline{z}}{1-z} \times \overline{\left(-z\,\frac{1-\overline{z}}{1-z} \right)} && \textit{(par définition du module)} \\
&= -z\,\frac{1-\overline{z}}{1-z} \times \left(-\overline{z}\,\frac{1-z}{1-\overline{z}} \right) \\
&= z\,\overline{z}\,\frac{\cancel{(1-\overline{z})\,(1-z)}}{\cancel{(1-z)\,(1-\overline{z})}} \\
&= |z|^2
\end{aligned}$$

Par injectivité de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$: $\left| -z\,\dfrac{1-\overline{z}}{1-z} \right| = |z|$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ \left| -z\,\frac{1-\overline{z}}{1-z} \right| = |z|.}$$

□

6. En déduire que f est bien définie.

Démonstration.

- Pour démontrer que la fonction f est bien définie, il s'agit de démontrer que :
  - × pour tout $z \in D$, le complexe $f(z)$ existe,
  - × la fonction f est bien à valeurs dans D, *i.e.* : $\forall z \in D$, $f(z) \in D$.
- Tout d'abord, pour tout $z \in D$: $|z| < 1$. En particulier : $z \neq 1$.
  On en déduit que le complexe $-z\,\dfrac{1-\overline{z}}{1-z}$ est bien défini. Ainsi, la quantité $f(z)$ existe.
- Ensuite, soit $z \in D$.
  Comme $D \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors : $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ainsi, d'après la question précédente :

  $$\left| f(z) \right| = \left| -z\,\frac{1-\overline{z}}{1-z} \right| = |z|$$

  Or : $z \in D$. Donc : $|z| < 1$. Ainsi :

  $$\left| f(z) \right| = |z| < 1$$

  Autrement dit : $f(z) \in D$.

> L'application f est donc bien définie.

□

7. Résoudre l'équation (E) : $f(z) = z$ d'inconnue $z \in D$.

Démonstration.
Soit $z \in D$. Deux cas se présentent.

- si $z = 0$, alors :

$$f(0) \; = \; -0 \times \frac{1-0}{1-0} \; = \; 0$$

  Le complexe 0 est donc solution de (E).

- si $z \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} f(z) = z \quad & \Leftrightarrow \quad -z \, \frac{1-\overline{z}}{1-z} = z \\ & \Leftrightarrow \quad -\frac{1-\overline{z}}{1-z} = 1 \qquad \textit{(car : } z \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad -(1-\overline{z}) = 1 - z \\ & \Leftrightarrow \quad z + \overline{z} = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad 2 \operatorname{Re}(z) = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(z) = 1 \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est :
$\{z \in D \mid \operatorname{Re}(z) = 1\} \cup \{0\}$.

□

8. Montrer que f est une involution de D, c'est-à-dire : $f \circ f = \mathrm{id}_D$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer :

$$\forall z \in D, \quad (f \circ f)(z) \; = \; z$$

Soit $z \in D$.

- Tout d'abord :

$$(f \circ f)(z) \; = \; f\big(f(z)\big) \; = \; -f(z) \, \frac{1-\overline{f(z)}}{1-f(z)}$$

- Ensuite :
  - × d'une part :

$$\begin{aligned} 1 - f(z) \; & = \; 1 + z \, \frac{1-\overline{z}}{1-z} \\ & = \; \frac{1 - z + z\,(1-\overline{z})}{1-z} \\ & = \; \frac{1 - \cancel{z} + \cancel{z} - z\,\overline{z}}{1-z} \\ & = \; \frac{1-|z|^2}{1-z} \end{aligned}$$

  - × d'autre part :

$$1 - \overline{f(z)} \; = \; \overline{1 - f(z)} \; = \; \overline{\left(\frac{1-|z|^2}{1-z}\right)} \; = \; \frac{1-|z|^2}{1-\overline{z}}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}(f\circ f)(z) &= -\left(-z\,\frac{1-\overline{z}}{1-z}\right)\times\frac{\dfrac{\cancel{1-|z|^2}}{1-\overline{z}}}{\dfrac{\cancel{1-|z|^2}}{1-z}}\\ &= z\,\frac{\cancel{1-\overline{z}}}{\cancel{1-z}}\times\frac{\cancel{1-z}}{\cancel{1-\overline{z}}}\\ &= z\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, l'application } f \text{ est une involution de } D.}$$

□

9. $(*)$ En déduire que f est bijective et préciser sa bijection réciproque.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après la question précédente : } f\circ f=\mathrm{id}_D.\text{ Ainsi, l'application } f \text{ est bijective,}\\ \text{de bijection réciproque : } f^{-1}=f.\end{array}}$$

□

10. Soit $r\in[0,1[$. On note : $\mathscr{C}_r=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=r\}$. Démontrer : $f\big(\mathscr{C}_r\big)=\mathscr{C}_r$.
*On pourra notamment utiliser les questions **5** et **8**.*

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $w\in f\big(\mathscr{C}_r\big)$.
Démontrons : $w\in\mathscr{C}_r$, c'est-à-dire $|w|=r$.
Comme $w\in f\big(\mathscr{C}_r\big)$, alors il existe $z\in\mathscr{C}_r$ tel que : $w=f(z)$. On remarque :

$$\begin{aligned}|w| &= \big|f(z)\big| &&\\ &= |z| && \textit{(d'après 5)}\\ &= r && \textit{(car } z\in\mathscr{C}_r\textit{)}\end{aligned}$$

Ainsi : $w\in\mathscr{C}_r$.

$$\boxed{\text{On a démontré : } f\big(\mathscr{C}_r\big)\subset\mathscr{C}_r.}$$

($\supset$) Soit $w\in\mathscr{C}_r$.
Démontrons $w\in f\big(\mathscr{C}_r\big)$, c'est-à-dire, il existe $z\in\mathscr{C}_r$ tel que : $w=f(z)$.

- Tout d'abord, comme f est une involution de D d'après **8**, alors :

$$w \;=\; (f\circ f)(w) \;=\; f\big(f(w)\big)$$

On note alors : $z=f(w)$. On obtient : $w=f(z)$.
- Il reste à démontrer que le complexe noté z est bien un élément de $\mathscr{C}_r$.

$$\begin{aligned}|z| &= \big|f(w)\big| && \textit{(par définition de } z\textit{)}\\ &= |w| && \textit{(d'après 5)}\\ &= r && \textit{(car } w\in\mathscr{C}_r\textit{)}\end{aligned}$$

Ainsi $z\in\mathscr{C}_r$.

$$\boxed{\text{On a démontré : } \mathscr{C}_r\subset f\big(\mathscr{C}_r\big).}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } f\big(\mathscr{C}_r\big)=\mathscr{C}_r.}$$

□

Problème I

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ f(x) \ = \ \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle : $2 < e < 3$.

11. ***a)*** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) \ = \ \frac{(x-1)}{2x} \, f(x)$$

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :
  - × $f_1 : x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que composée $f_1 = g_2 \circ g_1$ où :
    - ▸ $g_1 : x \mapsto \frac{x}{2}$ est :
      dérivable sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.
      telle que : $g_1\big(]0, +\infty[\big) \subset \mathbb{R}$.
    - ▸ $g_2 : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  - × $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ est :
    - ▸ dérivable sur $]0, +\infty[$.
    - ▸ `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension de ce point, on a rédigé en détails la dérivabilité de la fonction f_1 qui est obtenue comme composée ($f_1 = g_2 \circ g_1$). Mais un tel niveau de détails n'est certainement pas attendu par les correcteurs.
- De manière générale, il n'est pas nécessaire de rédiger aussi précisément les questions portant sur la régularité de fonctions. Il est conseillé :
  - × de rédiger très proprement la régularité d'une fonction pour les questions que l'on traite en premier. On démontre ainsi au correcteur sa capacité à rédiger ce type de questions et on pourra alors réduire le niveau de détail pour les questions suivantes.
  - × de rédiger très proprement la régularité lorsqu'il s'agit du cœur de la question (« Démontrer que la fonction est continue / de classe $\mathcal{C}^1$ sur ... »

  Dans les autres cas, on pourra se contenter d'écrire que la fonction f est dérivable sur J (intervalle à déterminer) car elle est la composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats. Évidemment, cela n'apportera pas de point si l'intervalle J n'est pas le bon.
- Les précisions apportées dans cette question permettent de rappeler la formule de dérivation d'une composée. On a :

$$\forall x \in \,]0, 1[, \ (g_2 \circ g_1)'(x) = g_2'\big(g_1(x)\big) \times g_1'(x)$$

- Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f_1'(x)\, f_2(x) - f_1(x)\, f_2'(x)}{\big(\, f_2(x)\,\big)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\ \sqrt{x} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\ \frac{1}{2\ \sqrt{x}}}{\big(\sqrt{x}\,\big)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\ \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2}\ \frac{x-1}{x}\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x > 0,\ f'(x) = \frac{x-1}{2\,x}\ f(x).}$$

□

a) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > 0$ et $2\,x > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f'(x) \text{ est du signe de } x - 1.}$$

- On en déduit le tableau de variation suivant.

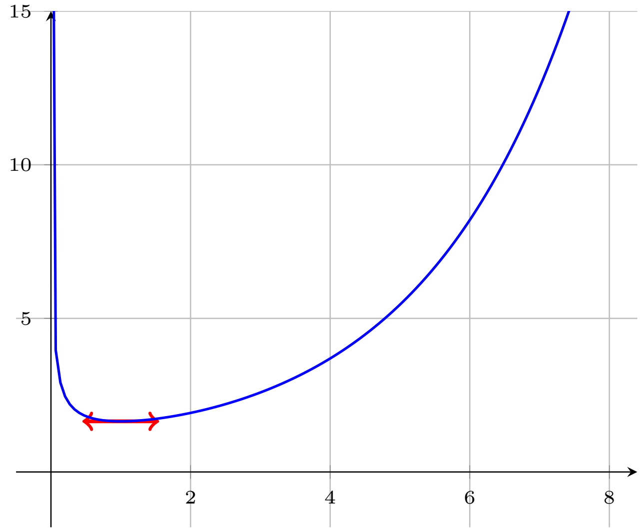
x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les différents éléments de ce tableau :
  - $\times$ comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, alors : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.
  - $\times$ $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées.

□

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.



Commentaire

- Il est ici de demandé de tracer l'**allure** de la courbe représentative de f. Ce tracé doit mettre en avant les informations du tableau de variation à savoir :
  - × la limite de f en 0. La droite d'équation $x = 0$ (axe des abscisses) est une asymptote verticale de la courbe représentative de f. La courbe représentative de f doit donc se rapprocher de cet axe.
  - × la limite de f en $+\infty$.
  - × le fait que f possède une tangente horizontale au point d'abscisse e. Le terme tangente trouve son étymologie dans le terme latin « tangere » qui signifie toucher. Pour la représentation graphique, l'usage est que la tangente de f en un point doit se confondre avec la courbe représentative de f à proximité de ce point.
- Il n'y a pas lieu de faire apparaître d'autres points sur le tracé. En particulier, donner l'**allure** d'une courbe ce `N'est PAS` relier des points mais bien effectuer la démarche consister à résumer graphiquement les informations du tableau de variation.

□

c) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0, +\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0, 1[$,
  - × strictement décroissante sur $]0, 1[$.

  Elle réalise donc une bijection de $]0, 1[$ sur $f\big(]0, 1[\big)$. Or :

$$f\big(]0,1[\big) \ = \ \Big]\lim_{x \to 1} f(x), \lim_{x \to 0} f(x)\Big[\ = \ ]\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$$

  Comme $n \in \,]\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$ (en effet $n \geqslant 2$ et $2 > \sqrt{\mathrm{e}} \ \Leftrightarrow \ 4 > \mathrm{e}$ et cette dernière inégalité est vérifiée), l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in \,]0, 1[$.

- En raisonnant de même sur $]1,+\infty[$, on démontre que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $v_n \in]1,+\infty[$.
- Remarquons enfin que $f(1) = \sqrt{e} \notin \mathbb{N}$.
  Ainsi, l'équation $x = 1$ n'est pas solution de l'équation $f(x) = 1$.

On en conclut que pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0,+\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n. De plus, par définition, ces valeurs vérifient : $0 < u_n < 1 < v_n$.

Commentaire

- Les questions qui suivent consistent en l'étude des suites (u_n) et (v_n). On parle ici de « suites implicites » car on n'a pas accès à la définition explicite des suites (u_n) et (v_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  × u_n est l'unique solution de l'équation $f(x) = n$ sur $]0, 1[$.
  × v_n est l'unique solution de l'équation $f(x) = n$ sur $]1,+\infty[$.

  On comprend alors que l'étude de ces suites va passer par l'étude des propriétés de la fonction f.
- De cette définition, on tire les propriétés :

  $$\boxed{\forall m \geqslant 2,\ f(u_m) = m} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall m \geqslant 2,\ f(v_m) = m}$$

  Ces propriétés sont au cœur de l'étude des suites implicites (u_n) et (v_n) comme on va le voir dans les questions à venir.

□

12. a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par définition des éléments de la suite (v_n) :

$$f(v_n) = n \ \leqslant\ n + 1 = f(v_{n+1})$$

- De plus, d'après la question précédente :
  × $v_n > 1$ et $v_{n+1} > 1$,
  × la fonction f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]\sqrt{e},+\infty[$.

  La réciproque de cette dernière bijection, définie sur $]\sqrt{e},+\infty[$ et à valeurs dans $]1,+\infty[$ est strictement croissante car de même monotonie que f sur $]1,+\infty[$.
  En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$v_n \ \leqslant\ v_{n+1}$$

On en conclut : $\forall n \geqslant 2$, $v_n \ \leqslant\ v_{n+1}$. La suite (v_n) est donc croissante.

□

b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Démontrons que la suite (v_n) n'est pas majorée.
  On procède par l'absurde.

  Supposons que la suite (v_n) est majorée.
- La suite (v_n) est :
  × croissante,
  × majorée (par hypothèse).
  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
  De plus, comme : $\forall n \geqslant 2$, $v_n > 1$, alors : $\ell \geqslant 1$.
- De plus, par définition des éléments de la suite (v_n), pour tout $n \geqslant 2$:

$$f(v_n) = n$$

  Or :
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = f(\ell)$ car f est continue sur $[1, +\infty[$ et donc continue en ℓ.
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.
  On obtient alors : $f(\ell) = +\infty$, ce qui est absurde.

  $\boxed{\text{On en conclut que la suite } (v_n) \text{ n'est pas majorée.}}$
- Finalement, la suite (v_n) est :
  × croissante,
  × non majorée.
  Elle diverge donc vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.}$$

Commentaire

- Lorsqu'une suite (v_n) est croissante, elle est soit :
  × majorée et dans ce cas elle converge.
  × non majorée et dans ce cas elle diverge.
- Ainsi, dans un énoncé, lorsqu'on demande de démontrer qu'une suite croissante diverge vers $+\infty$, il s'agit en réalité de démontrer que cette suite est non majorée.
- Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
  × montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée.
  × montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable. □

13. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par définition des éléments de la suite (u_n) :

$$f(u_n) = n \ \leqslant \ n + 1 = f(u_{n+1})$$

- De plus, d'après la question précédente :
  × $0 < u_n < 1$ et $0 < u_{n+1} < 1$,
  × la fonction f réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]\sqrt{e}, +\infty[$.
  La réciproque de cette dernière bijection, définie sur $]\sqrt{e}, +\infty[$ et à valeurs dans $]0,1[$ est strictement décroissante car de même monotonie que f sur $]0,1[$.
  En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$u_n \ \geqslant \ u_{n+1}$$

$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \geqslant 2,\ u_n \ \geqslant \ u_{n+1}. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$ □

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ converge.

Démonstration.
La suite (u_n) est :
× décroissante,
× minorée par 0 (par construction).
Elle est donc convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
De plus, comme : $\forall n \geqslant 2$, $0 < u_n < 1$, alors : $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \in [0,1].}$ □

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

Démonstration.
- On procède par l'absurde.
  On suppose : $\ell \neq 0$. Ainsi, par la question précédente :

$$0 < \ell \leqslant 1$$

- Or :
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ car f est continue sur $]0,1]$ et donc continue en ℓ.
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.
  On obtient alors : $f(\ell) = +\infty$, ce qui est absurde.

$\boxed{\text{On en conclut donc : } \ell = 0.}$

□

d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\, u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
- Tout d'abord, pour tout $n \geqslant 2$:
  × par définition des éléments de la suite (u_n) : $f(u_n) = n$,
  × $f(u_n) = \dfrac{e^{\frac{u_n}{2}}}{\sqrt{u_n}}$.
  On en déduit : $e^{\frac{u_n}{2}} \ = \ n\ \sqrt{u_n}$ ou encore, par élévation au carré :

$$n^2\ u_n \ = \ \left(e^{\frac{u_n}{2}}\right)^2$$

- Finalement, comme la suite (u_n) converge vers 0 et que la fonction exp est continue en 0 :

$$n^2 \; u_n \;=\; \mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \lim_{n\to+\infty} n^2 \; u_n \;=\; 1.}$$

- Ce résultat peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Cela démontre : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.}$$

$\square$

14. a) Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε.
On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leqslant n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$.
  Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\dfrac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```python
import numpy as np

def approx_u(n, eps) :
    a = 0
    b = 1
    while __________ :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            __________
        else :
            __________
    return (a+b)/2
```

Démonstration.
Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

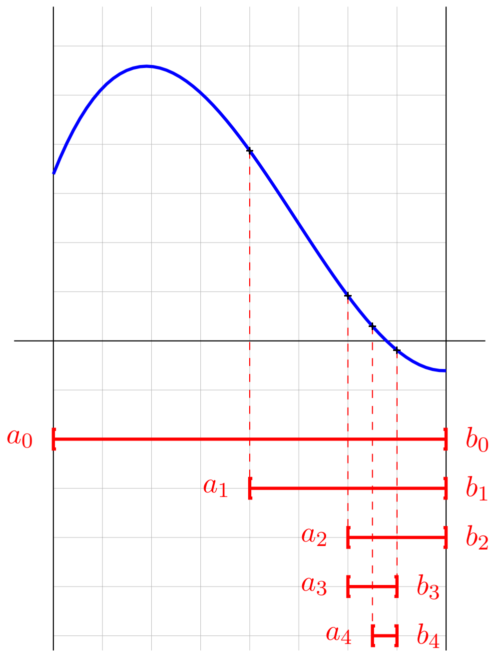
> *Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie*
> **Données** :
> × une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
> × un intervalle de recherche $[a, b]$,
> × une précision de recherche ε.
>
> **Résultat** : une valeur approchée à ε près d'un zéro (sur l'intervalle $[a, b]$) de la fonction g.
> Autrement dit, une valeur approchée (à ε près) d'un réel $x \in [a, b]$ tel que : $g(x) = 0$.

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :
  × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de g.
  Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.
  × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de g.
  Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

  La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.
  On itère jusqu'à obtenir un intervalle I contenant un zéro de g et de largeur plus faible que ε.
  Les points de cet intervalle I sont tous de bonnes approximations du zéro contenu dans I.
- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

> **Théorème des Valeurs Intermédiaires**
> Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur l'**intervalle** $[a, b]$.
> Supposons : $g(a)\ g(b) \leqslant 0$.
> Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.

> **Calcul des suites** (a_m), (b_m), (c_m)
> Cas $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$
> - Initialement, $a_0 = a$, $b_0 = b$
> - À chaque tour de boucle (tant que $b_m - a_m > \varepsilon$) :
>   × $c_m = \dfrac{a_m + b_m}{2}$ (point milieu de $[a_m, b_m]$)
>   × si $g(c_m) \geqslant 0$ alors :
>   ∗ $a_{m+1} = c_m$
>   ∗ $b_{m+1} = b_m$
>   × si $g(c_m) < 0$ alors :
>   ∗ $a_{m+1} = a_m$
>   ∗ $b_{m+1} = c_m$



- On construit ainsi une suite $\big([a_m, b_m]\big)_{m\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés :
  × contenant tous un zéro de g,
  × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.
  Soit $n \geqslant 2$. On cherche une valeur de x telle que : $f(x) = n$ ce qui s'écrit :

$$f(x) - n = 0 \quad \text{ou encore} \quad g_n(x) = 0 \ \text{ où } \ g_n : x \mapsto f(x) - n$$

On se fixe initialement l'intervalle de recherche $[0, 1]$ de sorte que l'équation $g_n(x) = 0$ (ce qui équivaut à $f(x) = n$) ne possède qu'une solution, à savoir la valeur u_n qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables `a` et `b` destinées à contenir les valeurs succesives de a_m et b_m. Ces variables sont initialisées respectivement à 0 et 1.

```
    a = 0
    b = 1
```

On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision `eps` escomptée.

```
    while (b-a) > eps :
```

On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

```
        c = (a+b) / 2
```

Puis on teste si $g_n(\mathtt{c}) < 0$, c'est-à-dire si $f(\mathtt{c}) < \mathtt{n}$.
Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de gauche.

```
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
          b = c
```

Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de droite.

```
        else :
          a = c
```

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que `eps` et contient un zéro de g_n. Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à `eps` près de ce zéro.
On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

```
    return a
```

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

```
    return b
```

Ou encore le point milieu, comme cela est fait dans l'énoncé :

```
    return (a+b)/2
```

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus $\dfrac{\mathtt{eps}}{2}$ de ce point milieu.
On obtient ainsi une valeur approchée à $\dfrac{\mathtt{eps}}{2}$ du zéro recherché.

Commentaire

- On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :
  - × l'intervalle de recherche initial $[0, 1]$ est de largeur 1.
  - × la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.
    À la fin du $m^{\text{ème}}$ tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur $\dfrac{1}{2^m}$.
  - × l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que `eps`.

  On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^m} \leqslant \texttt{eps} \quad &\Leftrightarrow \quad 2^m \geqslant \frac{1}{\texttt{eps}} && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad m \, \ln(2) \geqslant -\ln(\texttt{eps}) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad m \geqslant \frac{-\ln(\texttt{eps})}{\ln(2)} && \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{aligned}$$

  Ainsi : $\left\lceil \dfrac{-\ln(\texttt{eps})}{\ln(2)} \right\rceil$ tours de boucle suffisent.

  Par exemple, si l'on souhaite obtenir une précision de 5 chiffres après la virgule, c'est-à-dire si on choisit $\texttt{eps} = 10^{-5}$, alors il suffit d'effectuer :

$$\left\lceil \frac{-\ln\left(10^{-5}\right)}{\ln(2)} \right\rceil = \left\lceil \frac{5 \, \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil = \left\lceil 5 \, \frac{\ln(2) + \ln(5)}{\ln(2)} \right\rceil = \left\lceil 5 \, \left(1 + \frac{\ln(5)}{\ln(2)}\right) \right\rceil = 17$$

  On retiendra que si l'on souhaite obtenir une précision de 5 chiffres après la virgule, il suffit d'effectuer 17 tours de boucle (de l'ordre de 3×5 tours de boucle). En raisonnant de même, on démontre qu'il faut effectuer environ 3×7 tours de boucle pour une précision en 10^{-7} et $3 \times m$ tours de boucle pour une précision en 10^{-m}. Cet algorithme est donc extrêmement rapide.

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec beaucoup de précision la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** (on place ci-dessous le programme obtenu) démontre la bonne compréhension de l'algorithme demandé et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.

- On obtient le programme complet suivant.

```python
import numpy as np

def approx_u(n, eps) :
    a = 0
    b = 1
    while (b-a) > eps :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a+b)/2
```

□

b) Écrire une fonction en langage **Python**, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près.
On pourra faire appel à la fonction `approx_u` *définie à la question précédente.*

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
1 def sp(N, eps) :
2     S = 0
3     for n in range(2, N+1) :
4         S = S + approx_u(n, eps/(N-1))
5     return S
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - cette fonction se nomme `sp`,
  - elle prend en paramètre d'entrée l'entier `N` et le réel `eps`,
  - elle admet pour variable de sortie la variable `S`.

```
1 def sp(N, eps) :
```

```
5     return S
```

  La variable `S`, qui contiendra les valeurs successives de $\sum_{n=2}^{N} u_n$, est initialisée à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2     S = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à calculer les valeurs successives de $\sum_{n=2}^{N} u_n$. Pour ceal, on utilise une structure itérative (boucle `for`) :

```
3     for n in range(2, N+1) :
4         S = S + approx_u(n, eps/(N-1))
```

  Les valeurs approchées de $u_2, \ldots, u_N$ doivent être calculées à $\dfrac{\texttt{eps}}{(\texttt{N}-1)}$ près afin que la somme soit bien une valeur approchée de $\sum_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près puisque la somme contient $N-1$ termes.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `S` contient bien la somme $\sum_{n=2}^{N} u_n$.

□

Problème II

On considérera $\mathbb{C}$ en bijection avec le plan complexe. Étant donnés quatre nombres complexes deux à deux distincts a, b, c et d, on définit leur birapport $[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d]$ par :

$$[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \;=\; \frac{(c-a)\,(d-b)}{(d-a)\,(c-b)}$$

Il existe $(x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$a = x_a + i\,y_a, \quad b = x_b + i\,y_b \quad \text{et} \quad c = x_c + i\,y_c$$

On note A, B et C les images respectives de a, b et c dans le plan complexe. On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant :

$$A,\ B \text{ et } C \text{ alignés} \quad \Leftrightarrow \quad (x_b - x_a)\,(y_c - y_a) - (x_c - x_a)\,(y_b - y_a) \;=\; 0$$

Commentaire

Démontrons ce résultat admis.

$$\begin{aligned}
A,\ B \text{ et } C \text{ alignés} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ c - a = \lambda\,(b-a) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (x_c - x_a) + i\,(y_c - y_a) = \lambda\big((x_b - x_a) + i\,(y_b - y_a)\big) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x_c - x_a & = & \lambda\,(x_b - x_a) \\ y_c - y_a & = & \lambda\,(y_b - y_a) \end{array}\right. \qquad \textit{(par unicité de l'écriture algébrique)} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x_c - x_a}{x_b - x_a} & = & \lambda \\ \dfrac{y_c - y_a}{y_b - y_a} & = & \lambda \end{array}\right. \qquad \textit{(car, comme a et b sont distincts : $x_b \neq x_a$ et $y_b \neq y_a$)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x_c - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_a} \\
&\Leftrightarrow \quad (x_c - x_a)\,(y_b - y_a) = (y_c - y_a)\,(x_b - x_a)
\end{aligned}$$

15. a) Expliciter le birapport $[1\,;\,i\,;\,-1\,;\,-i]$.

Démonstration.
Par définition du birapport :

$$[1\,;\,i\,;\,-1\,;\,-i] \;=\; \frac{(-1-1)\,(-i-i)}{(-i-1)\,(-1-i)} \;=\; \frac{(-2)\times(-2i)}{(i+1)^2} \;=\; \frac{4i}{\cancel{-1} + 2i + \cancel{1}} \;=\; \frac{4i}{2i}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } [1\,;\,i\,;\,-1\,;\,-i] = 2.}$$

□

b) $(*)$ Expliciter le birapport $\left[0\,;\,-1-i\,;\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,;\,1+i\right]$.
On commencera par écrire les complexes non nuls en fonction de $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$*).*

Démonstration.

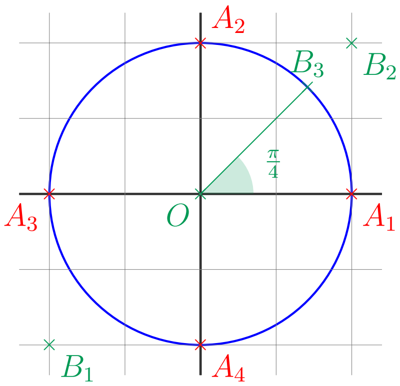
- On commence par exprimer $1+i$ en fonction de $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.
  - × Tout d'abord :
$$|1+i| \;=\; \sqrt{1^2+1^2} \;=\; \sqrt{2}$$
  - × Ainsi :
$$1+i \;=\; \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) \;=\; \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) \;=\; \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\boxed{1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } -1-i=-(1+i)=-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}$$
- Par définition du birapport :
$$\begin{aligned}\left[0\,;\,-1-i\,;\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,;\,1+i\right] \;&=\; \frac{\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}-0\right)\,\left((1+i)-(-1-i)\right)}{(1+i-0)\,\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}-(-1-i)\right)}\\ &=\; \frac{\cancel{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}-\left(-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right)}{\sqrt{2}\,\cancel{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}-\left(-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right)}\\ &=\; \frac{2\sqrt{2}\,\cancel{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}}{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2})\,\cancel{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}}\\ &=\; \frac{2\,\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } \left[0\,;\,-1-i\,;\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,;\,1+i\right] = \frac{2}{1+\sqrt{2}}.}$$

□

c) $(*)$ Représenter l'image de ces 8 complexes sur une même figure (on représentera également l'image de l'ensemble $\mathbb{U}$).

Démonstration.

- Les images de 1, i, -1, $-i$, 0, $-1-i$ et $1+i$ sont respectivement :
$$\begin{aligned}&A_1=(1,0),\quad A_2=(0,1),\quad A_3=(-1,0),\quad A_4=(0,-1),\\ &O=(0,0),\quad B_1=(-1,-1)\quad\text{et}\quad B_2=(1,1)\end{aligned}$$
- Ensuite, l'image B_3 de $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ est le point de module 1 et donc un argument est $\frac{\pi}{4}$. Il est donc situé sur le cercle de centre O et de rayon 1, et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ forme un angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses.
- Enfin, l'image de $\mathbb{U}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.



□

16. Soient a, b, c et d quatre complexes deux à deux distincts. On note A, B, C et D leur image respective dans le plan complexe.
On suppose que A, B et C sont alignés. Démontrer que A, B, C et D sont alignés si et seulement si $[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, remarquons que, d'après l'énoncé, les points A, B et C sont alignés.
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$. Ainsi :

$$c - a = \lambda\,(c - b)$$

Or, $c \neq b$, donc : $\dfrac{c-a}{c-b} = \lambda$.

- On raisonne ensuite par équivalence.

$$\begin{array}{rcll}
A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont alignés} & \Leftrightarrow & A,\ B \text{ et } D \text{ sont alignés} & \textit{(car } A, B \textit{ et } C \textit{ le sont déjà)} \\
& \Leftrightarrow & \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont colinéaires} & \\
& \Leftrightarrow & \exists \mu \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{BD} = \mu \cdot \overrightarrow{AD} & \\
& \Leftrightarrow & \exists \mu \in \mathbb{R},\ d - b = \mu\,(d - a) & \\
& \Leftrightarrow & \exists \mu \in \mathbb{R},\ \dfrac{d-b}{d-a} = \mu & \textit{(car : } d \neq a\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & \exists \mu \in \mathbb{R},\ \dfrac{d-b}{d-a} \times \dfrac{c-a}{c-b} = \mu \times \lambda & \textit{(car, d'après le point précédent : } \dfrac{c-a}{c-b} = \lambda\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & \dfrac{(d-b)\,(c-a)}{(d-a)\,(c-b)} \in \mathbb{R} & \\
& \Leftrightarrow & [a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \in \mathbb{R} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, les points } A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont alignés si et seulement si } [a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \in \mathbb{R}.}$$

□

17. a) Soient $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ tels que $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$. Montrer que α et α' ne peuvent pas être tous les deux nuls, et montrer que le système linéaire suivant d'inconnues x et y admet une unique solution.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha\, x & + & \beta\, y & = & \gamma \\ \alpha'\, x & + & \beta'\, y & = & \gamma' \end{array} \right.$$

On distinguera 3 cas : $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$ et α et α' sont non nuls.

Démonstration.

- On raisonne par l'absurde.
  Supposons : $\alpha = \alpha' = 0$. Alors :

$$\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta \ = \ 0 \times \beta' - 0 \times \beta \ = \ 0$$

  Absurde ! (car, d'après l'énoncé : $\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta \neq 0$)

$$\boxed{\text{Les réels } \alpha \text{ et } \alpha' \text{ ne peuvent pas être tous les deux nuls.}}$$

- Trois cas se présentent.
  × si $\alpha = 0$, alors :
    - d'après le point précédent : $\alpha' \neq 0$,
    - avec un raisonnement par l'absurde similaire au précédent, on déduit : $\beta \neq 0$.

    On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha\, x & + & \beta\, y & = & \gamma \\ \alpha'\, x & + & \beta'\, y & = & \gamma' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & \beta\, y & = & \gamma \\ \alpha'\, x & + & \beta'\, y & = & \gamma' \end{array} \right.$$

$$\underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha'\, x & + & \beta'\, y & = & \gamma' \\ & & \beta\, y & = & \gamma \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow \beta\, L_1 - \beta'\, L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha'\, \beta\, x & = & \beta\, \gamma' - \beta'\, \gamma \\ \beta\, y & = & \gamma \end{array} \right. \qquad \textit{(car } \beta \neq 0\textit{)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en conclut que, si } \alpha = 0, \text{ alors l'unique solution} \\ \text{du système de l'énoncé est : } \left(\dfrac{\beta\, \gamma' - \beta'\, \gamma}{\alpha'\, \beta},\ \dfrac{\gamma}{\beta} \right). \end{array}}$$

  × si $\alpha' = 0$, alors :
    - d'après le point précédent : $\alpha \neq 0$,
    - avec un raisonnement par l'absurde similaire au précédent, on déduit : $\beta' \neq 0$.

    On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha\, x & + & \beta\, y & = & \gamma \\ \alpha'\, x & + & \beta'\, y & = & \gamma' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha\, x & + & \beta\, y & = & \gamma \\ & & \beta'\, y & = & \gamma' \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow \beta'\, L_1 - \beta\, L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha\, x & = & \beta'\, \gamma - \beta\, \gamma' \\ \beta'\, y & = & \gamma' \end{array} \right. \qquad \textit{(car } \beta' \neq 0\textit{)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en conclut que, si } \alpha' = 0, \text{ alors l'unique solution} \\ \text{du système de l'énoncé est : } \left(\dfrac{\gamma'}{\alpha'},\ \dfrac{\alpha'\, \gamma - \alpha\, \gamma'}{\alpha'\, \beta} \right). \end{array}}$$

× si $\alpha \neq 0$ et $\alpha' \neq 0$, alors :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha\, x & + & \beta\, y & = & \gamma \\ \alpha'\, x & + & \beta'\, y & = & \gamma' \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \alpha\, L_2 - \alpha'\, L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha\, x & + & \beta\, y & = & \gamma \\ & & (\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta)\, y & = & \alpha\, \gamma' - \alpha'\, \gamma \end{array}\right. \quad \textit{(car } \alpha \neq 0\textit{)}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow (\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta)\, L_1 - \beta\, L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} \alpha\, (\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta)\, x & = & \alpha\, (\beta' \gamma - \beta\, \gamma') \\ (\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta)\, y & = & \alpha\, \gamma' - \alpha'\, \gamma \end{array}\right. \quad \textit{(car } \alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta \neq 0\textit{)}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{\alpha}\, L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} (\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta)\, x & = & \beta' \gamma - \beta\, \gamma' \\ (\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta)\, y & = & \alpha\, \gamma' - \alpha'\, \gamma \end{array}\right. \quad \textit{(car } \alpha \neq 0\textit{)}$$

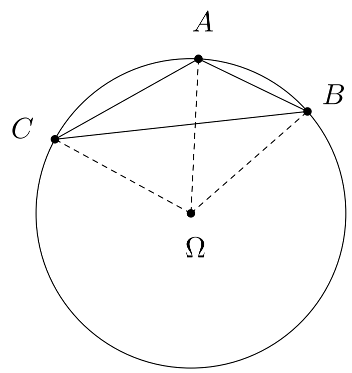
On en conclut que, si $\alpha \neq 0$ et $\alpha' \neq 0$, alors l'unique solution du système de l'énoncé est : $\left(\dfrac{\beta'\, \gamma - \beta\, \gamma'}{\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta}, \dfrac{\alpha\, \gamma' - \alpha'\, \gamma}{\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta} \right)$.

□

b) Soient a, b et c trois complexes d'images respectives A, B et C. Supposons que A, B et C ne sont pas alignés. Montrer par le calcul qu'il existe un unique point Ω d'affixe ω tel que :

$$|\omega - a| \; = \; |\omega - b| \qquad \text{et} \qquad |\omega - a| \; = \; |\omega - c|$$

On ne demande pas d'expliciter les coordonnées de ω, simplement de prouver son existence et son unicité.



Démonstration.
Comme $(a, b, c, \omega) \in \mathbb{C}^4$, alors il existe $(x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c, x, y) \in \mathbb{R}^8$ tel que :

$$a = x_a + i\, y_a, \quad b = x_b + i\, y_b, \quad c = x_c + i\, y_c \quad \text{et} \quad \omega = x + i\, y$$

- On remarque :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |\omega - a| & = & |\omega - b| \\ |\omega - a| & = & |\omega - c| \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} |\omega - a|^2 & = & |\omega - b|^2 \\ |\omega - a|^2 & = & |\omega - c|^2 \end{array}\right. \quad \textit{(par injectivité de } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 & = & (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 \\ (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 & = & (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \end{array}\right.$$

En poursuivant les équivalences, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |\omega - a| & = & |\omega - b| \\ |\omega - a| & = & |\omega - c| \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \cancel{x^2} - 2xx_a + x_a^2 + \cancel{y^2} - 2yy_a + y_a^2 & = & \cancel{x^2} - 2xx_b + x_b^2 + \cancel{y^2} - 2yy_b + y_b^2 \\ \cancel{x^2} - 2xx_a + x_a^2 + \cancel{y^2} - 2yy_a + y_a^2 & = & \cancel{x^2} - 2xx_c + x_c^2 + \cancel{y^2} - 2yy_c + y_c^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,(x_b - x_a)\,x & + & 2\,(y_b - y_a)\,y & = & x_b^2 - x_a^2 + y_b^2 - y_a^2 \\ 2\,(x_b - x_a)\,x & + & 2\,(y_b - y_a)\,y & = & x_b^2 - x_a^2 + y_b^2 - y_a^2 \end{array}\right. \qquad (*)$$

On note alors :

$$\begin{array}{lll} \alpha = 2\,(x_b - x_a), & \beta = 2\,(y_b - y_a), & \gamma = x_b^2 - x_a^2 + y_b^2 - y_a^2 \\ \alpha' = 2\,(x_c - x_a), & \beta' = 2\,(y_c - y_a), & \gamma' = x_c^2 - x_a^2 + y_c^2 - y_a^2 \end{array}$$

Le système $(*)$ s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha\,x & + & \beta\,y & = & \gamma \\ \alpha'\,x & + & \beta'\,y & = & \gamma' \end{array}\right.$$

- D'après la question précédente, ce système admet une unique solution si : $\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta \neq 0$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta & = & 4\,(x_b - x_a)\,(y_c - y_a) - 4\,(x_c - x_a)\,(y_b - y_a) \\ & = & 4\,\big((x_b - x_a)\,(y_c - y_a) - (x_c - x_a)\,(y_b - y_a)\big) \end{array}$$

On sait de plus que A, B et C ne sont pas alignés. Ainsi, d'après la propriété admise en début d'énoncé :

$$(x_b - x_a)\,(y_c - y_a) - (x_c - x_a)\,(y_b - y_a) \;\neq\; 0$$

D'où : $4\,(x_b - x_a)\,(y_c - y_a) - (x_c - x_a)\,(y_b - y_a) \neq 0$. On en déduit :

$$\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta \;\neq\; 0$$

D'après la question précédente, le système $(*)$ admet donc une unique solution.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Autrement dit, il existe un unique point } \Omega \text{ d'affixe } \omega \text{ tel que :} \\ |\omega - a| = |\omega - b| \text{ et } |\omega - a| = |\omega - c|.\end{array}}$$

$\square$

On note : $R = |\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$. On vient de montrer que les points A, B et C d'affixes a, b et c appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon R : ils sont dits cocycliques. On vient de redémontrer au passage que les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes et que Ω est le centre du cercle circonscrit. **En particulier, on demande de ne pas utiliser ce résultat pour rèpondre à cette question.**

18. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $z \in \mathbb{C}$. On suppose que les complexes $\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\mathrm{e}^{i\beta}$, $\mathrm{e}^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts.

a) Traduire à l'aide de congruences les inégalités :

$$\mathrm{e}^{i\alpha} \neq \mathrm{e}^{i\beta}, \qquad \mathrm{e}^{i\alpha} \neq \mathrm{e}^{i\gamma} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{i\beta} \neq \mathrm{e}^{i\gamma}$$

Démonstration.

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\alpha} \neq \mathrm{e}^{i\beta} \ \Leftrightarrow\ \alpha \not\equiv \beta\ [2\pi], \quad \mathrm{e}^{i\alpha} \neq \mathrm{e}^{i\gamma} \ \Leftrightarrow\ \alpha \not\equiv \gamma\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{i\beta} \neq \mathrm{e}^{i\gamma} \ \Leftrightarrow\ \beta \not\equiv \gamma\ [2\pi]}$$ □

b) En déduire que $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)$ sont non nuls.

Démonstration.
D'après l'énoncé, les complexes $\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\mathrm{e}^{i\beta}$ et $\mathrm{e}^{i\gamma}$ sont deux à deux distincts. En particulier :

$$\begin{array}{rcl} & \mathrm{e}^{i\alpha} \neq \mathrm{e}^{i\beta} & \\ \text{donc} & \alpha \not\equiv \beta\ [2\pi] & \textit{(d'après la question précédente)} \\ \text{d'où} & \alpha - \beta \not\equiv 0\ [2\pi] & \\ \text{ainsi} & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \not\equiv 0\ [\pi] & \\ \text{enfin} & \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \neq 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \neq 0}$$

En raisonnant de même :

× d'une part, comme $\mathrm{e}^{i\alpha} \neq \mathrm{e}^{i\gamma}$, alors : $\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right) \neq 0$.

× d'autre part, comme $\mathrm{e}^{i\beta} \neq \mathrm{e}^{i\gamma}$, alors : $\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right) \neq 0$.

$$\boxed{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right) \neq 0 \text{ et } \sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right) \neq 0}$$ □

c) $(*)$ Démontrer :

$$\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right] = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \frac{\left(z-\mathrm{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-\mathrm{e}^{-i\alpha}\right)}{\left|z-\mathrm{e}^{i\alpha}\right|^2}$$

Démonstration.

- Tout d'abord, comme les complexes $\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\mathrm{e}^{i\beta}$, $\mathrm{e}^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts d'après l'énoncé, alors le birapport $\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right]$ est bien défini.

- On calcule :

$$\left[e^{i\alpha}\,;\,e^{i\beta}\,;\,e^{i\gamma}\,;\,z\right] \;=\; \frac{\left(e^{i\gamma}-e^{i\alpha}\right)\left(z-e^{i\beta}\right)}{\left(z-e^{i\alpha}\right)\left(e^{i\gamma}-e^{i\beta}\right)} \;=\; \frac{e^{i\gamma}-e^{i\alpha}}{e^{i\gamma}-e^{i\beta}} \times \frac{z-e^{i\beta}}{z-e^{i\alpha}}$$

  × D'une part :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\gamma}-e^{i\alpha}}{e^{i\gamma}-e^{i\beta}} &= \frac{e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}}-e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}\right)}{e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}\left(e^{-i\frac{\beta-\gamma}{2}}-e^{i\frac{\beta-\gamma}{2}}\right)} && \textit{(par factorisation par l'exponentielle de l'angle moitié)} \\
&= e^{i\left(\frac{\alpha+\cancel{\gamma}}{2}-\frac{\beta+\cancel{\gamma}}{2}\right)} \frac{\cancel{2i}\,\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\cancel{2i}\,\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} && \textit{(par formule d'Euler)} \\
&= e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)}
\end{aligned}$$

  × D'autre part :

$$\frac{z-e^{i\beta}}{z-e^{i\alpha}} = \frac{\left(z-e^{i\beta}\right)\overline{\left(z-e^{i\alpha}\right)}}{\left(z-e^{i\alpha}\right)\overline{\left(z-e^{i\alpha}\right)}} = \frac{\left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-\overline{e^{i\alpha}}\right)}{\left|z-e^{i\alpha}\right|^2} = \frac{\left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right)}{\left|z-e^{i\alpha}\right|^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \left[e^{i\alpha}\,;\,e^{i\beta}\,;\,e^{i\gamma}\,;\,z\right] \;=\; \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \frac{\left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right)}{\left|z-e^{i\alpha}\right|^2}.}$$

□

d) Démontrer qu'il existe un **réel** D, dépendant de z, α et β, vérifiant :

$$e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right) \;=\; |z|^2\, e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} + D$$

On justifiera bien pourquoi D est un réel.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right) &= z\,\overline{z} - e^{i\beta}\,\overline{z} - e^{-i\alpha}\,z + e^{i\beta}\,e^{-i\alpha} \\
&= |z|^2 - e^{i\beta}\,\overline{z} - e^{-i\alpha}\,z + e^{i(\beta-\alpha)}
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
& e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right) \\
=\;& e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \left(|z|^2 - e^{i\beta}\,\overline{z} - e^{-i\alpha}\,z + e^{i(\beta-\alpha)}\right) && \textit{(d'après ce qui précède)} \\
=\;& e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\,|z|^2 - e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\,e^{i\beta}\,\overline{z} - e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\,e^{-i\alpha}\,z + e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\,e^{i(\beta-\alpha)} \\
=\;& e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\,|z|^2 - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\overline{z} - e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\,z + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
-\mathrm{e}^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ \overline{z} - \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ z &= -\overline{\mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}}\ \overline{z} - \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ z \\
&= -\overline{\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ z\right)} - \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ z \\
&= -\left(\overline{\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ z\right)} + \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ z\right) \\
&= -\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ z\right)
\end{aligned}$$

- On note alors : $D = -\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ z\right)$. On a bien, par définition de la partie réelle : $D \in \mathbb{R}$. On obtient de plus :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z - \mathrm{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z} - \mathrm{e}^{-i\alpha}\right) &= \mathrm{e}^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\ |z|^2 - \mathrm{e}^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ \overline{z} - \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ z + \mathrm{e}^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} \\
&= \mathrm{e}^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\ |z|^2 + \mathrm{e}^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} + D
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe donc bien } D \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z - \mathrm{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z} - \mathrm{e}^{-i\alpha}\right) = |z|^2\, \mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + \mathrm{e}^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} + D.\end{array}}$$

□

e) Démontrer finalement :

$$\operatorname{Im}\left(\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right]\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2 - 1}{|z - \mathrm{e}^{i\alpha}|^2}$$

Démonstration.

- D'après ***18c*** :

$$\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right] = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \frac{\left(z - \mathrm{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z} - \mathrm{e}^{-i\alpha}\right)}{|z - \mathrm{e}^{i\alpha}|^2}$$

Comme $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \dfrac{1}{|z - \mathrm{e}^{i\alpha}|^2} \in \mathbb{R}$, on en déduit, par linéarité de $\operatorname{Im}(\cdot)$:

$$\operatorname{Im}\left(\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right]\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{1}{|z - \mathrm{e}^{i\alpha}|^2} \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z - \mathrm{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z} - \mathrm{e}^{-i\alpha}\right)\right)$$

- De plus, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z - \mathrm{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z} - \mathrm{e}^{-i\alpha}\right)\right) \\
= \ & \mathrm{Im}\left(|z|^2\, \mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + \mathrm{e}^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} + D\right) \\
= \ & |z|^2 \ \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right) + \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right) + \mathrm{Im}\,(D) && \textit{(par linéarité de } \mathrm{Im}\,(\cdot)\textit{)} \\
= \ & |z[^2 \ \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) + 0 && \textit{(car : } D \in \mathbb{R}\textit{)} \\
= \ & |z[^2 \ \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + -\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) && \textit{(car la fonction } \sin \textit{ est impaire)} \\
= \ & \left(|z|^2 - 1\right) \ \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Im}\left(\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\, \mathrm{e}^{i\beta}\,;\, \mathrm{e}^{i\gamma}\,;\, z\right]\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2-1}{|z-\mathrm{e}^{i\alpha}|^2}.}$$

□

f) En déduire : $\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\, \mathrm{e}^{i\beta}\,;\, \mathrm{e}^{i\gamma}\,;\, z\right] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$.

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{aligned}
& \left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\, \mathrm{e}^{i\beta}\,;\, \mathrm{e}^{i\gamma}\,;\, z\right] \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \ & \mathrm{Im}\left(\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\, \mathrm{e}^{i\beta}\,;\, \mathrm{e}^{i\gamma}\,;\, z\right]\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \ & \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2-1}{|z-\mathrm{e}^{i\alpha}|^2} = 0 && \textit{(d'après la question précédente)} \\
\Leftrightarrow \ & \frac{|z|^2-1}{|z-\mathrm{e}^{i\alpha}|^2} = 0 && \textit{(car, d'après \textbf{18b}, ces 3 sinus sont non nuls)} \\
\Leftrightarrow \ & |z|^2 - 1 = 0 && \textit{(car, comme } z \textit{ et } e^{i\alpha} \textit{ sont distincts : } \left|z - e^{i\alpha}\right| \neq 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow \ & |z|^2 = 1 \\
\Leftrightarrow \ & |z| = 1 && \textit{(par injectivité de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
\Leftrightarrow \ & z \in \mathbb{U}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\, \mathrm{e}^{i\beta}\,;\, \mathrm{e}^{i\gamma}\,;\, z\right] \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{U}.}$$

□

19. On se donne dans cette question quatre complexes a, b, c et d deux à deux distincts d'images respectives A, B, C et D. On suppose que trois points quelconques parmi A, B, C et D ne sont pas alignés. On note, comme dans la question ***17b***, Ω l'unique point d'affixe ω équidistant de A, B et C (il n'est pas demandé de redémontrer son existence, ni de donner ses coordonnées) et $R = |\omega - a|$.

a) Expliciter deux complexes λ et μ tels que $\lambda a + \mu = 1$ et $\lambda\omega + \mu = 0$.
On note dans la suite h la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $h : z \mapsto \lambda z + \mu$.

Démonstration.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a\,\lambda & + & \mu & = & 1 \\ \omega\,\lambda & + & \mu & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} a\,\lambda & + & \mu & = & 1 \\ (\omega - a)\,\lambda & & & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow (\omega - a)\,L_1 - a\,L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rrcr} & (\omega - a)\,\mu & = & \omega \\ (\omega - a)\,\lambda & & = & -1 \end{array}\right. \quad \textit{(car, comme A et Ω sont distincts : $\omega - a \neq 0$)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lambda = \frac{1}{a - \omega} \text{ et } \mu = \frac{\omega}{\omega - a}.}$$

□

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|h(z)| = 1$ si et seulement si $|\omega - z| = R$. En déduire l'existence de trois réels α, β et γ vérifiant :

$$h(a) \;=\; \mathrm{e}^{i\alpha}, \qquad h(b) \;=\; \mathrm{e}^{i\beta} \qquad \text{et} \qquad h(c) \;=\; \mathrm{e}^{i\gamma}$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \big|h(z)\big| = 1 & \Leftrightarrow & |\lambda\,z + \mu| = 1 & \textit{(par définition de h)} \\ & \Leftrightarrow & \left|\dfrac{1}{a - \omega}\ z - \dfrac{\omega}{a - \omega}\right| = 1 & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & \Leftrightarrow & \left|\dfrac{1}{a - \omega}\ (z - \omega)\right| = 1 & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{|a - \omega|}\ |z - \omega| = 1 & \\ & \Leftrightarrow & |z - \omega| = |a - \omega| = R & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \big|h(z)\big| = 1 \Leftrightarrow |z - \omega| = R.}$$

- On remarque, par définition de R : $R = |\omega - a|$.
Ainsi, d'après le point précédent : $\big|h(a)\big| = 1$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que : } h(a) = \mathrm{e}^{i\alpha}.}$$

- De plus, comme Ω est équidistant de A, B et C, alors : $A\Omega = B\Omega = C\Omega$. Ainsi :

$$R \;=\; |\omega - a| \;=\; |\omega - b| \;=\; |\omega - c|$$

On en déduit : $\left|h(b)\right| = 1$ et $\left|h(c)\right| = 1$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } h(b) = \mathrm{e}^{i\beta} \text{ et } h(c) = \mathrm{e}^{i\gamma}.}$$

□

c) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et déterminer sa bijection réciproque. En déduire que les complexes $\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\mathrm{e}^{i\beta}$, $\mathrm{e}^{i\gamma}$ et $h(d)$ sont deux à deux distincts.

Démonstration.

- Soit $(u, z) \in \mathbb{C}^2$. Comme $\lambda \neq 0$ (d'après ***19a***) :

$$h(z) = u \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\, z + \mu = u \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\, z = u - \mu \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{u - \mu}{\lambda}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } h \text{ est bijective, de bijection réciproque } h^{-1} : u \mapsto \frac{u - \mu}{\lambda}.}$$

- Comme la fonction h est bijective, elle est en particulier injective. Autrement dit, pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$z_1 \neq z_2 \quad \Rightarrow \quad h(z_1) \neq h(z_2)$$

Or, comme les points A, B, C et D sont deux à deux distincts, alors les complexes a, b, c et d sont deux à deux distincts.
Par injectivité de h, on en déduit que les complexes $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$ et $h(d)$ sont distincts.

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{19b}}\text{, on en conclut que les complexes } \mathrm{e}^{i\alpha}, \mathrm{e}^{i\beta}, \mathrm{e}^{i\gamma} \text{ et } h(d) \text{ sont distincts.}}$$

□

d) On pose $z = h(d)$. Démontrer :

$$\left[\mathrm{e}^{i\alpha} \,;\, \mathrm{e}^{i\beta} \,;\, \mathrm{e}^{i\gamma} \,;\, z\right] \;=\; [a \,;\, b \,;\, c \,;\, d]$$

Démonstration.
D'après ***19b*** :

$$\begin{aligned}
\left[\mathrm{e}^{i\alpha} \,;\, \mathrm{e}^{i\beta} \,;\, \mathrm{e}^{i\gamma} \,;\, z\right] &= \left[h(a) \,;\, h(b) \,;\, h(c) \,;\, h(d)\right] \\
&= \frac{\big(h(c) - h(a)\big)\,\big(h(d) - h(b)\big)}{\big(h(d) - h(a)\big)\,\big(h(c) - h(b)\big)} && \textit{(par définition du birapport)} \\
&= \frac{\big(\lambda\, c + \cancel{\mu} - (\lambda\, a + \cancel{\mu})\big)\,\big(\lambda\, d + \cancel{\mu} - (\lambda\, b + \cancel{\mu})\big)}{\big(\lambda\, d + \cancel{\mu} - (\lambda\, a + \cancel{\mu})\big)} && \textit{(par définition de } h\textit{)} \\
&= \frac{\cancel{\lambda^2}\,(c - a)\,(d - b)}{\cancel{\lambda^2}\,(d - a)\,(c - b)} \\
&= [a \,;\, b \,;\, c \,;\, d] && \textit{(par définition du birapport)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left[\mathrm{e}^{i\alpha} \,;\, \mathrm{e}^{i\beta} \,;\, \mathrm{e}^{i\gamma} \,;\, z\right] \;=\; [a \,;\, b \,;\, c \,;\, d]}$$

□

e) En déduire que $[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d]$ est réel si et seulement si $|d-\omega| = R$, en d'autres termes si et seulement si D appartient au cercle de centre Ω et de rayon R.

Démonstration.
On remarque :

$$[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \in \mathbb{R} \iff \left[e^{i\alpha}\,;\,e^{i\beta}\,;\,e^{i\gamma}\,;\,z\right] \in \mathbb{R} \quad \text{(d'après la question précédente)}$$
$$\iff z \in \mathbb{U} \quad \text{(d'après \textbf{18f})}$$

On précise que l'on peut effectivement appliquer la question ***18f*** car, d'après ***19c***, les complexes $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et z sont distincts.
En poursuivant le raisonnement par équivalence, on obtient :

$$\begin{aligned}[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \in \mathbb{R} &\iff z \in \mathbb{U} \\ &\iff h(d) \in \mathbb{U} && \text{(par définition de } z\text{)} \\ &\iff \left|h(d)\right| = 1 \\ &\iff |\omega - d| = R && \text{(d'après \textbf{19b})}\end{aligned}$$

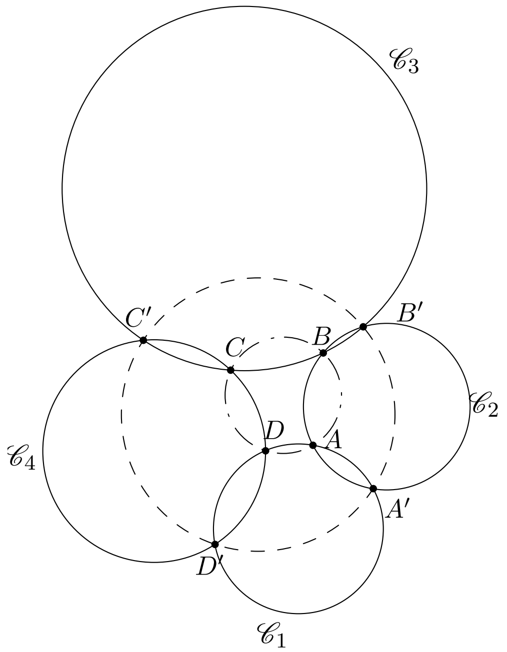
$$\boxed{\text{On a bien démontré : } [a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \in \mathbb{R} \iff |\omega - d| = R.}$$

□

On vient donc de montrer le résultat suivant :

> Quatre complexes distincts sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel.

20. On cherche à présent à utiliser ce résultat pour démontrer le théorème de Miquel. On se donne pour cela quatre cercles $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$. On suppose que :



- $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en deux points A et A' d'affixes respectives a et a'.
- $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ se coupent en B et B' d'affixes respectives b et b'.
- $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ se coupent en C et C' d'affixes respectives c et c'.
- $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_1$ se coupent en D et D' d'affixes respectives d et d'.

On suppose enfin que ces 8 points sont distincts.
On admet (cela découle d'un calcul immédiat) le théorème des six birapports :

$$[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \times [c'\,;\,a'\,;\,d'\,;\,b'] \times [a'\,;\,b\,;\,a\,;\,b'] \times [b\,;\,c'\,;\,c\,;\,b'] \times [c\,;\,d'\,;\,c'\,;\,d] \times [d'\,;\,a\,;\,a'\,;\,d] \;=\; 1$$

Démontrer le théorème de Miquel :

$$(A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ alignés ou cocycliques}) \iff (A',\ B',\ C' \text{ et } D' \text{ alignés ou cocycliques})$$