DS4

⚠ On traitera OBLIGATOIREMENT les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' - \frac{1}{x}\,y \;=\; \frac{x}{1+x^2} \qquad (E_1)$$

2. $(*)$ Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + y' + 2y \;=\; \mathrm{e}^x \qquad (E_2)$$

3. On note E l'ensemble des fonctions bornées.
Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{\,|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$.
Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = \sup(A_f)$.

a) Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?
b) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

5. $(*)$ En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).

6. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ \ln(u_n)$.

a) Prouver : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

b) En déduire que pour tous entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

c) En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

7. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = \mathrm{e}^{2^n L}$. Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$.

8. On pose alors pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.

a) Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.
b) Prouver que la suite (s_n) est bornée.
c) Montrer qu'il existe un réel b tel que : $u_n = t_n + b + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Problème 1

On convient que, pour tout réel x, on a : $x^0 = 1$.

9. $(*)$ Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

10. $(*)$ Calculer I_0 et I_1.

11. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2\,I_{n+1} + I_n$.

b) En déduire I_2.

c) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np

def valeur_In(n) :
    a = 1/2
    b = np.log(2) - 1/2
    for k in range(2,n+1) :
        aux = a
        a = ------
        b = ------
    return b
```

12. ***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

13. $(*)$ Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\,J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

14. ***a)*** Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n.

b) En déduire la valeur de J_1.

15. En utilisant les questions ***13*** et ***14***, compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette le calcul de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
def valeur_In_2(n) :
    J = np.log(2)
    for k in range(1,n) :
        J = ------
    I = ------
    return I
```

16. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

17. ***a)*** Utiliser les questions ***12b*** et ***13*** pour déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

b) En déduire la nature de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ ainsi que la valeur de sa limite.

c) Utiliser la question ***13*** pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha\, n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

18. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{2k}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

19. On se propose de montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k$.

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \;=\; (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

c) Démontrer alors : $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

Problème II

L'objet de ce problème est d'étudier les éventuelles solutions de l'équation :

$$\ln(x) = ax \tag{a}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $x > 0$ est l'inconnue.

Partie I. Étude de l'équation (E_a)

20. On se fixe, dans cette question, un réel a quelconque.

a) Montrer que si $a \in \,]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in \,]0, 1]$.

b) Montrer que si $a \in \,]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\,[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions α et β vérifiant $\alpha \in \,]1, e[$ et $\beta \in \,]e, +\infty[$.

c) Montrer que si $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.

d) Montrer que si $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.

21. Illuster sur quatre graphiques différents les cas où $a \in \,]-\infty, 0], a \in \,]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$, $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$ (on représentera la fonction logarithme ainsi que la droite d'équation $y = ax$).

Partie II. Étude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (R)$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

22. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solutions de (R).

23. Soit φ une solution de (R). Démontrer :

$$\varphi(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = 0$$

24. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.

a) Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) > 0$.

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(nx) = (\varphi(x))^n$$

c) Montrer :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m$$

d) Déduire des questions précédentes :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}.$$

e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers x ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant la fonction partie entière).

f) Conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = (\varphi(1))^x$$

Partie III. Étude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X (X+n)^{n-1}$$

25. ***a)*** Expliciter les polynômes P_1 et P_2.

b) Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

26. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = P_{n-1}(x+1).$$

27. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)$$

(on pourra procéder par récurrence sur $\mathbb{N}$).