DS4

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' - \frac{1}{x}\, y \;=\; \frac{x}{1+x^2} \qquad (E_1)$$

Démonstration.

- On commence par résoudre son équation homogène (H_1) associée à (E_1).
  - × L'équation (H_1) est une équation différentielle homogène d'ordre 1.
  - × Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto -\ln\big(|x|\big)$.

L'ensemble des solutions de (H_1) est donc :

$$\boxed{\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\ln\left(|x|\right)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \;=\; \{x \mapsto \lambda\, x \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \textit{(car on résout } (H_1) \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)}}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1).
  On applique la méthode de variation de la constante.
  Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors $h : x \mapsto \lambda(x)\, x$.
  - × La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
  - × De plus :

$$\begin{aligned}
h \text{ solution de } (E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x) - \frac{1}{x}\, h(x) = \frac{x}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x) \times x + \lambda(x) \times 1 - \frac{1}{\cancel{x}}\, \lambda(x)\, \cancel{x} = \frac{x}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\, \lambda'(x) + \cancel{\lambda(x)} - \cancel{\lambda(x)} = \frac{x}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \cancel{x}\, \lambda'(x) = \frac{\cancel{x}}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x) = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

  On en déduit que la fonction λ cherchée peut être choisie parmi les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
  La fonction $\lambda : x \mapsto \arctan(x)$ convient.

$$\boxed{\text{Ainsi la fonction } h : x \mapsto x \arctan(x) \text{ est une solution particulière de } (E_1).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc :} \\ \{x \mapsto x \arctan(x) + \lambda\, x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}\end{array}}$$

□

2. $(*)$ Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + y' + 2y \ = \ \mathrm{e}^x \qquad (E_2)$$

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène (H_2) associée à (E_2).
  - × C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
  - × On cherche donc les racines du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 2$.
    On note Δ le discriminant de ce polynôme.

    $$\Delta \ = \ 1^2 - 4 \times 1 \times 2 \ = \ -7 \ < \ 0$$

    Les racines de Q sont donc :

    $$r_1 \ = \ \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 \ = \ \overline{r_1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions de } (H_2) \text{ est donc :}\\ \left\{x \mapsto \lambda_1 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, t} \cos\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, t\right) + \lambda_2 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, t} \sin\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, t\right) \ \mid \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}\end{array}}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_2). On note :

$$h \ : \ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^x\end{array}$$

  La fonction h est une solution particulière de (E_2). En effet :
  - × la fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
  - × pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h''(x) + h'(x) + 2\,h(x) \ = \ \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^x + 2 \times \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^x \ = \ \mathrm{e}^x$$

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^x \text{ est solution de } (E_2).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est donc :}\\ \left\{x \mapsto \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^x + \lambda_1 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, t} \cos\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, t\right) + \lambda_2 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, t} \sin\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, t\right) \ \mid \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}\end{array}}$$

Commentaire

- Il existe beaucoup de solutions particulières de (E_2) (une infinité non dénombrable plus précisément). Il suffit simplement d'en exhiber une. La recherche d'une solution particulère h peut donc s'effectuer au brouilon. On rédigera sur la copie seulement la démonstration que la fonction h est bien solution de (E_2).

Commentaire

- Détaillons l'obtention de la fonction h.
  Comme le second membre de (E_2) est $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et que 1 n'est pas racine du polynôme Q, on cherche une solution de (E_2) sous la forme $x \mapsto a\,\mathrm{e}^x$.
  Soit $a \in \mathbb{R}$. On note alors $h : x \mapsto a\,\mathrm{e}^x$.
  × La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$h'(x) \;=\; a\,\mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad h''(x) \;=\; a\,\mathrm{e}^x$$
  × On obtient :
  $$\begin{array}{rcl} h \text{ solution de } (E_2) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) + h'(x) + 2\,h(x) = \mathrm{e}^x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ a\,\mathrm{e}^x + a\,\mathrm{e}^x + 2\,a\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ 4a\,\cancel{\mathrm{e}^x} = \cancel{\mathrm{e}^x} \qquad \textit{(car : } \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 4a = 1 \\ & \Leftrightarrow & a = \dfrac{1}{4} \end{array}$$
  Ainsi la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^x$ est solution de (E_2). □

3. On note E l'ensemble des fonctions bornées.
Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{\, |f(x)| \mid x \in [0,1] \}$.
Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| = \sup(A_f)$.

a) Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

Démonstration.
L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E car elle vérifie les propriétés suivantes :

1) **Séparation** :
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}$$

2) **Homogénéité** :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in E, \quad \|\lambda \cdot f\|_\infty \;=\; |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

3) **Inégalité triangulaire** :
$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \|f+g\|_\infty \;\leqslant\; \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

b) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

Démonstration.

- Tout d'abord, remarquons que, pour tout $f \in E$, la quantité $\|f\|_\infty$ est bien définie.
  En effet, comme f est bornée, alors $|f|$ est majorée. Ainsi l'ensemble $A_f = \{\, |f(x)| \mid x \in [0,1]\}$ est non vide et majoré. On en déduit que $\sup(A_f)$ existe.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.
  On commence par remarquer que $\lambda \cdot f \in E$. Ainsi $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est bien définie.
  Deux cas se présentent.
  × Si $\lambda = 0$, alors :
    × d'une part : $\|0 \cdot f\|_\infty = \|0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}\| = 0$ (d'après ***1.***)
    × d'autre part : $|0| \times \|f\|_\infty = 0$.

    L'égalité souhaitée est donc vraie pour $\lambda = 0$.
  × Si $\lambda \neq 0$. Soit $x \in [0,1]$. On remarque tout d'abord :

$$\left|\lambda \times f(x)\right| \;=\; |\lambda| \times \left|f(x)\right| \qquad (*)$$

On procède ensuite par double inégalité.

($\leqslant$) Le réel $\|f\|_\infty$ est un majorant de A_f. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\left|f(x)\right| \;\leqslant\; \|f\|_\infty$$

Comme $|\lambda| \geqslant 0$, on en déduit :

$$\begin{array}{ccc} |\lambda| \times \left|f(x)\right| & \leqslant & |\lambda| \times \|f\|_\infty \\ \shortparallel & & \\ \left|\lambda \times f(x)\right| & & \end{array}$$

D'où :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|(\lambda \cdot f)(x)\right| \;\leqslant\; |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

Ainsi, $|\lambda|\ \|f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$.
Or $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de $A_{\lambda \cdot f}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \|\lambda \cdot f\|_\infty \;\leqslant\; |\lambda|\,\|f\|_\infty}$$

($\geqslant$) Le réel $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \left|(\lambda \cdot f)(x)\right| & \leqslant & \|\lambda \cdot f\|_\infty \\ & & \shortparallel & & \\ |\lambda| \times \left|f(x)\right| & = & \left|\lambda \times f(x)\right| & & \end{array}$$

Comme $|\lambda| > 0$, on en déduit :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|f(x)\right| \;\leqslant\; \frac{1}{|\lambda|}\ \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

Ainsi, $\dfrac{1}{|\lambda|}\ \|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de A_f.
Or $\|f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de A_f. On en conclut :

$$\|f\|_\infty \;\leqslant\; \frac{1}{|\lambda|}\ \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

$$\boxed{\text{Comme } |\lambda| > 0, \text{ on obtient : } |\lambda| \times \|f\|_\infty \leqslant \|\lambda \cdot f\|_\infty.}$$

$$\boxed{\text{L'application } \|\cdot\|_\infty \text{ est homogène.}}$$

□

4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ de :

- $f_1 : x \mapsto x^2 + 2$ qui est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$, en tant que fonction polynomiale,
  - × telle que : $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$,
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

□

Exercice 2 (E3A PSI 2019)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

5. $(*)$ En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Par définition de u_{n+1} :

  $$u_{n+1} - u_n \ = \ (\cancel{u_n} + u_n^2) - \cancel{u_n} \ = \ u_n^2 \ \geqslant \ 0$$

  $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

- Démontrons que la suite (u_n) n'est pas majorée.
  On procède par l'absurde.
  Supposons que la suite (u_n) est majorée.
  - × La suite (u_n) est alors :
    - croissante d'après ce qui précède,
    - majorée.

    Elle converge donc vers une limite ℓ.
  - × De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

    $$\begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & u_n & + & u_n^2 \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} \\ \ell & = & \ell & + & \ell^2 \end{array}$$

    On en déduit : $\ell^2 = 0$. D'où, par injectivité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$: $\ell = 0$.
  - × Or, comme la suite (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

    $$u_n \ \geqslant \ u_0 \ = \ a$$

    Ainsi, par compatibilité de la limite avec l'ordre : $\ell \geqslant a$.
    On en déduit, par transitivité : $\ell \geqslant a > 0$.

  Absurde !

  $$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée.}}$$

- La suite (u_n) est donc :
  - × croissante,
  - × non majorée.

  $$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Commentaire

- La formulation de l'énoncé est un peu malheureuse. En effet, écrire « étudier la convergence de la suite (u_n) » pourrait laisser penser que la suite (u_n) est convergente. Il aurait sans doute été préférable de privilégier une formulation du type « étudier la nature de la suite (u_n) » pour éviter toute ambiguïté.
- Lorsqu'une suite (u_n) est croissante, elle est soit :
  × majorée et dans ce cas elle converge.
  × non majorée et dans ce cas elle diverge.
- Ainsi, dans un énoncé, lorsqu'on demande de démontrer qu'une suite croissante diverge vers $+\infty$, il s'agit en réalité de démontrer que cette suite est non majorée.
- Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
  × montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée.
  × montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable. □

6. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ \ln(u_n)$.

a) Prouver : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

Démonstration.

- On commence par démontrer que la suite (v_n) est bien définie.
  × Comme la suite (u_n) est croissante, alors :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \ \geqslant\ u_0 \ >\ 0$$
  × Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n > 0$, alors $\ln(u_n)$ est bien défini. Ainsi, v_n est bien défini.
  $$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est bien définie.}}$$
- Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
  × Par définition de v_{n+p+1} et v_{n+p} :
  $$\begin{aligned}
  v_{n+p+1} - v_{n+p} &= \frac{1}{2^{n+p+1}}\ \ln(u_{n+p+1}) - \frac{1}{2^{n+p}}\ \ln(u_{n+p}) \\
  &= \frac{1}{2^{n+p+1}}\ \ln(u_{n+p} + u_{n+p}^2) - \frac{1}{2^{n+p}}\ \ln(u_{n+p}) \quad \textit{(par définition de } u_{n+p+1}\textit{)} \\
  &= \frac{\ln(u_{n+p} + u_{n+p}^2) - 2\ \ln(u_{n+p})}{2^{n+p+1}} \\
  &= \frac{\ln(u_{n+p} + u_{n+p}^2) - \ln(u_{n+p}^2)}{2^{n+p+1}} \\
  &= \frac{\ln\left(\dfrac{u_{n+p} + u_{n+p}^2}{u_{n+p}^2}\right)}{2^{n+p+1}} \\
  &= \frac{\ln\left(\dfrac{1}{u_{n+p}} + 1\right)}{2^{n+p+1}}
  \end{aligned}$$

× Ainsi :

$$\begin{aligned}
& 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < \frac{1}{2^{n+p+1}} \ \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & 1 < 1 + \frac{1}{u_{n+p}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n} \qquad \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < \frac{1}{u_{n+p}} \leqslant \frac{1}{u_n} \qquad (*)
\end{aligned}$$

× Or :

- d'une part, comme $u_{n+p} > 0$, alors : $\dfrac{1}{u_{n+p}} > 0$.
- d'autre part, comme (u_n) est croissante et $n + p \geqslant p$, alors : $u_{n+p} \geqslant u_n$.

  Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{u_{n+p}} \leqslant \dfrac{1}{u_n}$.

Ainsi, la proposition $(*)$ est vraie.
Par raisonnement par équivalence, la 1ère proposition également.

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)}$$

□

b) En déduire que pour tous entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Démonstration.
Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.

- D'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$0 \ < \ v_{n+p+1} - v_{n+p} \ \leqslant \ \frac{1}{2^{n+p+1}} \ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

- En sommant les encadrements précédents pour p variant entre 0 et k, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc}
\sum\limits_{p=0}^{k} 0 & < & \sum\limits_{p=0}^{k} (v_{n+p+1} - v_{n+p}) & \leqslant & \sum\limits_{p=0}^{k} \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \\
0 & & v_{n+k+1} - v_n & & \textit{(par télescopage)}
\end{array}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) &= \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \ \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^p} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \ \sum_{p=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^p \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \ \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}} \qquad \textit{(car : } \frac{1}{2} \neq 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2^{n+\cancel{1}}} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \times \cancel{2} \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n}} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

Or, comme $\frac{1}{2^{k+1}} \geqslant 0$, alors : $1-\frac{1}{2^k} \leqslant 1$. D'où, comme $\frac{1}{2^n} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \geqslant 0$:

$$\frac{1}{2^{n}} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right) \ \leqslant \ \frac{1}{2^{n}} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

- Ainsi, par transitivité :

$$0 \ < \ v_{n+k+1} - v_n \ \leqslant \ \frac{1}{2^{n}} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right) \ \leqslant \ \frac{1}{2^{n}} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

$$\boxed{\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ 0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)}$$

□

c) En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, appliquée à $k = 0$, on obtient :

$$v_{n+1} - v_n \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On utilise le résultat de la question précédente avec $k = p - 1$ et $n = 0$. On obtient :

$$0 \ < \ v_p - v_0 \ \leqslant \ \frac{1}{2^0} \ \ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)$$

Ainsi :

$$v_p \ \leqslant \ \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n) \text{ est majorée par } \ln\left(1+\frac{1}{a}\right).}$$

- La suite (v_n) est donc :
  - × croissante,
  - × majorée par $\ln\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge donc vers une limite } L \text{ vérifiant : } L \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{a}\right).}$$

□

7. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = \mathrm{e}^{2^n L}$. Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$.

Démonstration.

- Démontrer « $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$ » revient à démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{t_n} = 1$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de v_n :

$$\frac{u_n}{t_n} = \frac{\mathrm{e}^{2^n v_n}}{\mathrm{e}^{2^n L}} = \mathrm{e}^{2^n v_n - 2^n L} = \mathrm{e}^{2^n (v_n - L)}$$

On cherche donc à démontrer que la suite $\left(\mathrm{e}^{2^n (v_n-L)}\right)$ converge vers 1.

- D'après la question ***6b***, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$:

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En passant à la limite quand k tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\begin{array}{rcccccl}
 & 0 & \leqslant & L - v_n & \leqslant & \dfrac{1}{2^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) & \\
\text{donc} & 0 & \geqslant & v_n - L & \geqslant & -\dfrac{1}{2^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) & \\
\text{d'où} & 0 & \geqslant & 2^n (v_n - L) & \geqslant & -\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) & \\
\text{ainsi} & 1 & \geqslant & \mathrm{e}^{2^n (v_n-L)} & \geqslant & \mathrm{e}^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)} & \textit{(par croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R})
\end{array}$$

De plus :

$$\mathrm{e}^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)}} = \frac{1}{1+\frac{1}{u_n}}$$

Finalement :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{u_n}} \leqslant \underbrace{\mathrm{e}^{2^n (v_n-L)}}_{= \frac{u_n}{t_n}} \leqslant 1$$

- On sait donc :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{u_n}} \leqslant \dfrac{u_n}{t_n} \leqslant 1$
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{u_n}} = 1$, car, d'après la question ***5*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

  Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{t_n} = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n.}$$

Commentaire

On prendra garde à ne pas écrire les erreurs suivantes.

- Tout d'abord, on a démontré : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$. Cependant, en toute généralité, on ne peut conclure :

$$2^n\, v_n \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} 2^n\, L$$

  Plus précisément :
  × si $L \neq 0$, alors, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$, on obtient :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} L \qquad \text{donc} \qquad 2^n\, v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n\, L$$

  × si $L = 0$, alors, comme $(2^n\, v_n)$ n'est pas la suite nulle, l'assertion suivante est fausse :

$$2^n\, v_n \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} 2^n \times 0 \ = \ 0$$

- On rappelle ensuite qu'on ne peut, en toute généralité composer des équivalents. En particulier :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \cancel{\Rightarrow} \mathrm{e}^{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{b_n}$$

  Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = n+1 \text{ et } b_n = n$$

  On constate alors en effet :
  × d'une part : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$,
  × d'autre part : $\mathrm{e}^{a_n} \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} \mathrm{e}^{b_n}$. En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \mathrm{e} \neq 1$.

□

8. On pose alors pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.

a) Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} s_{n+1} & = & t_{n+1} - u_{n+1} & \\ & = & \mathrm{e}^{2^{n+1} L} - \left(u_n + u_n^2\right) & \textit{(par définition de } t_n \textit{ et } u_n\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{2 \times 2^n L} - u_n - u_n^2 & \\ & = & \left(\mathrm{e}^{2^n L}\right)^2 - u_n - u_n^2 & \\ & = & (t_n)^2 - u_n - u_n^2 & \textit{(par définition de } t_n\textit{)} \\ & = & (s_n + u_n)^2 - u_n - u_n^2 & \textit{(par définition de } s_n\textit{)} \\ & = & s_n^2 + 2\, s_n\, u_n + \cancel{u_n^2} - u_n - \cancel{u_n^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = s_n^2 + (2\, s_n - 1)\, u_n.}$$

□

b) Prouver que la suite (s_n) est bornée.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque :

$$s_n \;=\; t_n - u_n \;=\; u_n \left(\frac{t_n}{u_n} - 1\right)$$

Or, d'après la question **7** :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{u_n}} \;\leqslant\; \frac{u_n}{t_n} \;\leqslant\; 1$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\begin{array}{rcccccl} & 1 + \dfrac{1}{u_n} & \geqslant & \dfrac{t_n}{u_n} & \geqslant & 1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{u_n} & \geqslant & \dfrac{t_n}{u_n} - 1 & \geqslant & 0 & \\ \text{d'où} & 1 & \geqslant & u_n \left(\dfrac{t_n}{u_n} - 1\right) & \geqslant & 0 & \textit{(car, d'après } \textbf{6a} \textit{ : } u_n \geqslant 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & 1 & \geqslant & s_n & \geqslant & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (s_n) \text{ est bornée.}}$$

□

c) Montrer qu'il existe un réel b tel que : $u_n = t_n + b + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Démonstration.

- Tout d'abord remarquons, pour tout $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_n = t_n + b + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \ &\Leftrightarrow\ u_n - t_n - b = \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &\Leftrightarrow\ -s_n - b = \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &\Leftrightarrow\ \lim_{n\to+\infty} -s_n - b = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \lim_{n\to+\infty} s_n = -b \end{aligned}$$

  Démontrer l'assertion « $u_n = t_n + b + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ » revient donc à démontrer que la suite (s_n) est convergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$0 \ \leqslant\ s_n \ \leqslant\ 1$$

  Ainsi, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$: $0 \leqslant s_n^2 \leqslant 1$. Donc :

$$-1 \ \leqslant\ -s_n^2 \ \leqslant\ 0$$

  De plus : $0 \leqslant s_{n+1} \leqslant 1$. On en déduit :

$$-1 \ \leqslant\ s_{n+1} - s_n^2 \ \leqslant\ 1$$

  Ainsi, d'après la question ***8a*** :

$$-1 \ \leqslant\ (2\, s_n - 1)\, u_n \ \leqslant\ 1$$

  Par ailleurs : $u_n > 0$. On obtient alors :

$$-\frac{1}{u_n} \ \leqslant\ 2\, s_n - 1 \ \leqslant\ \frac{1}{u_n}$$

- On obtient :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{u_n} \ \leqslant\ 2\, s_n - 1 \ \leqslant\ \dfrac{1}{u_n}$
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$, car d'après la question ***5*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{u_n} = 0$.

  Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\, s_n - 1 = 0$. On en déduit : $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

D'après les équivalences énoncées au début de cette question, on en déduit :
$$\boxed{u_n = t_n - \frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1).}$$

□

Problème 1 (EDHEC 2020)

On convient que, pour tout réel x, on a : $x^0 = 1$.

9. $(*)$ Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ est continue sur le **segment** $[0,1]$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto x^n$ qui est continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $f_2 : x \mapsto (1+x)^2$ qui
    - est continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $[0,1]$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } I_n \text{ est bien définie.}}$$

- De même, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ est continue sur le **segment** $[0,1]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } J_n \text{ est bien définie.}}$$

□

10. $(*)$ Calculer I_0 et I_1.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,dx = \left[\frac{1}{-2+1}\,(1+x)^{-2+1}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+0}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- Ensuite :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{(1+x)^2}\,dx$$

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[x \times \left(-\frac{1}{1+x}\right) \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\frac{1}{1+x}\right)\, dx \\
&= -\frac{1}{1+1} + 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2} + \left[\ \ln\left(|1+x|\right)\ \right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} + \ln(2) - \cancel{\ln(1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

□

11. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}\, dx + 2 \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \frac{2\, x^{n+1}}{(1+x)^2} + \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \frac{x^n\ \left(x^2 + 2\, x + 1\right)}{(1+x)^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n\ \cancel{(1+x)^2}}{\cancel{(1+x)^2}}\, dx \\
&= \int_0^1 x^n\, dx \\
&= \left[\frac{1}{n+1}\ x^{n+1} \right]_0^1 \ = \ \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}}$$

□

b) En déduire I_2.

Démonstration.
D'après la question précédente : $I_2 + 2\, I_1 + I_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
I_2 &= 1 - 2\, I_1 - I_0 \\
&= 1 - 2\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \qquad \textit{(d'après } \textbf{10}\textit{)} \\
&= \frac{3}{2} - 2\, \ln(2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{3}{2} - 2\, \ln(2)}$$

□

c) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1  import numpy as np
2
3  def valeur_In(n) :
4      a = 1/2
5      b = np.log(2) - 1/2
6      for k in range(2,n+1) :
7          aux = a
8          a = ------
9          b = ------
10     return b
```

Démonstration.
Détaillons les différents éléments présents dans ce script.

- **Début du programme**
  - × En ligne 1, on importe la bibliothèque `numpy`.
  - × On démarre ensuite le code d'une fonction qui :
    - se nomme `valeur_In`,
    - admet pour paramètre d'entrée un entier `n`,
    - renvoie la valeur contenue dans la variable `b`.

```
3  def valeur_In(n) :
```

```
10     return b
```

  - × En ligne 4 et 5, on définit les variables `a` et `b`.
    Initialement, ces deux variables sont affectées aux valeurs de I_0 et I_1.

```
4      a = 1/2
5      b = np.log(2) - 1/2
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 6 à 9 consistent à mettre à jour les variables `a` et `b` de sorte à ce qu'elles contiennent les valeurs successives de la suite (I_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
6      for k in range(2,n+1) :
7          aux = a
8          a = b
9          b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a + aux
```

Pour ce faire, on a introduit une variable auxiliaire `aux`. Détaillons le principe de cette boucle :

× avant le 1er tour de boucle :

$$\texttt{a} \text{ contient } I_0 \qquad \text{et} \qquad \texttt{b} \text{ contient } I_1$$

lors du 1er tour de boucle (`k` contient 2) :

`aux = a`	(`aux` contient alors I_0, dernière valeur en date de `a`)
`a = b`	(`a` contient alors I_1, dernière valeur en date de `b`)
`b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a + aux`	(`b` contient alors $\dfrac{1}{0+1} - 2\ I_1 - I_0 = I_2$, valeur obtenue avec la relation de ***11a*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

× avant le 2ème tour de boucle, d'après ce qui précède :

$$\texttt{a} \text{ contient } I_1 \qquad \text{et} \qquad \texttt{b} \text{ contient } I_2$$

lors du 2ème tour de boucle (`k` contient 3) :

`aux = a`	(`aux` contient alors I_1, dernière valeur en date de `a`)
`a = b`	(`a` contient alors I_2, dernière valeur en date de `b`)
`b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a + aux`	(`b` contient alors $\dfrac{1}{1+1} - 2\ I_2 - I_1 = I_3$, valeur obtenue avec la relation de ***11a*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

× ...

× avant le $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle :

$$\texttt{a} \text{ contient } I_{n-2} \qquad \text{et} \qquad \texttt{b} \text{ contient } I_{n-1}$$

lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` contient n) :

`aux = a`	(`aux` contient alors I_{n-2}, dernière valeur en date de `a`)
`a = b`	(`a` contient alors I_{n-1}, dernière valeur en date de `b`)
`b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a + aux`	(`b` contient alors $\dfrac{1}{n+1} - 2\ I_{n-1} - I_{n-2} = I_n$, valeur obtenue avec la relation de ***11a*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `b` contient la quantité I_n. Il n'y a plus qu'à renvoyer la valeur contenue dans `b`.

```
    return b
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Python** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On a démontré dans cette question que si, avant le $k^{\text{ème}}$ tour de boucle :

  `aux` contient I_{k-2},   `a` contient I_{k-1} et   `b` contient I_k

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  `aux` contient I_{k-1},   `a` contient I_k et   `b` contient I_{k+1}

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `b` contient I_n.
- Il est à noter que si on teste la fonction avec une valeur de `n` strictement inférieure à 2, alors on n'entre pas dans la boucle (l'instruction `2:n` crée une matrice ligne vide). Dans ce cas, la variable `b` n'est pas mise à jour et contient à la fin du programme I_1, soit la valeur initialement affectée à `b`. Ainsi, la fonction renvoie la bonne valeur aussi lorsque la variable `n` prend la valeur 1 (mais pas quand `n` prend la valeur 0).
- Pour le calcul informatique du $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite (z_n) récurrente d'ordre 1 (dont chaque terme dépend uniquement du précédent), il suffit d'introduire une variable `u` et de mettre à jour son contenu à l'aide d'une boucle. La suite (I_n) de l'énoncé est récurrente d'ordre 2 (chaque terme dépend des deux précédents). Obtenir son $n^{\text{ème}}$ terme nécessite non pas deux mais bien trois variables distinctes (la mise à jour de `a` écrase la valeur précédente de `a` qui est pourtant nécessaire pour définir la nouvelle valeur de `b`. On fait donc appel à une variable auxiliaire `aux` qui permet de stocker en mémoire de l'information.

$\square$

12.* *a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{array}{lccccccl}
 & 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 & \\
\text{donc} & 1 & \leqslant & 1+x & \leqslant & 2 & \\
\text{d'où} & 1 & \leqslant & (1+x)^2 & \leqslant & 4 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & 1 & \geqslant & \dfrac{1}{(1+x)^2} & \geqslant & \dfrac{1}{4} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{alors} & x^n & \geqslant & \dfrac{x^n}{(1+x)^2} & \geqslant & \dfrac{x^n}{4} & \textit{(car } x^n \geqslant 0\textit{)} \\
\text{enfin} & x^n & \geqslant & \dfrac{x^n}{(1+x)^2} & \geqslant & 0 & \textit{(car } \dfrac{x^n}{4} \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^1 x^n \, dx & \geqslant & I_n & \geqslant & \displaystyle\int_0^1 0 \, dx \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{n+1} & & & & 0 \end{array} \qquad \textit{(d'après le calcul de } \textbf{11a}\textit{)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :

$$\forall t \in [a, b], \ m \leqslant f(t) \leqslant M$$

  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dt \ \leqslant \ \int_a^b f(t) \, dt \ \leqslant \ \int_a^b M \, dt = M(b-a)$$

- L'idée à retenir est que pour encadrer une intégrale, on commence systématiquement par encadrer l'intégrande.

□

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \ \leqslant \ I_n \ \leqslant \ \frac{1}{n+1}$$

Or :

× d'une part : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
× d'autre part : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

□

13. $(*)$ Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n\, J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^n & \quad & u'(x) & = & n\, x^{n-1} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \\ &= \left[x^n \times \left(-\frac{1}{1+x}\right) \right]_0^1 - \int_0^1 n\, x^{n-1} \times \left(-\frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= -\frac{1}{1+1} + 0 + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx \\ &= -\frac{1}{2} + n\, J_{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}}$$

□

14. ***a)*** Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$J_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \left[\ln\left(|1+x|\right) \right]_0^1 = \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$$

$$\boxed{J_0 = \ln(2)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n\, \frac{\cancel{1+x}}{\cancel{1+x}}\, dx \\ &= \int_0^1 x^n\, dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Avec le même calcul qu'en } \mathbf{\textit{11a}}\text{, on obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}.}$$

□

b) En déduire la valeur de J_1.

Démonstration.
D'après la question précédente : $J_0 + J_1 = \dfrac{1}{0+1} = 1.$

$$\boxed{\text{Ainsi : } J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2).}$$

□

15. En utilisant les questions ***13*** et ***14***, compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette le calcul de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 def valeur_In_2(n) :
2     J = np.log(2)
3     for k in range(1,n) :
4         J = ------
5     I = ------
6     return I
```

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
  - × On commence le code d'une fonction qui :
    - × se nomme `valeur_In_2`,
    - × prend en paramètre un entier `n`,
    - × renvoie la valeur contenue dans la variable `I`.

```
1 def valeur_In_2(n) :
```

```
6     return I
```

  - × En ligne 2, on définit la variable `J`.
    Cette variable est initialisée à J_0.

```
2     J = np.log(2)
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à mettre à jour la variable `J` de sorte à ce qu'elle contienne les valeurs successives de la suite (J_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle `for`).

```
3     for k in range(1,n) :
4         J = 1/k - J
```

  On a ici utilisé la relation obtenue en question ***14*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - J_n$.

  Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n \ = \ \dfrac{1}{n} - J_{n-1}$.

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `J` contient la valeur J_{n-1} (puisque la variable `k` varie de 1 à `n` $- 1$). On obtient alors la valeur de I_n en utilisant la relation démontrée en question ***13***.

```
5     I = n * J - 1/2
```

  On finit en renvoyant la valeur de `I`.

```
6     return I
```

□

16. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\ :\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

- **Initialisation**
  - × d'une part, d'après ***14b*** : $J_1 = 1 - \ln(2)$.
  - × d'autre part :

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = -\left(\ln(2) - \frac{(-1)^{1-1}}{1}\right) = -\left(\ln(2) - 1\right) = 1 - \ln(2)$$

  D'où $\mathscr{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$)
  - × D'une part, d'après la question ***14a*** :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - J_n \\ &= \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \end{aligned}$$

  - × D'autre part :

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \\ = \ & (-1)^{n+1}\ \ln(2) - (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ = \ & (-1)^{n+1}\ \ln(2) - (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{n+1}\right) \\ = \ & (-1)^{n+1}\ \ln(2) - (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n+1} \\ = \ & (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + (-1)^{1+(n+1)+n}\ \frac{1}{n+1} \\ = \ & (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + (-1)^{2n+2}\ \frac{1}{n+1} \\ = \ & (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1} && \textit{(car } 2n+2 \textit{ est pair)} \end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).}$$

□

17. a) Utiliser les questions ***12b*** et ***13*** pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Démonstration.

- D'après la question ***13***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

On en déduit : $I_n + \dfrac{1}{2} = n\, J_{n-1}$. Et donc :

$$\frac{I_n}{n} + \frac{1}{2\, n} \ = \ J_{n-1}$$

- Or, d'après la question ***12b*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0.}$$

Commentaire

- On pouvait également déduire des questions ***12b*** et ***13*** un équivalent de (J_n) pour conclure quant à sa limite.
  × D'après la question ***13***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

  Or, d'après la question ***12b*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, J_{n-1} - \dfrac{1}{2} = 0$.

  D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, J_{n-1} = \dfrac{1}{2}$.

  × Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on obtient : $n\, J_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$J_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\, n}$$

  Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.
  On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0$.
- Ce n'était cependant sans doute pas la méthode attendue au regard de la question ***17c)***. □

b) En déduire la nature de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n \geqslant 1}$ ainsi que la valeur de sa limite.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \ = \ 0$$

- Par continuité de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \right| \ = \ 0$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \right| \ = \ |(-1)^n| \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \ = \ \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = 0.$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente et que sa limite vaut } \ln(2).}$$

□

c) Utiliser la question ***13*** pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha\, n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question ***13***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} \ = \ (n+1)\, J_n - \frac{1}{2}$$

Or, d'après la question ***12b*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, J_n - \dfrac{1}{2} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{n\to+\infty} (n+1)\, J_n = \frac{1}{2}.}$$

- Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on obtient : $(n+1)\, J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,(n+1)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,n}.}$$

□

18. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ***16*** :

$$J_n \ = \ (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \ = \ (-1)^n\, u_n$$

- Or, d'après la question précédente : $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n}$. On en déduit : $(-1)^n\, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n}$. D'où :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(-1)^n\,2\,n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n\times(-1)^n\,2\,n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{2n}\,2\,n} = \frac{(-1)^n}{1\times 2\,n}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\,n}.}$$

☐

b) Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2\,k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme la suite } \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente d'après } \textbf{\textit{17b}}, \\ \text{on en déduit que la suite } \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2\,k}\right)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente.}\end{array}}$$

☐

19. On se propose de montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)\,u_{k+1} - k\,u_k + (-1)^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_k = (k+1)\,u_{k+1} - k\,u_k + (-1)^k \quad &\Leftrightarrow \quad (k+1)\,u_k - (-1)^k = (k+1)\,u_{k+1} \\ &\Leftrightarrow \quad u_k - \frac{(-1)^k}{k+1} = u_{k+1} \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vérifiée. En effet, par définition de u_{k+1} :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\ &= \ln(2) - \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} + \frac{(-1)^k}{k+1}\right) \\ &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \frac{(-1)^k}{k+1} = u_k - \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi, par équivalence, la première assertion est également vérifiée.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = (k+1)\,u_{k+1} - k\,u_k + (-1)^k.}$$

☐

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \;=\; (n+1)\,u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les égalités de la question précédente pour k variant de 1 à n.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k}_{=\,S_n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (k+1)\,u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\,u_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} (k+1)\,u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\,u_k \\ = \; & \sum_{k=2}^{n+1} k\,u_k - \sum_{k=1}^{n} k\,u_k && \textit{(par décalage d'indice)} \\ = \; & \cancel{\sum_{k=2}^{n} k\,u_k} + (n+1)\,u_{n+1} - \left(1 \times u_1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n} k\,u_k}\right) && \textit{(par télescopage)} \\ = \; & (n+1)\,u_{n+1} - u_1 \end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \;&=\; \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} && \textit{(car } -1 \neq 1\textit{)} \\ &=\; \frac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_n \;=\; (n+1)\,u_{n+1} - u_1 + \frac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)\,u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right).}$$

□

c) Démontrer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

Démonstration.

- Étudions la suite (S_{2n}).
  - × Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_{2n} \;&=\; (2n+1)\,u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{2n}\right) \\ &=\; (2n+1)\,u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - 1\right) \\ &=\; (2n+1)\,u_{2n+1} - u_1 \end{aligned}$$

  - × De plus :

$$u_1 \;=\; \ln(2) - \sum_{j=1}^{1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \;=\; \ln(2) - 1$$

× Par ailleurs, d'après la question ***18a*** : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$. D'où :

$$(2n+1)\, u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{(2n+1)}\, \frac{(-1)^{2n+1}}{2\,\cancel{(2n+1)}} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - \big(\ln(2)-1\big) = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

- Étudions ensuite la suite (S_{2n+1}).

  × Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= (2n+2)\, u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}\big(1-(-1)^{2n+1}\big) \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}(1+1) \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - \ln(2) + 1 - 1 \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - \ln(2) \end{aligned}$$

  × Par ailleurs, d'après la question ***18a*** : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$. D'où :

$$(2n+2)\, u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{(2n+2)}\, \frac{(-1)^{2n+2}}{2\,\cancel{(2n+2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

- On sait donc :

  × $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} - \ln(2)$,

  × $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.

  Par propriété de recouvrement : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 1} \text{ est donc convergente de somme } \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

□

Problème II (E3A PC 2018)

L'objet de ce problème est d'étudier les éventuelles solutions de l'équation :

$$\ln(x) = ax \tag{a}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $x > 0$ est l'inconnue.

Partie I. Étude de l'équation (E_a)

20. On se fixe, dans cette question, un réel a quelconque.

a) Montrer que si $a \in \,]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in \,]0, 1]$.

Démonstration.
Supposons : $a \in \,]-\infty, 0]$.

- On note f la fonction définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) - ax \end{array}$$

  La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, car elle est la somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$f'(x) \ = \ \frac{1}{x} - a$$

  Comme $x > 0$ et $a \leqslant 0$, alors : $f'(x) > 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	
Variations de f	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  × On sait : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} a\,x = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} f(x) \ = \ -\infty$$

  × On sait : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -ax = +\infty$ (car $a < 0$). Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \ = \ +\infty$$

- La fonction f est donc :
  × continue sur $]0,+\infty[$,
  × strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f\big(]0,+\infty[\big)$ où :

$$f\big(]0,+\infty[\big) \;=\; \Big]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\Big[\;=\;]-\infty,+\infty[$$

  Or : $0 \in\,]-\infty,+\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } (E_a) \text{ admet donc une unique solution } \alpha \in\,]0,+\infty[.}$$

- On remarque :
  × $f(\alpha) = 0$, par définition de α,
  × $f(1) = -a \geqslant 0$, car : $a \leqslant 0$.

  Ainsi :

$$f(\alpha) \;\leqslant\; f(1)$$

  D'après le théorème de la bijection, la fonction $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}\big(f(\alpha)\big) & \leqslant & f^{-1}\big(f(1)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \alpha & \leqslant & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \alpha \in\,]0,1].}$$

□

b) Montrer que si $a \in\,]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions α et β vérifiant $\alpha \in\,]1, e[$ et $\beta \in\,]e,+\infty[$.

Démonstration.
Supposons : $a \in\,]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$.

- On reprend l'étude de la fonction f de la question précédente.
  Soit $x \in\,]0,+\infty[$. On rappelle : $f'(x) = \dfrac{1}{x} - a$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} > a \\ &\Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{a} \quad \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*, \textit{ car } a > 0\textit{)} \end{aligned}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$-\ln(a) - 1$	↘	$-\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord :
  $$f\left(\frac{1}{a}\right) \;=\; \ln\left(\frac{1}{a}\right) - a \times \frac{1}{a} \;=\; -\ln(a) - 1$$
  - × Ensuite, comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} ax = 0$, alors :
  $$\lim_{x \to 0} f(x) \;=\; -\infty$$
  - × Enfin, pour tout $x \in [1, +\infty[$: $f(x) = -ax\left(\dfrac{\ln(x)}{-ax} + 1\right)$. Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées. De plus : $-a < 0$. Donc :
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) \;=\; -\infty$$
- La fonction f est donc :
  - × continue sur $]\frac{1}{a}, +\infty[$,
  - × strictement décroissante sur $]\frac{1}{a}, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $]\frac{1}{a}, +\infty[$ sur $f\big(]\frac{1}{a}, +\infty[\big)$ où :
  $$f\left(\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\right) \;=\; \left]\lim_{x \to +\infty} f(x), f\left(\frac{1}{a}\right)\right[\;=\;]-\infty, -\ln(a) - 1[$$
  Or : $0 \in \,]-\infty, -\ln(a) - 1[$. En effet :
  $$\begin{aligned} 0 < -\ln(a) - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(a) < -1 \\ &\Leftrightarrow \quad a < \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{aligned}$$
  Cette dernière inégalité est vraie. Ainsi, par raisonnement par équivalence, la première aussi.

L'équation (E_a) admet donc une unique solution sur $]\frac{1}{a}, +\infty[$. On la note β.

En raisonnant de même, on démontre que l'équation (E_a) admet une unique solution sur $]0, \frac{1}{a}]$. On la note α.

- Démontrons : $\alpha \in \,]1, \mathrm{e}[$.
  - × Tout d'abord : $f(1) = \ln(1) - a \times 1 = -a < 0$.
  - × Ensuite, par définition de α : $f(\alpha) = 0$.
  - × Enfin : $f(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - a \times \mathrm{e} = 1 - a\,\mathrm{e}$. Or :
  $$\begin{array}{rccc} & a & < & \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ \text{donc} & a\,\mathrm{e} & < & 1 \\ \text{d'où} & -a\,\mathrm{e} & > & -1 \\ \text{ainsi} & 1 - a\,\mathrm{e} & > & 0 \end{array}$$

  Ainsi :
  $$f(1) \;<\; f(\alpha) \;<\; f(\mathrm{e})$$

D'après le théorème de la bijection, la fonction $g = \left(f_{|]0,\frac{1}{a}[}\right)^{-1} :]-\infty, -\ln(a) - a[\to]0, \frac{1}{a}[$ est strictement croissante sur $]-\infty, -\ln(a) - 1[$. On en déduit :

$$\begin{array}{ccccc} g\big(f(1)\big) & < & g\big(f(\alpha)\big) & < & g\big(f(\mathrm{e})\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 1 & < & \alpha & < & \mathrm{e} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } 1 < \alpha < \mathrm{e}.}$$

- Démontrons : $\beta \in]\mathrm{e}, +\infty[$.
  - × On sait : $\beta \in]\frac{1}{a}, +\infty[$.
  - × Or : $a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{a} > \mathrm{e}$.

  Ainsi, par transitivité :

$$\mathrm{e} \ < \ \frac{1}{a} \ < \ \beta$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \beta < \mathrm{e}.}$$

□

c) Montrer que si $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.

Démonstration.

- Comme $a > 0$, on peut reprendre le tableau de variations de la question précédente.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- En effet :

$$-\ln(a) - 1 \ = \ -\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - 1 \ = \ -(-1) - 1 \ = \ 0$$

- La fonction f est alors :
  - × strictement croissante sur $]0, \mathrm{e}[$,
  - × strictement décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

  Ainsi, la fonction f admet un unique maximum en e. On en déduit :

$$\forall x \neq \mathrm{e}, \quad f(x) \ < \ f(\mathrm{e})$$

  Ainsi :

$$\forall x \neq \mathrm{e}, \quad f(x) \ < \ 0$$

  En particulier : $\forall x \neq \mathrm{e}$, $f(x) \neq 0$.
- De plus : $f(\mathrm{e}) = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que l'équation } (E_a) \text{ admet pour unique solution e sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

d) Montrer que si $a > \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.

Démonstration.

- Comme $a > 0$, on peut reprendre le tableau de variations de la question ***20b***.

x	0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\ln(a) - 1$	$\searrow$	$-\infty$

- Comme en question précéndente, la fonction f est :
  - × strictement croissante sur $]0, \frac{1}{a}[$,
  - × strictement décroissante sur $]\frac{1}{a}, +\infty[$.

  Elle admet donc un (unique) maximum en $\frac{1}{a}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \ < \ f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) - 1$$

- De plus :

$$\begin{array}{lrcl} & a & > & \dfrac{1}{e} \\ \text{donc} & \ln(a) & > & \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) \quad \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{d'où} & \ln(a) & > & -1 \\ \text{ainsi} & -\ln(a) & < & 1 \\ \text{alors} & -\ln(a) - 1 & < & 0 \\ \text{puis} & f\left(\dfrac{1}{a}\right) & < & 0 \end{array}$$

  On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par transitivité :

$$f(x) \ < \ f\left(\frac{1}{a}\right) \ < \ 0$$

  En particulier : $f(x) \neq 0$.

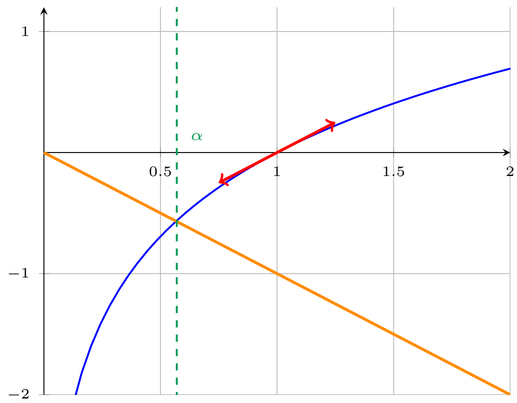
$$\boxed{\text{L'équation } (E_a) \text{ n'admet donc pas de solution.}}$$

□

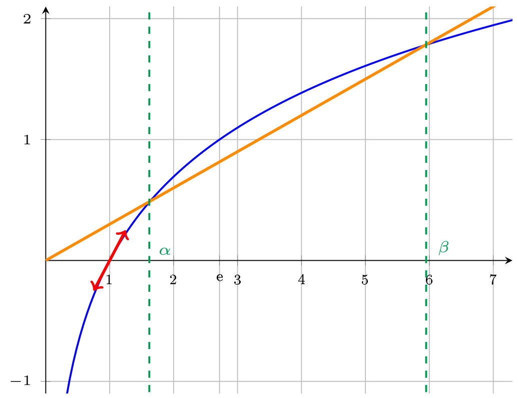
21. Illuster sur quatre graphiques différents les cas où $a \in]-\infty, 0], a \in]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$, $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$ (on représentera la fonction logarithme ainsi que la droite d'équation $y = ax$).

Démonstration.

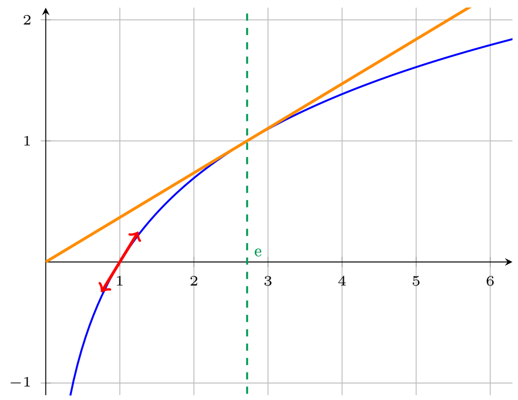
- Cas $a \in]-\infty, 0[$



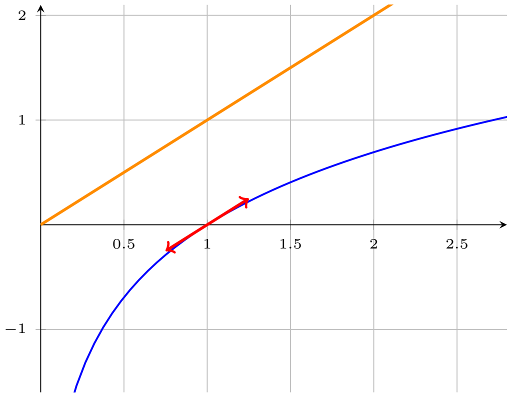
- Cas $a \in]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$



- Cas $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$



- Cas $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$



$\square$

Partie II. Étude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (R)$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

Commentaire

- Une équation fonctionnelle est, comme son nom l'indique, une équation où l'inconnue est une fonction. Cette équation peut s'écrire comme une égalité entre fonctions. En effet, on note :
  × d'une part : $f : (x,y) \mapsto \varphi(x+y)$,
  × d'autre part : $g : (x,y) \mapsto \varphi(x)\,\varphi(y)$.

  Alors l'équation (R) peut s'écrire ainsi :

  $$f \ = \ g$$

  En effet, on rappelle que dire que deux fonctions sont égales, c'est dire qu'elles sont égales **en tout point**. Autrement dit :

  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \ = \ g(x,y)$$

  Ce qui est bien la propriété (R).
- Au passage, on reconnaît ici la propriété de morphisme (de groupes) de la fonction exp. On pourra donc vérifier à la fin de cette section que cette fonction fait bien partie des solutions obtenues.

22. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solutions de (R).

Démonstration.
Soit φ une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\varphi : x \mapsto c$.

$$\begin{aligned} \varphi \text{ solution de } (R) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y) \\ & \Leftrightarrow \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ c = c \times c \qquad \textit{(par définition de } \varphi\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad c = c^2 \\ & \Leftrightarrow \quad c - c^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad c\,(1-c) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (c=0) \quad \texttt{OU} \quad (1-c=0) \\ & \Leftrightarrow \quad (c=0) \quad \texttt{OU} \quad (c=1) \end{aligned}$$

> On en déduit qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ solutions de $\mathbb{R}$: la fonction nulle et la fonction constante égale à 1.

□

23. Soit φ une solution de (R). Démontrer :

$$\varphi(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = 0$$

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons : $\varphi(0) = 0$.
Comme φ est solution de (R), on obtient, en choisissant $y = 0$ dans (R), pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x+0) \ = \ \varphi(x)\,\varphi(0) \ = \ \varphi(x) \times 0 \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = 0.}$$

($\Leftarrow$) Supposons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$.
Alors, en particulier, en choisissant $x = 0$, on obtient : $\varphi(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \varphi(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = 0.}$$

□

24. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.

a) Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) > 0$.

Démonstration.

- Comme φ est solution de (R), en choisissant $x = y = 0$ dans (R) :

$$\begin{array}{llcll} & \varphi(0+0) & = & \varphi(0)\,\varphi(0) & \\ \text{donc} & \varphi(0) & = & \big(\varphi(0)\big)^2 & \\ \text{d'où} & 1 & = & \varphi(0) & \textit{(car : } \varphi(0) \neq 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\varphi(0) = 1}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × Puisque la fonction φ est solution de (R) :

$$\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$$

  Ainsi : $\varphi(x) \geqslant 0$.
  - × Toujours puisque la fonction φ est solution de (R) :

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi\big(x+(-x)\big) & = & \varphi(x)\,\varphi(-x) \\ & & \shortparallel & & \\ 1 & = & \varphi(0) & & \end{array}$$

  Ainsi : $\varphi(x)\,\varphi(-x) = 1 \neq 0$. On en déduit : $\varphi(x) \neq 0$.

  On a démontré :

$$\varphi(x) \geqslant 0 \quad \texttt{ET} \quad \varphi(x) \neq 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) > 0.}$$

□

Commentaire

- Il s'agit dans cette partie de résoudre une équation fonctionnelle. Pour cela, on procède presque toujours par analyse-synthèse. Dans les questions *23* et *24*, l'énoncé nous guide pour effectuer l'analyse. La synthèse n'est pas demandée dans ce sujet mais elle sera détaillée en remarque avant la **Partie III**.
- Rappelons la structure du raisonnement par analyse-synthèse.
  - × **analyse** : on suppose l'existence d'un objet vérifiant certains critères (φ solution de (R)). Si cet objet existe, il est alors d'une certaine forme ($\varphi : x \mapsto b^x$).
  - × **synthèse** : on vérifie que l'objet obtenu lors de la phase d'analyse répond bien aux critères initiaux (pour tout $b > 0$, les fonctions $x \mapsto b^x$ sont bien solutions de (R)). Cela permet de lever la réserve d'existence.

  Ce schéma de démonstration permet non seulement de conclure :

l'objet répond à certains critères	$\Leftrightarrow$	l'objet s'écrit sous une forme particulière

  mais aussi de démontrer que chacune des deux propositions de l'équivalence est vérifiée.
- On rappelle que ce type de schéma de démonstration est aussi utilisé lorsque l'on souhaite démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$f = g + h$$

  où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire.

Commentaire

- La partie **analyse** du raisonnement est l'occasion de déduire de nombreuses propriétés sur l'objet solution (ici la fonction φ). Pour cela, on exploite le contexte fourni par l'énoncé. Dans le cas d'une équation fonctionnelle, on peut :
  - × évaluer cette équation en certains points. Dans cette question, on évalue par exemple l'équation (R) en $(0,0)$ pour démontrer : $\varphi(0) = 0$.
  - × évaluer cette équation en une expression. Dans cette question, on évalue par exemple l'équation (R) en $\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right)$ puis en $(x, -x)$ pour démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) > 0$.
  - × passer à la limite dans cette équation,
  - × dériver cette fonction sur l'ensemble sur lequel elle est dérivable. On n'a pas privilégié une telle approche dans cette question car la fonction φ considérée est seulement continue sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé,
  - × $\cdots$

  De façon générale, on cherche à faire apparaître les quantités pertinentes pour répondre aux questions posées. Par exemple :
  - × pour montrer qu'une fonction φ est paire / impaire, on cherchera à faire apparaître $\varphi(-x)$,
  - × pour montrer qu'une fonction φ est T-périodique, on cherchera à faire apparaître $\varphi(x+T)$,
  - × pour montrer qu'une fonction φ vérifie une certaine équation différentielle, on cherchera à faire apparaître φ' (et éventuellement ses dérivées ultérieures) en dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à l'une des variables en présence.

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(nx) = (\varphi(x))^n$$

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(nx) = \big(\varphi(x)\big)^n$.
  - ▸ **Initialisation** :
    Soit $x \in \mathbb{R}$.
    - × D'une part :
    $$\varphi(0 \times x) \ = \ \varphi(0) \ = \ 1 \qquad \textit{(d'après 24a)}$$
    - × D'autre part : $\big(\varphi(x)\big)^0 \ = \ 1$.

    D'où : $\mathscr{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi\big((n+1)x\big) = \big(\varphi(x)\big)^{n+1}$)
    Soit $x \in \mathbb{R}$.
    $$\begin{array}{rcll} \varphi\big((n+1)\,x\big) & = & \varphi(nx + x) & \\ & = & \varphi(nx)\,\varphi(x) & \textit{(car } \varphi \textit{ solution de } (R)\textit{)} \\ & = & \big(\varphi(x)\big)^n\,\varphi(x) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \big(\varphi(x)\big)^{n+1} & \end{array}$$
    D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(nx) = \big(\varphi(x)\big)^n.}$$

- Soit $n \in \mathbb{Z}_-$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que : $n = -m$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(nx) & = & \varphi(-mx) & \\ & = & \varphi\big(m \times (-x)\big) & \\ & = & \big(\varphi(-x)\big)^m & \textit{(d'après le point précédent)} \end{array}$$

Or, d'après la question ***24a*** : $\varphi(x)\,\varphi(-x) = 1$. Ainsi, puisque : $\varphi(x) \neq 0$, on obtient :

$$\varphi(-x) \;=\; \frac{1}{\varphi(x)}$$

On en déduit :

$$\varphi(nx) \;=\; \big(\varphi(-x)\big)^m \;=\; \left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^m \;=\; \frac{1}{\big(\varphi(x)\big)^m} \;=\; \big(\varphi(x)\big)^{-m} \;=\; \big(\varphi(x)\big)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(nx) = \big(\varphi(x)\big)^n.}$$

□

c) Montrer :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m$$

Démonstration.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente appliquée à $n = m \in \mathbb{Z}$ et $x = \dfrac{1}{m} \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\varphi\left(m \times \frac{1}{m}\right)}_{=\,\varphi(1)} \;=\; \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(1) = \left(\varphi\left(\tfrac{1}{m}\right)\right)^m}$$

□

d) Déduire des questions précédentes :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \big(\varphi(1)\big)^{\frac{n}{m}}$$

Démonstration.
Soit $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \varphi\left(\dfrac{n}{m}\right) & = & \varphi\left(n \times \dfrac{1}{m}\right) & \\ & = & \varphi(n) \times \varphi\left(\dfrac{1}{m}\right) & \textit{(car } \varphi \textit{ solution de } (R)\textit{)} \\ & = & \varphi(n \times 1)\ \varphi\left(\dfrac{1}{m}\right) & \\ & = & \big(\varphi(1)\big)^n\ \varphi\left(\dfrac{1}{m}\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{24b}}\textit{)} \end{array}$$

De plus, d'après la question *24c* : $\varphi(1) = \left(\varphi\left(\dfrac{1}{m}\right)\right)^m$. D'où :

$$\big(\varphi(1)\big)^{\frac{1}{m}} = \left(\left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^{m\times\frac{1}{m}} = \varphi\left(\frac{1}{m}\right)$$

On en déduit :

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \big(\varphi(1)\big)^n \times \big(\varphi(1)\big)^{\frac{1}{m}} = \big(\varphi(1)\big)^{\frac{n}{m}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall (n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \big(\varphi(1)\big)^{\frac{n}{m}}.}$$

□

e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $x_n = \lfloor 10^n x\rfloor\, 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers x ($\lfloor\cdot\rfloor$ désignant la fonction partie entière).

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. par définition de la partie entière :

$$\begin{array}{rcccccl} & 10^n\,x - 1 & < & \lfloor 10^n\,x\rfloor & \leqslant & 10^n\,x & \\ \text{donc} & \dfrac{10^n\,x-1}{10^n} & < & \dfrac{\lfloor 10^n\,x\rfloor}{10^n} & \leqslant & x & \textit{(car : } 10^n>0\textit{)} \\ \text{d'où} & x - \dfrac{1}{10^n} & < & x_n & \leqslant & x & \textit{(par définition de } x_n\textit{)} \end{array}$$

- Or :
  - × d'une part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x - \frac{1}{10^n} = x$,
  - × d'autre part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x = x$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, la suite } (x_n) \text{ converge vers } x.}$$

□

f) Conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \big(\varphi(1)\big)^x$$

Démonstration.

- Comme suggéré par l'énoncé, on cherche à exploiter la question précédente. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque : $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n\,x\rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, d'après la question *24d* :

$$\varphi(x_n) = \big(\varphi(1)\big)^{x_n} = \exp\big(x_n \ln\big(\varphi(1)\big)\big) \qquad (*)$$

- De plus :
  - × d'une part, comme la fonction φ est continue en $x \in \mathbb{R}$ et comme, d'après *24e* : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$$

  - × d'autre part, toujours d'après *24e*, et puisque la fonction exp est continue en $x \ln\big(\varphi(1)\big)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\big(x_n \ln\big(\varphi(1)\big)\big) = \exp\big(x \ln\big(\varphi(1)\big)\big) = \big(\varphi(1)\big)^x$$

Ainsi, en reprenant $(*)$:

$$\begin{array}{ccc} \varphi(x_n) & = & \exp\big(x_n \ln\big(\varphi(1)\big)\big) \\ {\scriptstyle n \to +\infty}\big\downarrow & & {\scriptstyle n \to +\infty}\big\downarrow \\ \varphi(x) & = & \big(\varphi(1)\big)^x \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \big(\varphi(1)\big)^x}$$

Commentaire

- L'objectif de la question *24* est la démonstration (dans le cas : $\varphi(0) \neq 0$) de la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \big(\varphi(1)\big)^x$$

Pour ce faire, l'énoncé procède de la manière suivante :

1) démonstration de cette égalité sur $\mathbb{N}$ (et non $\mathbb{R}$). Autrement dit, on souhaite d'abord vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des entiers.
Pour cette étape, on raisonne souvent par récurrence.

2) démonstration de cette égalité sur $\mathbb{Z}$. Autrement dit, on souhaite vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des entiers de la forme $-m$ où $m \in \mathbb{N}$.
Pour cette étape, on utilise le point précédent.

3) démonstration de cette égalité pour des inverses d'entiers. Autrement dit, on souhaite vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des réels de la forme $\frac{1}{m}$ où $m \in \mathbb{N}^*$.
Pour cette étape, on utilise le point précédent, souvent en écrivant : $1 = m \times \dfrac{1}{m}$.

4) démonstration de cette égalité sur $\mathbb{Q}$. Autrement dit, on souhaite vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des réels de la forme $r = \frac{n}{m}$ où $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
Pour cette étape, on utilise les deux points précédents.

5) démonstration de cette égalité sur $\mathbb{R}$ comme souhaité.
Pour cette étape, on utilise le point précédent, souvent en utilisant une suite de rationnels (x_n) *qui converge vers le réel* x*. On peut toujours choisir la suite de rationnels* (x_n) *proposée par l'énoncé :* $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \dfrac{\lfloor 10^n\, x \rfloor}{10^n}$.

- Chaque étape consiste donc en une généralisation de la précédente. Cette démarche est classique en mathématiques.

$\square$

Commentaire

- On arrive à la fin de cette section au bout de l'analyse, dans le raisonnement par analyse-synthèse. Effectuons maintenant la synthèse (ce qui n'était pas demandé par l'énoncé).
- **Synthèse** :
  - × La fonction nulle est bien solution de (R) d'après *22*.
  - × Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On note :

$$\varphi_b : x \mapsto b^x$$

La fonction φ_b est bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée de fonctions continues sur des intervalles adéquats.
De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_b(x+y) \ = \ b^{x+y} \ = \ b^x\, b^y \ = \ \varphi_b(x)\ \varphi_b(y)$$

Ainsi, la fonction φ_b est bien solution de (R).

Commentaire

- Finalement l'ensemble des solutions continues sur $\mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle (R) est :

$$\{0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\} \ \cup \ \{x \mapsto b^x \mid b \in \mathbb{R}_+^*\}$$

On notera que la fonction exp appartient bien à cet ensemble (comme prévu) puisqu'il s'agit du cas où : $b = \mathrm{e}$.

Partie III. Étude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X+n)^{n-1}$$

25. ***a)*** Expliciter les polynômes P_1 et P_2.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$P_1(X) \ = \ \frac{1}{1!} \ X \ (X+1)^{1-1} \ = \ X \ (X+1)^0 \ = \ X$$

$$\boxed{P_1(X) = X}$$

- Ensuite :

$$P_2(X) \ = \ \frac{1}{2!} \ X \ (X+2)^{2-1} \ = \ \frac{1}{2} \ X \ (X+2)$$

$$\boxed{P_2(X) = \frac{1}{2} \ X \ (X+2)}$$

□

b) Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

- Si $n = 0$, alors : $P_0(X) = 1$. Donc : $P_0(0) = 1$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$P_n(0) \ = \ \frac{1}{n!} \times 0 \times (0+n)^{n-1} \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \ P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

□

26. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = P_{n-1}(x+1)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= \frac{1}{n!}\left(1 \times (x+n)^{n-1} + x \times (n-1)\ (x+n)^{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{n!}\ (x+n)^{n-2}\ \left((x+n) + (n-1)\,x\right) \\
&= \frac{1}{n!}\ (x+n)^{n-2}\ (nx+n) \\
&= \frac{1}{\cancel{n} \times (n-1)!}\ (x+n)^{n-2} \times \cancel{n}\ (x+1) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\ (x+1)\ (x+n)^{n-2} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\ (x+1)\ \left((x+1) + (n-1)\right)^{n-2} \\
&= P_{n-1}(x+1) \qquad \textit{(par définition de } P_{n-1}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = P_{n-1}(x+1)}$$

□

27. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)$$

(on pourra procéder par récurrence sur $\mathbb{N}$).

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, P_n(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(x)\ P_{n-k}(y)$.

- **Initialisation** :
  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  - Tout d'abord, on rappelle : $P_0(X) = 1$. Donc :
  $$P_0(x+y) \ = \ 1$$
  - Ensuite :
  $$\sum_{k=0}^{0} P_k(x)\,P_{0-k}(y) \ = \ P_0(x)\,P_0(y) \ = \ 1 \times 1 \ = \ 1$$

  D'où : $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $P_{n+1}(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} P_k(x)\, P_{n+1-k}(y)$)
  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  - On cherche à exploiter la question précédente. On souhaite donc faire apparaître le polynôme P'_{n+1}. On remarque pour cela :
  $$P_{n+1}(x+y) \;=\; P_{n+1}(x+0) + \int_0^y \, P'_{n+1}(x+t)\ dt$$

Commentaire

De façon générale, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(y) \;=\; f(0) + \int_0^y \, f'(t)\ dt$$

On applique ici ce résultat à la fonction $f : y \mapsto P_{n+1}(x+y)$.

  - Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :
  $$P'_{n+1}(x+t) \;=\; P_n(x+t+1)$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned}
  P_{n+1}(x+y) &= P_{n+1}(x) + \int_0^y \, P'_{n+1}(x+t)\ dt \\
  &= P_{n+1}(x) + \int_0^y \, P_n(x+t+1)\ dt \\
  &= P_{n+1}(x) + \int_0^y \, \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\, P_{n-k}(t+1)\ dt && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
  &= P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \, \int_0^y \, P_{n-k}(t+1)\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
  &= P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \, \int_0^y \, P'_{n-k+1}(t)\ dt && \textit{(d'après la question précédente)} \\
  &= P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \ \big[\ P_{n+1-k}(t)\ \big]_0^y \\
  &= P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \left(P_{n+1-k}(y) - P_{n+1-k}(0)\right) \\
  &= P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\, P_{n+1-k}(y) && \textit{(d'après } \textbf{25b}\textit{, car : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ n+1-k \in \mathbb{N}^*\textit{)}
  \end{aligned}$$
  - De plus :
  $$\sum_{k=0}^{n+1} P_k(x)\, P_{n+1-k}(y) \;=\; \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\, P_{n+1-k}(y) + P_{n+1}(x)\, P_0(y) \;=\; \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\, P_{n+1-k}(y) + P_{n+1}(x)$$

  Finalement : $P_{n+1}(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} P_k(x)\, P_{n+1-k}(y)$.
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)}$$ □