DS5

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

I. Exercice 1 : Cours

1. Démontrer : $\forall (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3,\quad \left.\begin{array}{c} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \big(\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}^2,\ d \mid (\lambda\, a + \mu\, b)\big)$

2. Déterminer le PGCD de 2156 et de 336 :

a) par algorithme d'Euclide,

b) par décomposition en produit de facteurs premiers.

II. Exercice 2

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression de f'.

4. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. On note désormais g la fonction définie par :

$$g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{cl} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array}\right. \end{array}$$

Démontrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

6. Dresser le tableau de variations de g et montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on déterminera.

7. Démontrer que g est dérivable en 0. Quelle est la valeur de $g'(0)$?

8. Tracer l'allure de la courbe représentative de g.

III. Problème I

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

9. ***a)*** Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

10. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.
Déterminer $E_2(A)$.

11. On note $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\}$.
Déterminer $E_1(A)$.

12. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

13. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

IV. Problème II

Dans tout le problème, on pourra utiliser le résultat suivant.
Soit $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels. Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $L \in \mathbb{R}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n \;=\; \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}\, b_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}}$$

Avec ces notations :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall (k,n)\in\mathbb{N}^2,\ a_{n,k}>0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L}$$

IV.1. Étude préliminaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+2) \quad \text{et} \quad v_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+1)$$

14. Démontrer : $\forall x \in \,]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

15. ***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+2}\right)$.

b) En déduire le sens de variations de (u_n).

16. En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $v_{n+1} - v_n$ sous une forme analogue à celle utilisée dans la question précédente pour la suite (u_n), démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

17. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire sur leur comportement asymptotique ?

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $w_n = n\,(v_{2n+1} - v_n)$. Supposons que la suite (w_n) converge vers 0.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = v_{2n+1} - v_n + \dfrac{n+1}{2\,(n+2)\,(2n+3)}$.

b) Démontrer : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$.

En déduire l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$: $w_{n+1} - w_n \geqslant \dfrac{1}{8n}$.

c) Démontrer, pour tout $n \in [\![n_0+1, +\infty[\![$: $w_n \geqslant w_{n_0} + \dfrac{1}{8} \sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \dfrac{1}{k}$.

d) Exprimer $\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \dfrac{1}{k}$ à l'aide de la fonction ln et de certains termes de la suite (u_n).

e) En déduire que la suite (w_n) diverge vers $+\infty$.

f) A-t-on : $v_{2n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

IV.2. Étude d'une suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

19. Démontrer que les suites (B_{2n}) et (B_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la suite (B_n) est convergente.

20. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{2n+1} = v_{2n+1} - v_n + \ln(2)$. En déduire la limite de la suite (B_n).

21. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |B_{2n} - \ln(2)| \leqslant B_{2n} - B_{2n+1} \quad \text{et} \quad |B_{2n+1} - \ln(2)| \leqslant B_{2n} - B_{2n+1}$$

22. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |B_n - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

IV.3. Accélération de convergence

On veut mettre en place une méthode permettant, à partir d'une suite réelle convergente, de construire une nouvelle suite réelle admettant la même limite mais convergeant vers cette limite bien plus rapidement que la suite initiale.
L'objectif de cette partie est de montrer en toute généralité comment construire la nouvelle suite puis de démontrer les propriétés d'accélération de convergence de cette construction sur l'exemple de la suite (B_n) de la partie IV.2.

Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit une nouvelle suite notée $b^{(k)}$, ou $(b_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, de la manière suivante :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n^{(0)} = b_n$,
- pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $b_n^{(k+1)} = b_n^{(k)} + b_{n+1}^{(k)}$.

On note de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_0^{(k)}}{2^{k+1}}$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$.

24. Démontrer par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(k)$ où :

$$\mathscr{P}(k) \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ b_n^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_{n+r}$$

On pourra utiliser le triangle de Pascal.

25. Démontrer que, pour tout $(r, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n \geqslant r$, on obtient :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r}$$

26. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_k$$

27. Démontrer que, si la suite (B_n) est convergente, il en est de même de la suite (C_n). De plus, dans ce cas, les deux suites ont même limite.
On pourra utiliser la propriété énoncée au début du problème.

28. Dans cette question, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

On utilise alors à nouveau, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(b_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ (définie en partie IV.3.), la suite (B_n) (définie en partie IV.2.) et la suite (C_n) (définie en partie IV.3.).
L'objectif de cette question est de montrer que la convergence de la suite (C_n) vers sa limite est bien plus rapide que celle de la suite (B_n).

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 (1-t)^k \, dt \;=\; \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{r+1}$$

b) En déduire une expression très simple de la somme apparaissant à droite de l'égalité obtenue en question précédente.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\, 2^{k+1}}$.

d) Démontrer, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $m > n$:

$$0 \;\leqslant\; C_m - C_n \;\leqslant\; \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k+1}}$$

e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \;\leqslant\; \ln(2) - C_n \;\leqslant\; \frac{1}{(n+2)\, 2^{n+1}}$$

f) Comparer les vitesses de convergence de (B_n) et (C_n) vers leur limite commune.