# DS5

## I. Exercice 1 : Cours

***1.*** Démontrer : $\forall (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3,\quad \left.\begin{array}{c} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \big(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2,\ d \mid (\lambda\, a + \mu\, b)\big)$

*Démonstration.*
Soit $(a,b,d) \in \mathbb{Z}^3$.
Supposons : $d \mid a$ `ET` $d \mid b$. Démontrons : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$, $d \mid (\lambda\, a + \mu\, b)$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$.

- Comme $d \mid a$, alors il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = k_1\, d$.
  De même, comme $d \mid b$, alors il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que : $b = k_2\, d$.
- On en déduit :
$$\lambda\, a + \mu\, b \ = \ \lambda \times k_1\, d + \mu \times k_2\, d \ = \ (\lambda\, k_1 + \mu\, k_2)\, d$$
  Or : $\lambda\, k_1 + \mu\, k_2 \in \mathbb{Z}$. On en conclut : $d \mid (\lambda\, a + \mu\, b)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3,\quad \left.\begin{array}{c} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \big(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2,\ d \mid (\lambda\, a + \mu\, b)\big).}$$

□

***2.*** Déterminer le PGCD de 2156 et de 336 :

***a)*** par algorithme d'Euclide,

*Démonstration.*

- On effectue la division euclidienne de 2156 par 336.
$$\left\{\begin{array}{l} 2156 \ = \ 336 \times 6 + 140 \\ 0 \leqslant 140 < 336 \end{array}\right.$$
- On effectue la division euclidienne de 336 par 140.
$$\left\{\begin{array}{l} 336 \ = \ 140 \times 2 + 56 \\ 0 \leqslant 56 < 140 \end{array}\right.$$
- On effectue la division euclidienne de 140 par 56.
$$\left\{\begin{array}{l} 140 \ = \ 56 \times 2 + 28 \\ 0 \leqslant 28 < 56 \end{array}\right.$$
- On effectue la division euclidienne de 56 par 28.
$$\left\{\begin{array}{l} 56 \ = \ 28 \times 2 + 0 \\ 0 \leqslant 0 < 28 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Par algorithme d'Euclide : } 2136 \wedge 336 = 28.}$$

□

***b)*** par décomposition en produit de facteurs premiers.

*Démonstration.*
On obtient les décompositions en facteurs premiers suivantes :

× $2136 = 2^2 \times 7^2 \times 11$
× $336 = 2^4 \times 3 \times 7$

$$\boxed{\text{On en déduit : } 2156 \wedge 336 = 2^2 \times 7 = 28.}$$

□

## II. Exercice 2

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

*3.* Montrer que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression de $f'$.

*Démonstration.*

- La fonction $h : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ de :
  × $h_1 : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ qui est :
    - de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que : $h_1(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$,

  × $h_2 = \exp$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ car elle est le produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = 1 \times \exp\left(-\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{f' : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right)}$$

□

*4.* Calculer les limites de $f$ en $0$ et en $+\infty$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$. On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \times 0 = 0$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to 0} f(x) = 0.}$$

- Ensuite : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi, par continuité de $\exp$ en $0$ : $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = e^0 = 1$.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

***5.*** On note désormais $g$ la fonction définie par :

$$g \ : \ \mathbb{R}_+ \ \to \ \mathbb{R}$$
$$x \ \mapsto \ \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Démontrer que la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

*Démonstration.*
La fonction $g$ est continue :

× sur $\mathbb{R}_+^*$, car la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, d'après *3*, la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et donc continue, sur $\mathbb{R}_+^*$.
× en 0. En effet, d'après *4* : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} g(x) \ = \ 0 \ = \ g(0)$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

***6.*** Dresser le tableau de variations de $g$ et montrer que $g$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on déterminera.

*Démonstration.*

- D'après la question *3*, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$g'(x) \ = \ f'(x) \ = \ \left(1 + \frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \ > \ 0 \qquad \textit{(car } x > 0\textit{)}$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | $+$ | |
| Variations de $g$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

- La fonction $g$ est :
  × continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après ***5***,
  × strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ d'après ce qui précède.

  Ainsi, la fonction $g$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+)$ où :

$$g\big([0, +\infty[\big) \ = \ \left[g(0), \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[ \ = \ \left[0, \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[ \ = \ [0, +\infty[ \qquad \textit{(d'après 4)}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } g \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

***7.*** Démontrer que $g$ est dérivable en 0. Quelle est la valeur de $g'(0)$ ?

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

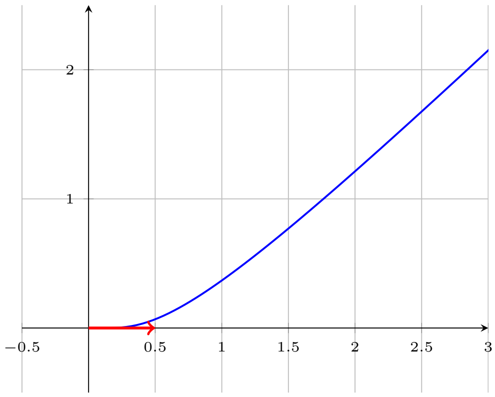
$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } g \text{ est dérivable en 0 et : } g'(0) = 0.}$$

□

***8.*** Tracer l'allure de la courbe représentative de $g$.

*Démonstration.*




□

# III. Problème I

On désigne par $I$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

***9. a)*** Calculer $(A-2I)(A-I)^2$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $A - 2\,I \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
- Ensuite : $A - I \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

  Ainsi :
$$(A-I)^2 \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
- On en déduit : $(A-2\,I)(A-I)^2 \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{(A-2I)(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

***b)*** En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente : $(A-2I)(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :
$$(A-2I)(A-I)^2 \;=\; (A-2I)(A^2-2A+I) \;=\; A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$$
- On en déduit :
$$\begin{array}{rc} & A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & A^3 - 4A^2 + 5A = 2I \\ \text{et} & A(A^2 - 4A + 5I) = 2I \\ \text{ainsi} & A\left(\dfrac{1}{2}(A^2-4A+5I)\right) = I \end{array}$$

  On en déduit que la matrice $A$ est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{2}\,(A^2 - 4A + 5I)$.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)}$$

**Commentaire**

- L'écriture $\dfrac{A}{9}$ n'a pas de sens puisqu'il n'existe pas d'opérateur de division entre les matrices et les réels. Par contre, l'écriture $\dfrac{1}{9} \cdot A$ est bien autorisée : on multiplie une matrice par un scalaire à l'aide de l'opérateur de multiplication externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- On ne peut pas non plus diviser par une matrice. Rappelons que l'inverse d'une matrice $A$, si elle existe, est notée $A^{-1}$ et pas $\dfrac{1}{A}$. L'écriture $\dfrac{A}{B}$ est elle aussi impropre car il n'y a pas d'opérateur de division entre deux matrices.

$\square$

***10.*** On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

***a)*** Déterminer $E_2(A)$.

*Démonstration.*

- Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(A) & \Leftrightarrow & A\,X = 2 \cdot X \\[4pt]
& \Leftrightarrow & (A - 2 \cdot I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4pt]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - 3\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2\,x & + & y & = & -2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2\,x & & & = & -2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}\,L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \texttt{ET} \ y = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \{z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

□

***b)*** En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente : $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_2(A) \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est :
  - × génératrice de $E_2(A)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  C'est donc une base de $E_2(A)$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } E_2(A).}$$

□

***11.*** On note $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\}$.

***a)*** Déterminer $E_1(A)$.

*Démonstration.*

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_1(A) & \Leftrightarrow & AX = X \\ & \Leftrightarrow & (A - I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

En reprenant les équivalences :

$$X \in E_1(A) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3\,L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & 2\,z & = & -y \\ & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} -3\,x & & & = & -3\,y \\ & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y \ \ \texttt{ET} \ \ z = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

□

***b)*** En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente : $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_1(A) \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est :
  - × génératrice de $E_1(A)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  C'est donc une base de $E_1(A)$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } E_1(A).}$$

□

***12.*** On note $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

***a)*** Démontrer que $P$ est inversible et déterminer son inverse.

*Démonstration.*
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue l'opération $\{\, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue l'opération $\{\, L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right.$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible.}}$$

On effectue l'opération $\{\, L_2 \leftarrow L_2 + L_3$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue l'opération $\{\, L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\-1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\-1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}.}$$

**Commentaire**

On remarque que la matrice $P$ est constituée des vecteurs des famille $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. C'est ce choix qui va permettre d'exprimer par la suite la matrice $A$ sous une forme plus simple.
On en reparlera dans le chapitre « Réduction ». □

***b)*** Montrer que $P^{-1}AP = T$ où $T$ est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P^{-1}AP = T.}$$

□

***c)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$ : $A^n = PT^nP^{-1}$.

▸ **Initialisation**
- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = P\ P^{-1} = I$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $A^n = PT^nP^{-1}$).

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} \\ &= PT^n \left(P^{-1}\ P\right) TP^{-1} \\ &= PT^n\, I\, TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

*(d'après la question précédente et par hypothèse de récurrence)*

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}.}$$

□

***13. a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T$ s'écrit $T = D + N$, où : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*Démonstration.*

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé : } N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

***b)*** Calculer $N^2$ et en déduire $N^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, pour tout $k \geqslant 2$ :

$$N^k = N^{k-2} \times N^2 = N^{k-2} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

***c)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $T^n$ en fonction des matrices $D$ et $N$, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Les matrices $D$ et $N$ commutent. En effet :

$$DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ND$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
T^n &= (D+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}\, N^k \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k}\, N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}\, N^k \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k}\, N^k && \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} D^n\, N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1}\, N^1 \\
&= D^n + n\, D^{n-1}\, N
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = D^n + n\, D^{n-1}\, N.}$$

**Commentaire**

- Ici, la matrice $N$ vérifie : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

□

# IV. Problème II

Dans tout le problème, on pourra utiliser le résultat suivant.
Soit $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels. Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $L \in \mathbb{R}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$c_n \;=\; \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}\, b_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}}$$

Avec ces notations :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ a_{n,k} > 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L}$$

## IV.1. Étude préliminaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+2) \quad \text{et} \quad v_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+1)$$

***14.*** Démontrer : $\forall x \in\, ]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

*Démonstration.*

- La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Sa courbe représentative est donc située en dessous de ses tangentes ; en particulier celle au point d'abscisse 1 d'équation :
  $$\begin{aligned} y &= f(1) + f'(1)\,(x-1) \\ &= 0 + (x-1) \end{aligned}$$
  On en déduit : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(t) \leqslant t-1$.
- Soit $x \in\, ]-1,+\infty[$. En appliquant la proposition précédente à $t = 1+x \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient :
  $$\ln(1+x) \;\leqslant\; (\cancel{1}+x) - \cancel{1} \;=\; x$$

$$\boxed{\forall x \in\, ]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x}$$

□

***15.*** ***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+2}\right)$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+1} - \ln(n+3)\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+2)\right) \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}} + \frac{1}{n+2}\right) - \ln(n+3) - \cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}} + \ln(n+2) \\ &= \frac{1}{n+2} - \big(\ln(n+3) - \ln(n+2)\big) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} - \big(\ln(n+3) - \ln(n+2)\big) \\ &= \frac{1}{n+2} - \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{n+2} - \ln\left(\frac{(n+2)+1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{n+2} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)}$$

□

***b)*** En déduire le sens de variations de $(u_n)$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)$$

- En appliquant la question ***14*** à $x = \dfrac{1}{n+2} \in ]-1, +\infty[$, on obtient :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \leqslant \frac{1}{n+2}$$

  Ainsi : $\dfrac{1}{n+2} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+2}\right) \geqslant 0$. D'où :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

□

***16.*** En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $v_{n+1} - v_n$ sous une forme analogue à celle utilisée dans la question précédente pour la suite $(u_n)$, démontrer que la suite $(v_n)$ est décroissante.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+1} - \ln(n+2)\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+1)\right) \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}} + \frac{1}{n+2}\right) - \ln(n+2) - \cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}} + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+2} + \big(\ln(n+1) - \ln(n+2)\big) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2} + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{n+2} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \end{aligned}$$

- Or, en appliquant la question ***14*** à $x = -\dfrac{1}{n+2} \in\, ]-1, +\infty[$, on obtient :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \leqslant -\frac{1}{n+2}$$

Ainsi : $\dfrac{1}{n+2} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) \leqslant 0$. D'où :

$$v_{n+1} - v_n \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$$

□

***17.*** Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire sur leur comportement asymptotique ?

*Démonstration.*

- On connaît déjà la monotonie des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ d'après les questions précédentes. On cherche alors à démontrer que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}} - \ln(n+1)\right) - \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}} - \ln(n+2)\right) \\ &= \ln(n+2) - \ln(n+1) \\ &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n - u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

- On sait que :
  × la suite $(u_n)$ est croissante d'après ***15b***,
  × la suite $(v_n)$ est décroissante d'après ***16***,
  × d'après ce qui précède : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}}$$

- Comme les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes, alors elles convergent vers une limite commune.

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite.}}$$

□

***18.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $w_n = n\,(v_{2n+1} - v_n)$. Supposons que la suite $(w_n)$ converge vers 0.

***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = v_{2n+1} - v_n + \dfrac{n+1}{2\,(n+2)\,(2n+3)}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= (n+1)\,(v_{2(n+1)+1} - v_{n+1}) - n\,(v_{2n+1} - v_n) \\
&= (n+1)\,(v_{2n+3} - v_{n+1}) - (n+1)\,(v_{2n+1} - v_n) + (v_{2n+1} - v_n) \\
&= (v_{2n+1} - v_n) + (n+1)\,\big(v_{2n+3} - v_{n+1} - (v_{2n+1} - v_n)\big) \\
&= v_{2n+1} - v_n + (n+1)\,\big((v_{2n+3} - v_{2n+1}) - (v_{n+1} - v_n)\big)
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***16*** :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2} + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

De plus :

$$\begin{aligned}
v_{2n+3} - v_{2n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{2n+3} \frac{1}{k+1} - \ln(2n+4)\right) - \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k+1} - \ln(2n+2)\right) \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k+1}} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4}\right) - \ln(2n+4) - \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k+1}} + \ln(2n+2) \\
&= \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2\,(n+2)} + \ln\left(\frac{\cancel{2}\,(n+1)}{\cancel{2}\,(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2\,(n+2)} + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& w_{n+1} - w_n \\
= \ & v_{2n+1} - v_n + (n+1)\left(\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2\,(n+2)} + \cancel{\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)} - \left(\frac{1}{n+2} + \cancel{\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}\right)\right) \\
= \ & v_{2n+1} - v_n + (n+1)\left(\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2\,(n+2)} - \frac{1}{n+2}\right) \\
= \ & v_{2n+1} - v_n + (n+1) \times \frac{2\,(n+2) + (2n+3) - 2\,(2n+3)}{2\,(n+2)\,(2n+3)} \\
= \ & v_{2n+1} - v_n + (n+1) \times \frac{\cancel{2n} + 4 + \cancel{2n} + 3 - \cancel{4n} - 6}{2\,(n+2)\,(2n+3)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = v_{2n+1} - v_n + \frac{n+1}{2\,(n+2)\,(2n+3)}.}$$

□

***b)*** Démontrer : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$.

En déduire l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ : $w_{n+1} - w_n \geqslant \dfrac{1}{8n}$.

*Démonstration.*

- Il s'agit de démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{4n}} = 1$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{4n}} & = & 4n\,(w_{n+1} - w_n) & \\ & = & 4n\,(v_{2n+1} - v_n) + \dfrac{4n\,(n+1)}{2\,(n+2)\,(2n+3)} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 4\,w_n + \dfrac{2n\,(n+1)}{(n+2)\,(2n+3)} & \end{array}$$

- Or :
  - × d'une part, d'après l'énoncé de la question ***18*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
  - × d'autre part :

$$\frac{2n\,(n+1)}{(n+2)\,(2n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n \times n}{n \times 2n} = 1$$

  Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n\,(n+1)}{(n+2)\,(2n+3)} = 1$.

  On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{4n}} = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}.}$$

- On vient de démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{4n}} = 1$.

  Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ :

$$\left| \frac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{4n}} - 1 \right| \leqslant \varepsilon$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{lcccccc} & -\varepsilon & \leqslant & \dfrac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{4n}} - 1 & \leqslant & \varepsilon \\ \text{donc} & 1-\varepsilon & \leqslant & \dfrac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{4n}} & \leqslant & 1+\varepsilon \\ \text{d'où} & (1-\varepsilon)\,\dfrac{1}{4n} & \leqslant & w_{n+1} - w_n & \leqslant & (1+\varepsilon)\,\dfrac{1}{4n} \end{array}$$

- Comme cet encadrement est valable pour tout $\varepsilon > 0$, il l'est en particulier pour : $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$.

  Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4n} \leqslant w_{n+1} - w_n \leqslant \frac{3}{2} \times \frac{1}{4n}$$

  En particulier :

$$\frac{1}{8n} \leqslant w_{n+1} - w_n$$

$$\boxed{\text{Il existe bien } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } \forall n \geqslant n_0,\ w_{n+1} - w_n \geqslant \frac{1}{8n}.}$$

**Commentaire**

Pour conclure quant à la question posée, il a fallu choisir une valeur de $\varepsilon$ permettant d'obtenir la minoration voulue. Plus précisément, il a été démontré, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ :

$$w_{n+1} - w_n \ \geqslant \ (1-\varepsilon) \ \frac{1}{4n}$$

Or on souhaite démontrer :

$$w_{n+1} - w_n \ \geqslant \ \frac{1}{8n}$$

On choisit donc $\varepsilon$ tel que : $(1-\varepsilon) \ \dfrac{1}{4n} = \dfrac{1}{8n}$. Or :

$$(1-\varepsilon) \ \frac{1}{4n} = \frac{1}{8n} \quad \Leftrightarrow \quad 1-\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2} = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \varepsilon$$

En choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on obtient donc bien le résultat voulu. □

***c)*** Démontrer, pour tout $n \in [\![ n_0+1, +\infty [\![$ : $w_n \geqslant w_{n_0} + \dfrac{1}{8} \sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \dfrac{1}{k}$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente, pour tout $k \geqslant n_0$ :

$$w_{k+1} - w_k \ \geqslant \ \frac{1}{8k}$$

- Soit $n \in [\![ n_0+1, +\infty [\![$. En sommant les inégalité précédentes pour $k$ variant de $n_0$ à $n-1$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=n_0}^{n-1} (w_{k+1} - w_n) & \geqslant & \sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \dfrac{1}{8k} \\ \| & & \\ w_n - w_{n_0} & & \textit{(par télescopage)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } n \in [\![ n_0+1, +\infty [\![,\ w_n \geqslant w_{n_0} + \frac{1}{8} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k}}$$

□

***d)*** Exprimer $\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \dfrac{1}{k}$ à l'aide de la fonction ln et de certains termes de la suite $(u_n)$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, on remarque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par décalage d'indice :

$$u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+2) \ = \ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2)$$

On en déduit : $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k} = u_n + \ln(n+2)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = u_{p-1} + \ln(p+1) \qquad (*).}$$

- Soit $n \geqslant n_0 + 1$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k} && \textit{(par sommation par paquets)} \\
&= \big(u_{n-2} + \ln(n)\big) - \big(u_{n_0-2} + \ln(n_0)\big) && \textit{(en appliquant } (*) \textit{ à } p = n-1 \textit{ et } p = n_0 - 1\textit{)} \\
&= u_{n-2} + \ln(n) - u_{n_0-2} - \ln(n_0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0 + 1, \ \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k} = u_{n-2} + \ln(n) - u_{n_0-2} - \ln(n_0)}$$

□

*e)* En déduire que la suite $(w_n)$ diverge vers $+\infty$.

*Démonstration.*

- Soit $n \geqslant n_0 + 1$.
D'après la question ***18c*** :

$$w_n \ \geqslant \ w_{n_0} + \frac{1}{8} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k}$$

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$w_n \ \geqslant \ w_{n_0} + \frac{1}{8} \big(u_{n-2} + \ln(n) - u_{n_0-2} - \ln(n_0)\big)$$

Or :
  - × tout d'abord : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_{n_0} - \frac{1}{8} \big(u_{n_0-2} + \ln(n_0)\big) = w_{n_0} - \frac{1}{8} \big(u_{n_0-2} + \ln(n_0)\big)$.
  - × ensuite, d'après ***17***, la suite $(u_n)$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n-2} = \ell$.
  - × enfin : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$.

On en conclut :

$$\lim_{n \to +\infty} w_{n_0} + \frac{1}{8} \big(u_{n-2} + \ln(n) - u_{n_0-2} - \ln(n_0)\big) \ = \ +\infty$$

$$\boxed{\text{Par théorème de comparaison : } \lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty.}$$

□

*f)* A-t-on : $v_{2n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ ?

*Démonstration.*
On procède par l'absurde.
Supposons : $v_{2n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- On en déduit : $n\,(v_{2n+1} - v_n) = \dfrac{v_{2n+1} - v_n}{\frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit :

$$w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On est donc dans le cadre d'application de la question ***18***.

- D'après la question ***18e***, on en déduit :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Absurde !

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (v_{2n+1} - v_n) \text{ n'est pas négligeable devant } \left(\frac{1}{n}\right).}$$

□

## IV.2. Étude d'une suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

***19.*** Démontrer que les suites $(B_{2n})$ et $(B_{2n+1})$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(B_n)$ est convergente.

*Démonstration.*

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
B_{2(n+1)} - B_{2n} &= B_{2n+2} - B_{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \left( \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} \right) - \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}} \\
&= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \\
&= \frac{-(\cancel{2n}+3) + (\cancel{2n}+2)}{(2n+2)\,(2n+3)} \\
&= -\frac{1}{(2n+2)\,(2n+3)} \quad \leqslant \quad 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (B_{2n}) \text{ est donc décroissante.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
B_{2(n+1)+1} - B_{2n+1} &= B_{2n+3} - B_{2n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \left( \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+4} \right) - \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1}} \\
&= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} \\
&= \frac{(\cancel{2n}+4) - (\cancel{2n}+3)}{(2n+3)\,(2n+4)} \\
&= \frac{1}{(2n+3)\,(2n+4)} \quad \geqslant \quad 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (B_{2n+1}) \text{ est donc croissante.}}$$

**Commentaire**

Les démonstrations de la monotonie des suites $(B_{2n})$ et $(B_{2n+1})$ étant très proches, on pouvait se contenter de démontrer l'une d'entre elles avec rigueur, puis de préciser qu'on obtenait la seconde avec des arguments similaires.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} B_{2n+1} - B_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \left( \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} \right) - \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}} \\ &= -\frac{1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} B_{2n+1} - B_{2n} = 0}$$

- On a démontré :
  - × la suite $(B_{2n})$ est décroissante,
  - × la suite $(B_{2n+1})$ est croissante,
  - × de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} B_{2n+1} - B_{2n} = 0$.

$$\boxed{\text{Les suites } (B_{2n}) \text{ et } (B_{2n+1}) \text{ sont donc adjacentes.}}$$

- Comme les suites $(B_{2n})$ et $(B_{2n+1})$ sont adjacentes, alors elles convergent vers une limite commune $L$. Autrement dit :
  - × $B_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$
  - × $B_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$

$$\boxed{\text{Par propriété de recouvrement, la suite } (B_n) \text{ converge vers } L.}$$

□

***20.*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{2n+1} = v_{2n+1} - v_n + \ln(2)$. En déduire la limite de la suite $(B_n)$.

*Démonstration.*

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} B_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{2p}}{2p+1} + \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+2} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

Or :

× d'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} &= \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k+1} && \textit{(car } 2n+1 \textit{ est impair)} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k+1} - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k+1} \\
&= \big(v_{2n+1} + \ln(2n+2)\big) - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k+1} && \textit{(par définition de } v_{2n+1}\textit{)} \\
&= v_{2n+1} + \ln\big(2\,(n+1)\big) - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+2} \\
&= v_{2n+1} + \ln(2) - \ln(n+1) - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

× d'autre part :

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1} = v_n + \ln(n+1)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
B_{2n+1} &= \left(v_{2n+1} + \ln(2) + \ln(n+1) - \frac{1}{2}\,\big(v_n + \ln(n+1)\big)\right) - \frac{1}{2}\,\big(v_n + \ln(n+1)\big) \\
&= v_{2n+1} + \ln(2) + \cancel{\ln(n+1)} - \frac{1}{2}\,v_n - \cancel{\frac{1}{2}\,\ln(n+1)} - \frac{1}{2}\,v_n - \cancel{\frac{1}{2}\,\ln(n+1)} \\
&= v_{2n+1} - v_n + \ln(2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_{2n+1} = v_{2n+1} - v_n + \ln(2)}$$

- D'après la question ***17***, la suite $(v_n)$ converge vers une limite $\ell$. Ainsi la suite $(v_{2n+1})$ est convergente de même limite, car c'est une sous-suite de la suite $(v_n)$.
  On en déduit que la suite $(B_{2n+1})$ est convergente et :

$$\lim_{n\to+\infty} B_{2n+1} = \ell - \ell + \ln(2) = \ln(2)$$

- On en conclut, d'après la question ***19***, que les suites $(B_{2n})$ et $(B_{2n+1})$ convergent vers $L = \ln(2)$.

$$\boxed{\text{Toujours d'après la question } \textbf{\textit{19}}\text{, la suite } (B_n) \text{ converge alors vers } \ln(2).}$$

□

***21.*** Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |B_{2n} - \ln(2)| \ \leqslant \ B_{2n} - B_{2n+1} \quad \text{et} \quad |B_{2n+1} - \ln(2)| \ \leqslant \ B_{2n} - B_{2n+1}$$

*Démonstration.*

- Tout d'abord, la suite $(B_{2n})$ est décroissante de limite $\ln(2)$.
  Par théorème de la limite monotone : $\ln(2) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (B_{2n})$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$B_{2n} \ \geqslant \ \ln(2) \qquad (\star)$$

  Ainsi : $B_{2n} - \ln(2) \geqslant 0$. D'où :

$$|B_{2n} - \ln(2)| \ = \ B_{2n} - \ln(2)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque alors :

$$\begin{aligned} |B_{2n} - \ln(2)| \leqslant B_{2n} - B_{2n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad B_{2n} - \ln(2) \ \leqslant \ B_{2n} - B_{2n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad -\ln(2) \ \leqslant \ -B_{2n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(2) \ \geqslant \ B_{2n+1} \end{aligned}$$

- Or, la suite $(B_{2n+1})$ est croissante de limite $\ln(2)$.
  Par théorème de la limite monotone : $\ln(2) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (B_{2n+1})$. On en déduit :

$$B_{2n+1} \ \leqslant \ \ln(2)$$

$$\boxed{\text{On en conclut, par raisonnement par équivalence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |B_{2n} - \ln(2)| \leqslant B_{2n} - B_{2n+1}.}$$

- Ensuite, d'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$B_{2n+1} \ \leqslant \ \ln(2)$$

  Ainsi : $B_{2n+1} - \ln(2) \leqslant 0$. D'où :

$$|B_{2n+1} - \ln(2)| \ = \ -\big(B_{2n+1} - \ln(2)\big) \ = \ \ln(2) - B_{2n+1}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque alors :

$$\begin{aligned} |B_{2n+1} - \ln(2)| \ \leqslant \ B_{2n} - B_{2n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(2) - B_{2n+1} \ \leqslant \ B_{2n} - B_{2n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(2) \ \leqslant \ B_{2n} \end{aligned}$$

  Or cette dernière assertion est vraie d'après $(\star)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par raisonnement par équivalence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |B_{2n+1} - \ln(2)| \leqslant B_{2n} - B_{2n+1}.}$$

□

**22.** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |B_n - \ln(2)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

- si $n$ est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2p$. On obtient :

$$\begin{array}{rcll} |B_n - \ln(2)| & = & |B_{2p} - \ln(2)| & \\ & \leqslant & B_{2p} - B_{2p+1} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{1}{2p+2} & \textit{(d'après 17)} \\ & \leqslant & \dfrac{1}{2p+1} \ = \ \dfrac{1}{n+1} & \end{array}$$

- si $n$ est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2p+1$. On obtient de même :

$$\begin{array}{rcll} |B_n - \ln(2)| & = & |B_{2p+1} - \ln(2)| & \\ & \leqslant & B_{2p} - B_{2p+1} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{1}{2p+2} & \textit{(d'après 17)} \\ & = & \dfrac{1}{(2p+1)+1} \ = \ \dfrac{1}{n+1} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ |B_n - \ln(2)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}.}$$

□

**Commentaire**

- Soit $\varepsilon > 0$. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{N+1} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :

$$|B_N - \ln(2)| \ \leqslant \ \frac{1}{N+1} \ \leqslant \ \varepsilon$$

  Le réel $B_N$ sera donc une valeur approchée de $\ln(2)$ à $\varepsilon$ près.

- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon & \Leftrightarrow & n+1 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \quad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \end{array}$$

  On note alors : $N = \left\lceil \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$. Dans ce cas, $B_N$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à $\varepsilon$ près.

- En particulier, si $\varepsilon = 10^{-10}$, alors :

$$N \ = \ \left\lceil \frac{1}{10^{-10}} - 1 \right\rceil \ = \ \lceil 10^{10} - 1 \rceil \ = \ 999\,999\,999$$

  Pour obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$ à $10^{-10}$ près avec l'approximation de cette partie, il faut donc calculer le $999\,999\,999^{\text{ème}}$ terme de la suite $(B_n)$ ! L'approximation de $\ln(2)$ fournie par la suite $(B_n)$ est donc très peu efficace (car la suite $(B_n)$ converge lentement vers $\ln(2)$). C'est pourquoi on cherche en partie suivante une façon d'accélérer la convergence d'une suite.

### IV.3. Accélération de convergence

On veut mettre en place une méthode permettant, à partir d'une suite réelle convergente, de construire une nouvelle suite réelle admettant la même limite mais convergeant vers cette limite bien plus rapidement que la suite initiale.
L'objectif de cette partie est de montrer en toute généralité comment construire la nouvelle suite puis de démontrer les propriétés d'accélération de convergence de cette construction sur l'exemple de la suite $(B_n)$ de la partie IV.2.

Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit une nouvelle suite notée $b^{(k)}$, ou $(b_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, de la manière suivante :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n^{(0)} = b_n$,
- pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $b_n^{(k+1)} = b_n^{(k)} + b_{n+1}^{(k)}$.

On note de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_0^{(k)}}{2^{k+1}}$$

*23.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$.

*Démonstration.*
On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \, 1^k \, 1^{(n+1)-k} - 1 \\
&= (1+1)^{n+1} - 1 && \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1} - 1}$$

□

*24.* Démontrer par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}(k)$ où :

$$\mathscr{P}(k) \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ b_n^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_{n+r}$$

*On pourra utiliser le triangle de Pascal.*

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}(k)$ où $\mathscr{P}(k) : \forall n \in \mathbb{N}, \ b_n^{(k)} = \displaystyle\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_{n+r}$.

▸ **Initialisation** :
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{r=0}^{0} \binom{0}{r} b_{n+r} = \binom{0}{0} b_{n+0} = b_n = b_n^{(0)}$$

D'où $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathscr{P}(k)$ et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$ (*i.e.* : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n^{(k+1)} = \sum\limits_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} b_{n+r}$)

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll}
b_n^{(k+1)} & = & b_n^{(k)} + b_{n+1}^{(k)} & \textit{(par définition de } b_n^{(k+1)}\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_{n+r} + \sum\limits_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_{(n+1)+r} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
& = & \sum\limits_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_{n+r} + \sum\limits_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_{n+(r+1)} & \\
& = & \sum\limits_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_{n+r} + \sum\limits_{r=1}^{k+1} \binom{k}{r-1} b_{n+r} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \left(\binom{k}{0} b_n + \sum\limits_{r=1}^{k} \binom{k}{r} b_{n+r}\right) + \left(\sum\limits_{r=1}^{k} \binom{k}{r-1} b_{n+r} + \binom{k}{k} b_{n+k+1}\right) & \\
& = & b_n + b_{n+k+1} + \sum\limits_{r=1}^{k} \left(\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1}\right) b_{n+r} & \\
& = & b_n + b_{n+k+1} + \sum\limits_{r=1}^{k} \binom{k+1}{r} b_{n+r} & \textit{(par triangle de Pascal)}
\end{array}$$

  Or :

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} b_{n+r} & = & \binom{k+1}{0} b_n + \sum\limits_{r=1}^{k} \binom{k+1}{r} b_{n+r} + \binom{k+1}{k+1} b_{n+k+1} \\
& = & b_n + \sum\limits_{r=1}^{k} \binom{k+1}{r} b_{n+r} + b_{n+k+1}
\end{array}$$

  Ainsi :

$$b_n^{(k+1)} = \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} b_{n+r}$$

  D'où $\mathscr{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(k).}$$

**Commentaire**

Cette récurrence doit sembler familière. En effet, le raisonnement mis en place dans l'hérédité est parfaitement similaire à celui présent dans la démonstration :

× de la formule du binôme de Newton (complexe et matriciel),

× de la formule de Leibniz.

On rappelle que ces démonstrations doivent être maîtrisées. □

***25.*** Démontrer que, pour tout $(r, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n \geqslant r$, on obtient :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r}$$

*Démonstration.*

Démontrons par récurrence : $\forall r \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(r)$ où $\mathscr{P}(r) : \forall n \geqslant r, \ \dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r}$.

- **Initialisation** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - D'une part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(2^{n+1} - 1\right) \qquad \textit{(d'après 23)} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

  - D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{0} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\cancel{1 - \frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

  D'où $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $r \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(r)$ et démontrons $\mathscr{P}(r+1)$ (*i.e.* : $\forall n \geqslant r+1, \ \dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1}$).

  Soit $n \geqslant r+1$.
  - Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=r+1}^{n} \binom{n+1}{k+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} \left( \sum_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n+1}{r+1} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1} \\ &= \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} - \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1} \qquad (*) \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

  - Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} &= \frac{1}{2^{r+1}} \binom{r}{r} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} \\ &= \frac{1}{2^{r+1}} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} \qquad (**) \end{aligned}$$

- De plus, par triangle de Pascal :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} \\
= \ & \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \left( \binom{k+1}{r+1} - \binom{k}{r+1} \right) \\
= \ & \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k+1}{r+1} - \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1} \\
= \ & \sum_{k=r+2}^{n+1} \frac{1}{2^{k}} \binom{k}{r+1} - \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1} \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \left( \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k}} \binom{k}{r+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1} \right) - \left( \frac{1}{2^{r+2}} \binom{r+1}{r+1} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1} \right) \\
= \ & \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1} - \frac{1}{2^{r+2}} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k}} \left( \binom{k}{r+1} - \frac{1}{2} \binom{k}{r+1} \right) \\
= \ & \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1} - \frac{1}{2^{r+2}} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k}} \times \frac{1}{2} \binom{k}{r+1} \\
= \ & \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1} - \frac{1}{2^{r+2}} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1}
\end{aligned}$$

- On obtient avec $(**)$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} &= \frac{1}{2^{r+1}} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} \\
&= \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1} - \frac{1}{2^{r+2}} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1} \\
&= \frac{1}{2^{r+2}} + \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1}
\end{aligned}$$

En effet :

$$\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{2^{r+2}} = \frac{2-1}{2^{r+2}} = \frac{1}{2^{r+2}}$$

- On en déduit ainsi avec $(*)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=r+1}^{n} \binom{n+1}{k+1} &= \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} - \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1} \\
&= \frac{1}{2^{r+2}} + \cancel{\frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1}} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1} - \cancel{\frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{r+1}} \\
&= \frac{1}{2^{r+2}} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1}
\end{aligned}$$

- Enfin, on remarque :

$$\begin{aligned}\sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1} &= \frac{1}{2^{r+2}} \binom{r+1}{r+1} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1} \\ &= \frac{1}{2^{r+2}} + \sum_{k=r+2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1}\end{aligned}$$

  On en conclut :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=r+1}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r+1}$$

D'où $\mathscr{P}(r+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall r \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant r,\ \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r}.}$$ $\square$

***26.*** En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_k$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} b_0^{(k)} && \textit{(par définition de } C_n\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \left( \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_r \right) && \textit{(d'après 24)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} b_r \right) \\
&= \sum_{0 \leqslant r \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} b_r \\
&= \sum_{r=0}^{n} \left( \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} b_r \right) \\
&= \sum_{r=0}^{n} b_r \left( \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} \right) \\
&= \sum_{r=0}^{n} b_r \left( \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} \right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{r=0}^{n} \left( \sum_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_r \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{0 \leqslant r \leqslant k \leqslant n} \binom{n+1}{k+1} b_r \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{r=0}^{k} \binom{n+1}{k+1} b_r \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left( \binom{n+1}{k+1} \sum_{r=0}^{k} b_r \right)
\end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé : $\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = \sum\limits_{r=0}^{k} b_r$. Ainsi :

$$C_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left( \binom{n+1}{k+1} \sum_{r=0}^{k} b_r \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left( \binom{n+1}{k+1} B_k \right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_k}$$

□

***27.*** Démontrer que, si la suite $(B_n)$ est convergente, il en est de même de la suite $(C_n)$. De plus, dans ce cas, les deux suites ont même limite.
*On pourra utiliser la propriété énoncée au début du problème.*

*Démonstration.*
Supposons que la suite $(B_n)$ est convergente. On note $L$ sa limite.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_k}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}}{2^{n+1}} \times \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}} \\ &= \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \times \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}} \qquad \textit{(d'après 23)} \end{aligned}$$

- Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on note alors :

$$a_{n,k} = \begin{cases} \binom{n+1}{k+1} & \text{si } k \leqslant n \\ 1 & \text{si } k > n \end{cases}$$

**Commentaire**

- On ne peut poser : $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ a_{n,k} = \binom{n+1}{k+1}$. En effet :
  × par convention, on aurait : $\forall k > n,\ a_{n,k} = \binom{n+1}{k+1} = 0$,
  × or on souhaite : $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ a_{n,k} > 0$.
- Comme les valeurs de $a_{n,k}$ lorsque $k > n$ ne sont pas utiles dans les calculs, on peut choisir n'importe quelle valeur strictement positive pour définir $a_{n,k}$ dans ce cas. On a choisi par exemple la valeur 1 ici.

- On sait :
  × $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ a_{n,k} > 0$,
  × d'après ***23*** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
  × $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

  Alors, d'après la propriété fournie par l'énoncé :
$$\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$$

- De plus : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} = 1$. On en déduit :
$$C_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times L$$

| On en conclut que, si la suite $(B_n)$ est convergente, alors la suite $(C_n)$ est convergente de même limite. |
|---|

□

***28.*** Dans cette question, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

On utilise alors à nouveau, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(b_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ (définie en partie IV.3. ), la suite $(B_n)$ (définie en partie IV.2. ) et la suite $(C_n)$ (définie en partie IV.3. ).
L'objectif de cette question est de montrer que la convergence de la suite $(C_n)$ vers sa limite est bien plus rapide que celle de la suite $(B_n)$.

***a)*** Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :
$$\int_0^1 (1-t)^k \, dt \ = \ \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{r+1}$$

*Démonstration.*
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto (1-t)^k$ est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^k \, dt$ est donc bien définie.
- Ensuite :
$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)^k \, dt &= \int_0^1 \left( \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-t)^r \right) dt && \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
&= \int_0^1 \left( \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r \, t^r \right) dt \\
&= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r \int_0^1 t^r \, dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

- Or, pour tout $r \in \mathbb{N}$ :
$$\int_0^1 t^r \, dt = \left[ \frac{t^{r+1}}{r+1} \right]_0^1 = \frac{1}{r+1}$$

Ainsi :
$$\int_0^1 (1-t)^k \, dt = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r \int_0^1 t^r \, dt = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r \frac{1}{r+1}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 (1-t)^k \, dt = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{r+1}.}$$

□

***b)*** En déduire une expression très simple de la somme apparaissant à droite de l'égalité obtenue en question précédente.

*Démonstration.*
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :
$$\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{r+1} = \int_0^1 (1-t)^k \, dt$$

- Or :
$$\int_0^1 (1-t)^k \, dt = \left[ -\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = 0 - \left( -\frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{k+1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{r+1} = \frac{1}{k+1}.}$$

□

***c)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\, 2^{k+1}}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} b_0^{(k)} && \textit{(d'après l'énoncé de la partie IV.3.)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_r \right) && \textit{(d'après 24)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{r+1} \right) && \textit{(car, d'après l'énoncé, dans cette question : } \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{1}{k+1} \right) && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\, 2^{k+1}}}$$

□

***d)*** Démontrer, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $m > n$ :

$$0 \leqslant C_m - C_n \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k+1}}$$

*Démonstration.*
Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $m > n$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$C_m - C_n = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}} \geqslant 0$$

- De plus, pour tout $k \in [\![n+1, m]\!]$ :

$$\begin{array}{llcll} & k & \geqslant & n+1 & \\ \text{donc} & k+1 & \geqslant & n+2 & \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{k+1} & \leqslant & \dfrac{1}{n+2} & \textit{(par décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{(k+1)\,2^{k+1}} & \leqslant & \dfrac{1}{(n+2)\,2^{k+1}} & \textit{(car : } 2^{k+1} > 0\textit{)} \end{array}$$

En sommant les inégalité précédentes pour $k$ variant de $n+1$ à $m$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(n+2)\,2^{k+1}} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ C_m - C_n & \leqslant & \displaystyle\frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} \end{array}$$

Finalement, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $m > n$ : $0 \leqslant C_m - C_n \leqslant \dfrac{1}{n+2} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k+1}}$.

□

***e)*** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leqslant \ln(2) - C_n \leqslant \frac{1}{(n+2)\,2^{n+1}}$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente, pour tout $m > n$ :

$$0 \leqslant C_m - C_n \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} &= \sum_{k=n+2}^{m} \frac{1}{2^k} && \textit{(par décalage d'indice)}\\ &= \sum_{k=n+2}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-(n+2)+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)\end{aligned}$$

On en déduit :

$$0 \leqslant C_m - C_n \leqslant \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

- Or :

$$\begin{array}{rrcll} & 1 - \dfrac{1}{2^{m-n-1}} & \leqslant & 1 & \textit{(car : } \dfrac{1}{2^{m-n-1}} \geqslant 0\textit{)} \\ \text{donc} & \dfrac{1}{(n+2)\,2^{n+1}} \left(1 - \dfrac{1}{2^{m-n-1}}\right) & \leqslant & \dfrac{1}{(n+2)\,2^{n+1}} & \textit{(car : } \dfrac{1}{(n+2)\,2^{n+1}} \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut, par transitivité : } 0 \leqslant C_m - C_n \leqslant \frac{1}{(n+2)\,2^{n+1}} \qquad (\star\star)}$$

- De plus :
  × d'après les questions ***19*** et ***20***, la suite $(B_m)$ est convergente de limite $\ln(2)$.
  × on est dans le cadre d'application de la question ***27*** en notant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

  Ainsi, d'après la question ***27***, la suite $(C_m)$ est convergente et :

$$\lim_{m\to+\infty} C_m = \lim_{m\to+\infty} B_m = \ln(2)$$

- En passant à la limite quand $m$ tend vers $+\infty$ dans $(\star\star)$, on obtient, par compatibilité de la limite avec l'ordre :

$$0 \leqslant \ln(2) - C_n \leqslant \frac{1}{(n+2)\,2^{n+1}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln(2) - C_n \leqslant \frac{1}{(n+2)\,2^{n+1}}}$$

□

***f)*** Comparer les vitesses de convergence de $(B_n)$ et $(C_n)$ vers leur limite commune.

*Démonstration.*

- D'après la question ***22***, la suite $(B_n)$ converge vers $\ln(2)$ à vitesse $\dfrac{1}{n+1}$.
- D'après la question précédente, la suite $(C_n)$ converge vers $\ln(2)$ à vitesse $\dfrac{1}{(n+2)\,2^{n+1}}$.

$$\boxed{\text{La suite } (C_n) \text{ converge donc (exponentiellement) plus vite vers } \ln(2) \text{ que la suite } (B_n).}$$

**Commentaire**

- Pour poursuivre la comparaison des approximations de $\ln(2)$ fournies par les suites $(B_n)$ et $(C_n)$, on peut effectuer le même raisonnement que dans la remarque de la question *22*.
- Soit $\varepsilon > 0$. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{(N+2)\,2^{N+1}} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :

$$0 \leqslant \ln(2) - C_n \leqslant \frac{1}{(N+2)\,2^{N+1}} \leqslant \varepsilon$$

  Le réel $C_N$ sera donc une valeur approchée de $\ln(2)$ à $\varepsilon$ près.
- La fonction suivante permet d'obtenir un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $C_N$ soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à `eps` près.

```python
def entier_approx(eps) :
    N = 0
    while 1 / ((N+2) * 2**(N+1)) > eps :
        N = N + 1
    return N
```

  En exécutant la commande `entier_approx(10**(-10))`, on obtient que le $28^{\text{ème}}$ terme de la suite $(C_n)$ fournit une valeur approchée de $\ln(2)$ à $10^{-10}$ près.
  On rappelle que pour obtenir une approximation aussi précise avec la suite $(B_n)$, il fallait calculer son $999\,999\,999^{\text{ème}}$ terme. Le gain en efficacité est très net.

$\square$