# DS6

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 2. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

## Exercice 1 : Cours

*1.* (*) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-2+3i$.

*2.* (*) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$.

*3.* Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \ldots, e_m) \in E^m$.
Donner la définition quantifiée de la proposition : la famille $(e_1, \ldots, e_m)$ est libre.

## Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour $n$ entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée $n$-ième.

On considère l'application $\phi$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) \;=\; (X^2-1)\,P'' + 2XP'$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\, U_n^{(n)}$.

Les polynômes $L_n$ sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour $n$ entier naturel, $a_n$ désigne le coefficient dominant de $L_n$.

### Partie I - Quelques résultats généraux

*4.* Déterminer $L_0$, $L_1$ et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, $n$ désigne un entier naturel.

*5.* Justifier que $L_n$ est de degré $n$ et préciser la valeur de $a_n$.

*6.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de $U_n$, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in \,]-1,1[$ et un réel $\lambda$, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' \;=\; \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$$

*On pourra utiliser le théorème de Rolle.*

*7.* Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel $\mu$ tels que :

$$U_n^{(k)} \;=\; \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel $\nu$ tels que :

$$U_n^{(k+1)} \;=\; \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$$

***8.*** En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n$ admet $n$ racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \dots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

**Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme $\phi$**

***9.*** Justifier : $\phi\big(\mathbb{R}[X]\big) \subset \mathbb{R}[X]$ et démontrer :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2,\ \phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = \lambda \cdot \phi(P) + \mu \cdot \phi(Q)$$

On dit que $\phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions 10 à 14, $n$ désigne un entier naturel.

***10.*** Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $\phi$, *i.e.* : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On note $\phi_n$ la restriction de $\phi$ à $\mathbb{R}_n[X]$.
Cette application $\phi_n$ est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

***11.*** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note : $P_k(X) = X^k$. Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\phi(P_k)$.

***12.*** Vérifier : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2 - 1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

***13.*** Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k + 1)$ fois la relation de la question 12, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz :

$$(X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k + 1)U_k^{(k)} \ = \ 0$$

***14.*** Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que : $\phi_n(L_k) = \alpha_k \cdot L_k$, en précisant la valeur de $\alpha_k$. *On pourra utiliser la question 13.*

# Problème

## Première partie

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans toute cette partie, $f$ désigne une fonction définie sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $[a, +\infty[$, continûment dérivable dont la dérivée est croissante sur $[a, +\infty[$ et ne prend que des valeurs strictement négatives.

***15.*** On note $g$ la fonction définie par :

$$g \ : \ \begin{array}{ccc} [a, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$$

Un des objectifs de cette question est l'étude des points fixes de $f$.

***a)*** Montrer que la fonction $f$ admet une limite finie en $+\infty$.
Que peut-on en déduire sur le comportement de $g$ en $+\infty$ ?

***b)*** Quel est le signe de $g(a)$ ?

***c)*** Démontrer que la fonction $g$ s'annule en un unique point $d \in [a, +\infty[$.
Que cela signifie-t-il pour $f$ ?

***16.*** On note $h$ la fonction définie par :

$$h \ : \ \begin{array}{rcl} [a,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\big(f(x)\big) - 2\,f(x) + x \end{array}$$

Un des objectifs de cette question est l'étude du signe des valeurs prises par la fonction $h$.

***a)*** Démontrer : $\forall x \in [a,d[,\ f(x) > x$.

***b)*** En déduire : $\forall x \in [a,d[,\ h(x) < 0$.

***c)*** Démontrer : $\forall x \in ]d,+\infty[,\ h(x) > 0$.

***d)*** Démontrer que la fonction $h$ s'annule une unique fois sur $[a,+\infty[$ et que ce point d'annulation est $d$.

***17.*** On note $F$ la fonction définie par :

$$F \ : \ \begin{array}{rcl} [a,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} x - \dfrac{\big(f(x)-x\big)^2}{h(x)} & \text{si } x \neq d \\ d & \text{si } x = d \end{array} \right. \end{array}$$

Un des objectifs de cette question est d'établir quelques inégalités sur les valeurs prises par la fonction $F$.

***a)*** Justifier que la fonction $F$ est bien définie sur $[a,+\infty[$.

***b)*** Démontrer :

$$\forall x \in [a,d[,\ F(x) > x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in ]d,+\infty[,\ F(x) < x$$

***c)*** Soit $x \in [a,d[$. Démontrer qu'il existe $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \ < \ y \ < \ z \ < \ f(x) \\ f(x) - x \ = \ \big(f'(y) - 1\big)\,(x-d) \\ f\big(f(x)\big) - f(x) \ = \ \big(f'(z)-1\big)\,\big(f(x)-d\big) \end{array} \right.$$

***d)*** Soit $x \in [a,d[$. Démontrer alors :

$$h(x) \ = \ (x-d)\,\Big(\big(f'(z) - f'(y)\big)\,f'(y) + \big(f'(y)-1\big)^2\Big)$$

***e)*** En déduire, pour tout $x \in [a,d[$ : $(x-d)\,h(x) \leqslant \big(f(x)-x\big)^2$. Puis :

$$\forall x \in [a,d[,\ F(x) \ \geqslant \ d$$

***f)*** À l'aide d'un raisonnement analogue aux questions ***17c*** à ***17e***, démontrer :

$$\forall x \in ]d,+\infty[,\ F(x) \ \geqslant \ d$$

***18.*** Étude de la régularité de la fonction $F$.

***a)*** Que peut-on dire, sans aucune étude particulière, de la régularité de la restriction de $F$ à $[a,+\infty[\setminus\{d\}$ ?

***b)*** Justifier qu'il existe deux **fonctions** $\alpha$ et $\beta$ définies sur $[a,+\infty[$, de limite $d$ en $d$, et vérifiant pour tout $x \in [a,+\infty[$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x)-x &=& \big((f'\circ\alpha)(x)-1\big)\,(x-d) \\ h(x) &=& (x-d)\Big(\big((f'\circ\beta)(x)-(f'\circ\alpha)(x)\big)\,(f'\circ\alpha)(x)+\big((f'\circ\alpha)(x)-1\big)^2\Big) \end{array}\right.$$

***c)*** En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to d}\frac{f(x)-x}{h(x)}=\frac{1}{f'(d)-1}$.

***d)*** Démontrer : $\displaystyle\lim_{x\to d}F(x)=d$.

***e)*** Pour tout $x\in[a,+\infty[\setminus\{d\}$, donner l'expression explicite de $F'(x)$.
Démontrer alors que la fonction $F'$ admet une limite finie au point $d$.

***f)*** Démontrer que la fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et préciser la valeur de $F'(d)$.

***19.*** Soit $b\in[a,+\infty[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0=b \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=F(u_n) \end{array}\right.$$

***a)*** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant d$.

***b)*** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.

***c)*** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

***20.*** On considère toujours la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en question ***19***. On suppose de plus : $u_1>d$.

***a)*** Démontrer qu'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que la restriction de $F$ sur l'intervalle $[d,u_1]$ soit une fonction $M$-lipschitzienne.

Dans la suite de cette question, on suppose : $M<1$.

***b)*** Démontrer :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |u_{n+1}-u_n|\ \leqslant\ M^{n-1}\,|u_2-u_1|$$

***c)*** En déduire, pour tout $(n,p)\in\big(\mathbb{N}^*\big)^2$ vérifiant $p>n$ :

$$|u_n-u_p|\ \leqslant\ \frac{M^n-M^p}{M\,(1-M)}\,|u_2-u_1|$$

Déterminer alors explicitement une suite $(v_n)$ géométrique et convergente telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |u_n-d|\ \leqslant\ v_n$$

### Seconde partie

Dans cette partie, on note $f$ la fonction définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-5x} \end{array}$$

Soit $b \in \mathbb{R}_+$. On note $(u_n)$ la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

Dans toute cette partie, on pourra utiliser sans démonstration les inégalités suivantes :

$$f\left(\frac{2}{10}\right) > \frac{2}{10}, \qquad f\left(\frac{3}{10}\right) < \frac{3}{10}, \qquad f'\left(\frac{3}{10}\right) \leqslant -\frac{11}{10}$$

***21.*** Démontrer qu'il existe un unique réel $d \in \mathbb{R}_+$ tel que : $f(d) = d$.
Quelles sont les valeurs possibles des limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

***22.*** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux termes consécutifs égaux si et seulement si : $u_0 = d$.

***23.*** Dans toute cette question, on suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant m$ : $\left\{ \begin{array}{l} u_n \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right] \\ u_0 \neq d \end{array} \right.$.

***a)*** Démontrer : $\forall x \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right],\ f'(x) \leqslant -\dfrac{11}{10}$.

***b)*** Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+2} - u_{n+1}| \ \geqslant \ \frac{11}{10}\ |u_{n+1} - u_n|$$

***c)*** En déduire, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n \geqslant m$ :

$$|u_{n+1} - u_n| \ \geqslant \ \left(\frac{11}{10}\right)^{n-m} \ |u_{m+1} - u_m|$$

***d)*** Que peut-on affirmer en ce qui concerne l'existence d'une limite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
Qu'en déduire sur l'hypothèse faite en début de question ?

***24.*** Déterminer un encadrement de $d$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si : $u_0 = d$.

On note $F$ la fonction définie par :

$$F \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} x - \dfrac{\big(f(x) - x\big)^2}{f\big(f(x)\big) - 2\,f(x) + x} & \text{si } x \neq d \\ d & \text{si } x = d \end{array} \right. \end{array}$$

On note alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = \dfrac{3}{10} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = F(w_n) \end{array} \right.$$

On pourra utiliser sans démonstration les inégalités suivantes :

$$F'\left(\frac{2}{10}\right) \geqslant -\frac{4}{10} \qquad \text{et} \qquad F'\left(\frac{3}{10}\right) \leqslant \frac{2}{10}$$

***25.*** Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $d$.

***26.*** **On admet** que la restriction de la fonction $F'$ à l'intervalle $\left[0, \frac{4}{10}\right]$ est croissante sur $\left[0, \frac{4}{10}\right]$.

***a)*** Donner, en justifiant brièvement un minorant et un majorant de la fonction $F'$ sur $\left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right]$.

***b)*** Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique et convergente telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n - d| \leqslant v_n$$

***c)*** Proposer une fonction **Python** nommée `approx` qui prend en paramètre un réel `eps` strictement positif, et qui renvoie une valeur approchée de $d$ à `eps` près.