DS6

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 2. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. (*) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-2+3i$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x+iy$.

- Supposons : $z^2 = -2+3i$.
  - × D'une part : $|z^2| = |-2+3i| = \sqrt{13}$. Donc :

$$x^2+y^2 \; = \; |z|^2 \; = \; |z^2| \; = \; \sqrt{13} \qquad (1)$$

  - × De plus, comme $z^2 = -2+3i$, alors :

$$-2+3i \; = \; z^2 \; = \; (x+iy)^2 \; = \; (x^2-y^2)+2ixy$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{lr} x^2-y^2 \; = \; -2 & (2) \\ 2xy \; = \; 3 & (*) \end{array} \right.$$

  - × D'après (1) et (2), on obtient :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcr} x^2 & - & y^2 & = & -2 \\ x^2 & + & y^2 & = & \sqrt{13} \end{array} \right.$$

Or :

$$(S) \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x^2 & - & y^2 & = & -2 \\ & & 2\,y^2 & = & \sqrt{13}+2 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x^2 & & & = & \sqrt{13}-2 \\ & & 2\,y^2 & = & \sqrt{13}+2 \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$x \; = \; \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}} \quad \texttt{OU} \quad x \; = \; -\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}$$

$$y \; = \; \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}} \quad \texttt{OU} \quad y \; = \; -\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}$$

  - × Or, d'après $(*)$: $xy = \dfrac{3}{2} > 0$. On note alors :

$$z_0 \; = \; \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}} + i\,\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}$$

On conclut :

$$z = z_0 \quad \texttt{OU} \quad z = -z_0$$

- Les complexes z_0 et $-z_0$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = -2+3i$. Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de } z^2 = -2+3i \text{ est :}\\ \left\{\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}},\ -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}\right)\right\}\end{array}}$$

□

2. (*) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$.

Démonstration.

- On commence par déterminer un développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ en 0.
  - × Tout d'abord :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)}$$

  - × Or :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$$

De plus : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) = 0$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)}\\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\\ &\qquad\qquad + \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)}$$

- Par ailleurs :

$$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)} &= \ln(1+x)\,\frac{1}{\cos(x)} \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) \\
&= x \quad + \frac{x^3}{2} \quad + \frac{5}{24}\,x^5 \\
&\qquad - \frac{x^2}{2} \quad - \frac{x^4}{4} \\
&\qquad\qquad + \frac{x^3}{3} \quad + \frac{x^5}{6} \\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{x^4}{4} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{x^5}{5} \quad + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}\,x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{23}{40}\,x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)} \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}\,x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{23}{40}\,x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)}$$

□

3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \ldots, e_m) \in E^m$.
Donner la définition quantifiée de la proposition : la famille $(e_1, \ldots, e_m)$ est libre.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La famille } (e_1, \ldots, e_m) \text{ est libre si et seulement si :} \\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m,\ \left(\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i = 0_E\right) \;\Rightarrow\; \big(\forall k \in [\![1, m]\!],\ \lambda_k = 0\big)\end{array}}$$

□

Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) \; = \; (X^2-1)\,P'' + 2XP'$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\, U_n^{(n)}$.

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

4. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$L_0 \; = \; \frac{1}{2^0 \times 0!}\, {U_0}^{(0)} \; = \; \frac{1}{1}\, U_0 \; = \; \left(X^2-1\right)^0 \; = \; 1$$

- Puis :

$$L_1 \; = \; \frac{1}{2^1 \times 1!}\, {U_1}^{(1)} \; = \; \frac{1}{2}\, {U_1}' \; = \; \frac{1}{2}\, \Big(\left(X^2-1\right)^1\Big)' \; = \; \frac{1}{2}\, 2X \; = \; X$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
L_2 \; &= \; \frac{1}{2^2 \times 2!}\, {U_2}^{(2)} \\
&= \; \frac{1}{4 \times 2}\, {U_2}^{(2)} \\
&= \; \frac{1}{8}\, \Big(\left(X^2-1\right)^2\Big)^{(2)} \\
&= \; \frac{1}{8}\, \Big(2\, \left(X^2-1\right)\, 2X\Big)' && \textit{(en dérivant une première fois)} \\
&= \; \frac{4}{8}\, \Big(\left(X^2-1\right)\, X\Big)' \\
&= \; \frac{1}{2}\, \Big(2X \times X + \left(X^2-1\right) \times 1\Big) && \textit{(en dérivant une deuxième fois)} \\
&= \; \frac{1}{2}\, \left(3\,X^2-1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{L_0 = 1, \; L_1 = X \text{ et } L_2 = \frac{1}{2}\, \left(3\,X^2-1\right)}$$

□

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

5. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

Démonstration.

- Par définition :

$$\begin{aligned}
U_n &= \left(X^2-1\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(X^2\right)^{n-k} (-1)^k \\
&= \binom{n}{0} \left(X^2\right)^n (-1)^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(X^2\right)^{n-k} (-1)^k \\
&= X^{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(X^2\right)^{n-k} (-1)^k\right)
\end{aligned}$$

  Notons alors : $R_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(X^2\right)^{n-k} (-1)^k$.

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2^n\, n!} \left(U_n\right)^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n\, n!} \left(X^{2n}+R_n\right)^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n\, n!} \left(\left(X^{2n}\right)^{(n)} + R_n{}^{(n)}\right) && \textit{(par linéarité des dérivations successives)}
\end{aligned}$$

  Or :

$$\begin{aligned}
\left(X^{2n}\right)^{(n)} &= \left(2n\ X^{2n-1}\right)^{(n-1)} && \textit{(en dérivant une première fois)} \\
&= \left(2n\times(2n-1)\ X^{2n-2}\right)^{(n-2)} && \textit{(en dérivant une nouvelle fois)} \\
&= \left(2n\times(2n-1)\times(2n-2)\ X^{2n-3}\right)^{(n-3)} && \textit{(en dérivant une nouvelle fois)} \\
&= \dots \\
&= \Big(2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times(2n-(n-2))\ X^{2n-(n-1)}\Big)^{(n-(n-1))} \\
&= \Big(2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times(n+2)\ X^{n+1}\Big)^{(1)} \\
&= 2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times(n+2)\times(n+1)\ X^n \\
&= 2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times(n+2)\times(n+1)\times\frac{n!}{n!}\ X^n \\
&= \frac{2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times(n+2)\times(n+1)\times n!}{n!}\ X^n \\
&= \frac{(2n)!}{n!}\ X^n
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2^n\, n!}\ \left(\left(X^{2n}\right)^{(n)} + {R_n}^{(n)}\right) \\ &= \frac{1}{2^n\, n!}\ \left(\frac{(2n)!}{n!}\ X^n + {R_n}^{(n)}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^n\ \left(n!\right)^2}\ X^n + {R_n}^{(n)} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\deg\left({R_n}^{(n)}\right) = \deg\left(R_n\right) - n = (2n-2) - n = n - 2 < n$$

$$\boxed{\text{Le polynôme } L_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } \dfrac{(2n)!}{2^n\ \left(n!\right)^2}.}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est demandé de « Justifier » que L_n est de degré n. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles. C'est pourquoi on s'est autorisé à démontrer : $\left(X^{2n}\right)^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{n!}\ X^n$ sans faire de récurrence.
- Plus précisément, on pourrait démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où :

$$\mathscr{P}(n) : \text{le polynôme } L_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } \frac{(2n)!}{2^n\ \left(n!\right)^2}$$

□

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in\ ]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$U_n = \left(X^2-1\right)^n = \left((X-1)\ (X+1)\right)^n = (X-1)^n\ (X+1)^n$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les réels } -1 \text{ et } 1 \text{ sont les deux seules racines du polynôme } U_n. \\ \text{Elles sont toutes les deux d'ordre de multiplicité } n.\end{array}}$$

- La fonction polynomiale U_n est :
  - × continue sur $[-1,1]$,
  - × dérivable sur $]-1,1[$,
  - × vérifie $U_n(-1) = U_n(1)$.

  Ainsi, par le théorème de Rolle, on en conclut qu'il existe $\alpha \in\ ]-1,1[$ tel que : $U_n'(\alpha) = 0$.
  Autrement dit, α est une racine du polynôme ${U_n}'$ et il existe donc un polynôme T_n tel que :

$${U_n}' = (X-\alpha)\ T_n \quad \text{où} \quad \deg(T_n) = \deg\left({U_n}'\right) - 1 = (\deg(U_n) - 1) - 1 = (2n-1) - 1 = 2n-2$$

$$\boxed{{U_n}' = (X-\alpha)\ T_n}$$

- Le réel 1 est racine de U_n de multiplicité n.
  On en déduit que 1 est racine de ${U_n}'$ de multiplicité $n-1$ et comme :
  $$ {U_n}'(1) = (1-\alpha)\ T_n(1) = 0 \quad \text{et} \quad 1-\alpha \neq 0 $$
  alors le réel 1 est racine de T_n de multiplicité $n-1$. On en déduit qu'il existe V_n tel que :
  $$ T_n = (X-1)^{n-1}\ V_n \quad \text{où} \quad \deg(V_n) = \deg(T_n) - \deg\big((X-1)^{n-1}\big) = (2n-2)-(n-1) = n-1 $$
  $$ \boxed{{U_n}' = (X-\alpha)\ (X-1)^{n-1}\ V_n} $$
- De la même manière, -1 est racine de U_n de multiplicité n et donc racine de ${U_n}'$ de multiplicité $n-1$. Comme :
  $$ {U_n}'(1) = (-1-\alpha)\ (-1-1)^{n-1}\ V_n(-1) = 0 \quad \text{et} \quad (-1-\alpha)\ (-1-1)^{n-1} \neq 0 $$
  alors le réel -1 est racine de V_n de multiplicité $n-1$. On en déduit qu'il existe W_n tel que :
  $$ V_n = (X+1)^{n-1}\ W_n \quad \text{où} \quad \deg(W_n) = \deg(V_n) - \deg\big((X-1)^{n-1}\big) = (n-1)-(n-1) = 0 $$
  Autrement dit, le polynôme V_n est constant non nul. Il existe donc $\lambda \neq 0$ tel que $V_n = \lambda$.
  $$ \boxed{\text{Finalement : } {U_n}' = (X-\alpha)\ (X-1)^{n-1}\ V_n = \lambda\,(X-\alpha)\ (X-1)^{n-1}\ (X+1)^{n-1}.} $$

Commentaire

- On a choisi ici de présenter une rédaction en 2 étapes mais il était possible de factoriser directement ${U_n}'$ par $(X-1)^{n-1}\ (X+1)^{n-1}$ en remarquant que -1 et 1 sont des racines de ${U_n}'$ toutes deux de multiplicité $n-1$. Une telle démonstration aurait un peu raccourci la présentation.
- Il y avait encore plus simple. Il suffisait de remarquer :
  $$ \begin{array}{rcl} {U_n}' & = & n\,(X-1)^{n-1}\ (X+1)^n + (X-1)^n\ n\,(X+1)^{n-1} \\ & = & n(X-1)^{n-1}\ (X+1)^{n-1}\ \big((X+1)+(X-1)\big) \\ & = & 2n\ (X-1)^{n-1}\ (X+1)^{n-1}\ X \end{array} $$
  Autrement dit : $\lambda = 2n$ et $\alpha = 0$.
- Il est légitime de s'interroger sur l'intérêt d'utiliser le théorème de Rolle alors qu'un calcul direct permet d'aboutir rapidement. Suggérer l'utilisation du théorème de Rolle dans cette question a pour but de préparer le candidat à la suite et plus précisément de l'aider à penser à utiliser ce théorème dans la question qui suit.

□

7. Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :
$$ U_n^{(k)} \ = \ \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k) $$
Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :
$$ U_n^{(k+1)} \ = \ \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}) $$
Démonstration.

- Par hypothèse de l'énoncé :
  $$ {U_n}^{(k)} \ = \ \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k) $$

Comme pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\alpha_i \in \,]-1,1[$ alors $\alpha_i \neq -1$ et $\alpha_i \neq 1$. On en déduit que :

× le réel -1 est racine de ${U_n}^{(k)}$ de multiplicité $n-k$.

× le réel 1 est racine de ${U_n}^{(k)}$ de multiplicité $n-k$.

On en déduit alors que ces deux réels sont racines de multiplicité $n-k-1$ du polynôme dérivé ${U_n}^{(k+1)}$. Ainsi, il existe un polynôme Z_k tel que :

$${U_n}^{(k+1)} = (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}\, Z_k \quad \text{où} \quad \begin{array}{rcl} \deg(Z_k) & = & \deg\left({U_n}^{(k+1)}\right) - \big((n-k-1)+(n-k-1)\big) \\ & = & \big(\deg(U_n)-(k+1)\big) + \big(-2n+2k+2\big) \\ & = & \big(\cancel{2n}-k-1\big) + \big(-\cancel{2n}+2k+2\big) = k+1 \end{array}$$

- Notons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$.
  Quitte à renommer les réels (deux à deux distincts) α_1, …, α_k, on suppose :

$$\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k < 1 = \alpha_{k+1}$$

La fonction polynomiale ${U_n}^{(k)}$ est :

× continue sur $[\alpha_0, \alpha_1]$,

× dérivable sur $]\alpha_0, \alpha_1[$,

× vérifie ${U_n}^{(k)}(\alpha_0) = {U_n}^{(k)}(\alpha_1)$.

Ainsi, par le théorème de Rolle, on en conclut qu'il existe $\beta_1 \in \,]\alpha_0, \alpha_1[$ tel que : $\left({U_n}^{(k)}\right)'(\beta_1) = 0$.
Autrement dit, β_1 est une racine du polynôme ${U_n}^{(k+1)}$ qui est donc factorisable par $(X-\beta_1)$.

- De la même manière, on démontre qu'il existe :

× $\beta_2 \in \,]\alpha_1, \alpha_2[$ tel que ${U_n}^{(k+1)}$ est factorisable par $(X-\beta_2)$.

× …

× $\beta_k \in \,]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ tel que ${U_n}^{(k+1)}$ est factorisable par $(X-\beta_k)$.

× $\beta_k \in \,]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que ${U_n}^{(k+1)}$ est factorisable par $(X-\beta_{k+1})$.

On obtient alors :

$$-1 = \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1$$

On a donc démontré qu'il existe des réels β_1, …, β_{k+1} deux à deux distincts et un polynôme S tel que :

$$\begin{array}{rrcl} & {U_n}^{(k+1)} & = & (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}\,(X-\beta_1)\,\ldots\,(X-\beta_{k+1}) \times S \\ \text{où} & \deg(S) & = & \deg\left({U_n}^{(k+1)}\right) - \big((n-k-1)+(n-k-1)+(k+1)\big) \\ & & = & \big(2n-(k+1)\big) - \big(2n-k-1\big) \;=\; 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{En notant } S = \mu\text{, on obtient bien la forme souhaitée.}}$$

Commentaire

- L'énoncé utilise de nouveau la terminologie « Justifier ». Il s'agit essentiellement de s'assurer de la bonne compréhension du candidat. Celle-ci se mesure :

  × par l'introduction des réels $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$.

  × l'annonce de l'utilisation du théorème de Rolle sur les intervalles $]\alpha_0, \alpha_1[$, …, $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$.

- Il aurait certainement été préférable que l'énoncé fasse l'hypothèse que les réels α_1, …, α_k sont rangés dans l'ordre strictement croissant. Devoir prendre l'initiative d'un éventuel renommage de ces variables ajoute une difficulté non nécessaire. □

8. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note $x_1, \ldots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$, où :

$$\mathscr{P}(k) \quad : \quad \begin{array}{l} \text{il existe des réels } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \text{ deux à deux distincts dans }]-1, 1[\text{ et un réel} \\ \mu \text{ tels que : } {U_n}^{(k)} \ = \ \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k) \end{array}$$

  ▸ **Initialisation** :
  C'est le résultat de la question ***6***.

  ▸ **Hérédité** :
  C'est le résultat de la question ***7***.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathscr{P}(k).}$$

- En particulier, on en conclut que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée.
  Autrement dit, il existe des réels $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ tels que :

$${U_n}^{(n)} \ = \ \mu\,(X-1)^{n-n}(X+1)^{n-n}(X-x_1)\cdots(X-x_n) \ = \ \mu\,(X-x_1)\cdots(X-x_n)$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{\mu}{2^n\, n!}\,(X-x_1)\cdots(X-x_n) && \textit{(par définition)} \\ &= a_n\,(X-x_1)\cdots(X-x_n) && \textit{(d'après la question 11.)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ le polynôme } L_n \text{ admet } n \text{ racines simples qui} \\ \text{vérifient : } -1 < x_1 < \ldots < x_n < 1. \end{array}}$$

□

Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

9. Justifier : $\phi\big(\mathbb{R}[X]\big) \subset \mathbb{R}[X]$ et démontrer :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2,\ \phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = \lambda \cdot \phi(P) + \mu \cdot \phi(Q)$$

On dit que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord : $\phi\big(\mathbb{R}[X]\big) \subset \mathbb{R}[X]$.
  Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors : $\phi(P) = (X^2 - 1)\,P'' + 2X\,P' \in \mathbb{R}[X]$.

- Démontrons que l'application ϕ est linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Soit $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$.

$$\begin{aligned}
& \big(\phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\big)(X) \\
= \ & (X^2-1)\,(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)''(X) + 2X\,(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) \\
= \ & (X^2-1)\,\big(\lambda \cdot P''(X) + \mu \cdot Q''(X)\big) + 2X\,\big(\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)\big) && \textit{(par linéarité de l'évaluation en un point et de la dérivation)} \\
= \ & \lambda \cdot \big((X^2-1)P''(X) + 2X\,P'(X)\big) + \mu \cdot \big((X^2-1)Q''(X) + 2X\,Q'(X)\big) \\
= \ & \lambda \cdot \big(\phi(P)\big)(X) + \mu \cdot \big(\phi(Q)\big)(X) \\
= \ & \Big(\lambda \cdot \phi(P) + \mu \cdot \phi(Q)\Big)(X)
\end{aligned}$$

  Ainsi : $\phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) \ = \ \lambda \cdot \phi(P) + \mu \cdot \phi(Q)$.

$$\boxed{\text{L'application } \phi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$$ □

Dans les questions **10** à **14**, n désigne un entier naturel.

10. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ, *i.e.* : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $\deg(P) \leqslant n$, alors :

× $\deg\big(P''\big) \leqslant n-2$ et donc : $\begin{aligned}[t] \deg\big((X^2-1)P''\big) &= \deg\big((X^2-1)\big) + \deg\big(P''\big) \\ &= 2 + \deg\big(P''\big) \\ &\leqslant 2 + (n-2) \ = \ n \end{aligned}$

× $\deg\big(P'\big) \leqslant n-1$ et donc : $\begin{aligned}[t] \deg\big(2X\,P'\big) &= \deg\big(2X\big) + \deg\big(P'\big) \\ &= 1 + \deg\big(P'\big) \\ &\leqslant 1 + (n-1) \ = \ n \end{aligned}$

Enfin :

$$\deg\big(\phi(P)\big) = \deg\big((X^2-1)\,P'' + 2X\,P'\big) \leqslant \max\big(\deg\big((X^2-1)P''\big), \deg\big(2X\,P'\big)\big) = n$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \phi(P) \in \mathbb{R}_n[X].}$$ □

On note ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$.
Cette application ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

11. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note : $P_k(X) = X^k$. Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\phi(P_k)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\phi(P_0) = (X^2-1)\ P_0'' + 2X\,P_0' = (X^2-1) \times 0 + 2X \times 0 = 0$$

$$\boxed{\Phi(P_0) = 0_{\mathbb{K}[X]}}$$

- Puis :

$$\phi(P_1) = (X^2-1)\ P_1'' + 2X\,P_1' = (X^2-1) \times 0 + 2X \times 1 = 2X = 2\,P_1$$

$$\boxed{\Phi(P_1) = 2 \cdot P_1}$$

- Enfin, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

$$\begin{array}{rcl}(\phi(P_k))(X) & = & \Big((X^2-1)\ P_k'' + 2X\ P_k'\Big)(X) \\ & = & (X^2-1)\ P_k''(X) + 2X\ P_k'(X) \\ & = & (X^2-1)\ k\,(k-1)X^{k-2} + 2X\ kX^{k-1} \\ & = & k\,(k-1)X^k + 2k\,X^k - k\,(k-1)X^{k-2} \\ & = & k\,\big((k-1)+2\big)\ X^k - k\,(k-1)X^{k-2} \\ & = & k\,(k+1)\ X^k - k\,(k-1)X^{k-2} \\ & = & \Big(k\,(k+1)\ P_k - k\,(k-1)P_{k-2}\Big)(X)\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n]\!],\ \phi(P_k) = k\,(k+1)\cdot P_k - k\,(k-1)\cdot P_{k-2}}$$

□

12. Vérifier : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 0$:

$$(X^2-1)\ U_0' - \cancel{2 \times 0\,X\,U_0} \ = \ (X^2-1)\ \Big((X^2-1)^0\Big)' \ = \ (X^2-1)\ P_0' \ = \ 0_{\mathbb{R}[X]}$$

- Si $k \geqslant 1$:

$$\begin{array}{rcl}(X^2-1)\ U_k' - 2k\,X\,U_k & = & (X^2-1)\ \Big((X^2-1)^k\Big)' - 2k\,X\,(X^2-1)^k \\ & = & (X^2-1)\ \Big(k\,(X^2-1)^{k-1}\ 2X\Big) - 2k\,X\,(X^2-1)^k \\ & = & 2k\,X\,(X^2-1)^k - 2k\,X\,(X^2-1)^k \\ & = & 0_{\mathbb{R}[X]}\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ (X^2-1)\ U_k' - 2k\,X\,U_k = 0_{\mathbb{R}[X]}.}$$

□

13. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question ***12***, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz :

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} \ = \ 0$$

Démonstration.

- D'après la question ***12*** :

$$\begin{array}{lrcll} & \Big((X^2-1)\ U_k' - 2kX\,U_k\Big)^{(k+1)} & = & \big(0_{\mathbb{R}[X]}\big)^{(k+1)} & \\ \text{donc} & \Big((X^2-1)\ U_k'\Big)^{(k+1)} - \Big(2kX\,U_k\Big)^{(k+1)} & = & 0_{\mathbb{R}[X]} & \textit{(par linéarité de la dérivation)}\end{array}$$

- Il reste alors à déterminer une expression des deux termes présents dans l'égalité.
  - $\times$ Tout d'abord, si $k = 0$:
$$\Big((X^2-1)\ U_0'\Big)^{(1)} = \Big((X^2-1)\ \big((X^2-1)^0\big)'\Big)^{(1)} = \Big((X^2-1)\ P_0'\Big)^{(1)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$
Pour tout $k \geqslant 1$, d'après la formule de Leibniz :
$$\begin{aligned}
\Big((X^2-1)\ U_k'\Big)^{(k+1)} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \Big((X^2-1)\Big)^{(j)} \Big(U_k'\Big)^{(k+1-j)} \\
&= \quad \sum_{j=0}^{2} \binom{k+1}{j} \Big((X^2-1)\Big)^{(j)} \Big(U_k'\Big)^{(k+1-j)} \\
&\quad + \sum_{j=3}^{k+1} \binom{k+1}{j} \Big((X^2-1)\Big)^{(j)} \Big(U_k'\Big)^{(k+1-j)} && \textit{(ce découpage est valable car } k+1 \geqslant 2\textit{)} \\
&= \sum_{j=0}^{2} \binom{k+1}{j} \Big((X^2-1)\Big)^{(j)} \Big(U_k'\Big)^{(k+1-j)} && \textit{(car pour tout } j \geqslant 3, \Big((X^2-1)\Big)^{(j)} = 0_{\mathbb{R}[X]}\textit{)} \\
&= \quad \binom{k+1}{0} \Big((X^2-1)\Big)^{(0)} \Big(U_k'\Big)^{(k+1)} \\
&\quad + \binom{k+1}{1} \Big((X^2-1)\Big)^{(1)} \Big(U_k'\Big)^{(k)} + \binom{k+1}{2} \Big((X^2-1)\Big)^{(2)} \Big(U_k'\Big)^{(k-1)} \\
&= (X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + k\, 2X\ {U_k}^{(k+1)} + \frac{(k+1)!}{2!\,(k-1)!} \times 2\ {U_k}^{(k)} \\
&= (X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + (k+1)\, 2X\ {U_k}^{(k+1)} + \frac{(k+1)k\ \cancel{(k-1)!}}{\cancel{2}\,\cancel{(k-1)!}} \times \cancel{2}\ {U_k}^{(k)}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \Big((X^2-1)\ U_k'\Big)^{(k+1)} = (X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + (k+1)\, 2X\ {U_k}^{(k+1)} + k(k+1)\ {U_k}^{(k)}}$$
  - $\times$ Pour tout $k \geqslant 0$, d'après la formule de Leibniz :
$$\begin{aligned}
\Big(2kX\,U_k\Big)^{(k+1)} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \Big(2kX\Big)^{(j)} \Big(U_k\Big)^{(k+1-j)} \\
&= \sum_{j=0}^{1} \binom{k+1}{j} \Big(2kX\Big)^{(j)} \Big(U_k\Big)^{(k+1-j)} + \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} \Big(2kX\Big)^{(j)} \Big(U_k\Big)^{(k+1-j)} \\
&= \sum_{j=0}^{1} \binom{k+1}{j} \Big(2kX\Big)^{(j)} \Big(U_k\Big)^{(k+1-j)} && \textit{(car pour tout } j \geqslant 2, \Big(2kX\Big)^{(j)} = 0_{\mathbb{R}[X]}\textit{)} \\
&= \binom{k+1}{0} \Big(2kX\Big)^{(0)} \Big(U_k\Big)^{(k+1)} + \binom{k+1}{1} \Big(2kX\Big)^{(1)} \Big(U_k\Big)^{(k)} \\
&= 2kX\ {U_k}^{(k+1)} + (k+1)\ 2k\ {U_k}^{(k)}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \Big(2kX\,U_k\Big)^{(k+1)} = 2kX\ {U_k}^{(k+1)} + (k+1)\ 2k\ {U_k}^{(k)}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\Big((X^2-1)\ U_k'\Big)^{(k+1)} - \Big(2kX\,U_k\Big)^{(k+1)}\\
= \ & \Big((X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + (k+1)\,2X\ {U_k}^{(k+1)} + k(k+1)\ {U_k}^{(k)}\Big) - \Big(2kX\ {U_k}^{(k+1)} + (k+1)\ 2k\ {U_k}^{(k)}\Big)\\
= \ & (X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + \big((k+1)\,2X - 2kX\big)\ {U_k}^{(k+1)} + \big(k(k+1) - (k+1)\ 2k\big)\ {U_k}^{(k)}\\
= \ & (X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + 2X\ {U_k}^{(k+1)} - k(k+1)\ {U_k}^{(k)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ (X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + 2X\ {U_k}^{(k+1)} - k(k+1)\ {U_k}^{(k)}.}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est précisé qu'il faut dériver $k+1$ fois la relation obtenue en question ***12*** en utilisant la formule de Leibniz. Il n'y a donc aucune initiative à prendre et il faut absolument traiter ce type de questions où la méthodologie à utiliser est entièrement décrite. Le concepteur vous offre des points, il faut les prendre !
- Rappelons qu'il est rare qu'un barème soit binaire. Tout ce qui est juste est retenu pour le candidat. Ainsi, la connaissance de la formule de Leibniz peut à elle seule rappporter un point.
- On a pris soin de traiter à part le cas $k=0$ car il paraît étonnant de faire apparaître une somme de 3 termes $\left(\sum\limits_{j=0}^{2} \dots\right)$ alors qu'on ne dérive que $0+1$ fois. Cependant, si on appliquait la formule générale dans le cas $k=0$, on obtiendrait :

$$\begin{aligned}
&\Big((X^2-1)\ U_k'\Big)^{(k+1)}\\
= \ & \sum_{j=0}^{2} \binom{1}{j} \Big((X^2-1)\Big)^{(j)}\ \Big(U_0'\Big)^{(1-j)}\\
= \ & \binom{1}{0}\Big((X^2-1)\Big)^{(0)}\ \Big(U_0'\Big)^{(1)} + \binom{1}{1}\Big((X^2-1)\Big)^{(1)}\ \Big(U_0'\Big)^{(0)} + \binom{1}{2}\Big((X^2-1)\Big)^{(2)}\ \Big(U_0'\Big)^{(-1)}
\end{aligned}$$

L'un des termes est alors dérivé -1 fois ce qui n'a pas de sens. Mais on peut considérer qu'on n'a pas à le traiter car, par convention : $\binom{1}{2} = 0$.

□

14. Montrer que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que : $\phi_n(L_k) = \alpha_k \cdot L_k$, en précisant la valeur de α_k. *On pourra utiliser la question **13**.*

Démonstration.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\phi_n(L_k) &= \phi(L_k) && \textit{(car } \deg(L_k) \leqslant n \textit{ d'après la question } \mathbf{5}\textit{)}\\
&= (X^2-1)\ L_k'' + 2X\ L_k' && \textit{(par définition de } \phi_n\textit{)}\\
&= (X^2-1)\ \left(\frac{1}{2^k\ k!}\ {U_k}^{(k)}\right)'' + 2X\ \left({U_k}^{(k)}\right)'\\
&= \frac{1}{2^k\ k!}\ \Big((X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + 2X\ {U_k}^{(k+1)}\Big)\\
&= \frac{1}{2^k\ k!}\ k(k+1)\ {U_k}^{(k)} && \textit{(d'après la question } \mathbf{13}\textit{)}\\
&= k(k+1)\ \left(\frac{1}{2^k\ k!}\ {U_k}^{(k)}\right) \ = \ k(k+1)\ L_k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0,n]\!] : \phi_n(L_k) = \alpha_k \cdot L_k, \text{ avec } \alpha_k = k\,(k+1).}$$

□

Problème

Première partie

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $[a, +\infty[$, continûment dérivable dont la dérivée est croissante sur $[a, +\infty[$ et ne prend que des valeurs strictement négatives.

15. On note g la fonction définie par :

$$g \ : \ \begin{array}{rcl} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$$

Un des objectifs de cette question est l'étude des points fixes de f.

a) Montrer que la fonction f admet une limite finie en $+\infty$.
Que peut-on en déduire sur le comportement de g en $+\infty$?

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $\forall x \in [a, +\infty[,\ f'(x) < 0$.
  On obtient le tableau de variations suivant.

x	a $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	$f(a)$ $\searrow$

- La fonction f est donc :
  × décroissante sur $[a, +\infty[$,
  × minorée par a, car f est à valeurs dans $[a, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Par théorème de convergence monotone, elle admet donc une limite finie en } +\infty. \text{ On la note } \ell.}$$

- D'après ce qui précède : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
  De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.}$$

□

b) Quel est le signe de $g(a)$?

Démonstration.

- Tout d'abord : $g(a) = f(a) - a$.
- Or, la fonction f est à valeurs dans $[a, +\infty[$. On en déduit : $\forall x \in [a, +\infty[,\ f(x) \geqslant a$.
  En particulier :

$$f(a) \geqslant a$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } g(a) \geqslant 0.}$$

□

c) Démontrer que la fonction g s'annule en un unique point $d \in [a, +\infty[$.
Que cela signifie-t-il pour f ?

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $[a, +\infty[$ car elle est la somme de fonctions dérivable sur $[a, +\infty[$.
- Soit $x \in [a, +\infty[$.

$$g'(x) \quad = \quad f'(x) - 1$$

Or, d'après l'énoncé : $f'(x) < 0$. Ainsi : $g'(x) < 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	a $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$
Variations de g	$g(a) \searrow -\infty$

- La fonction g est donc :
  - $\times$ continue (car dérivable) sur $[a, +\infty[$,
  - $\times$ strictement décroissante sur $[a, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[a, +\infty[$ sur $g\big([a, +\infty[\big)$ où :

$$g\big([a, +\infty[\big) \;=\; \left] \lim_{x \to +\infty} g(x), g(a) \right] \;= \left] -\infty, g(a) \right] \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{15a}}\textit{)}$$

  Or : $0 \in \,]-\infty, g(a)]$. En effet, d'après la question précédente : $g(a) \geqslant 0$.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[a, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, la fonction } g \text{ s'annule en un unique point de } [a, +\infty[\text{, noté } d.}$$

Soit $x \in [a, +\infty[$.

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x$$

On en déduit que d est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, la fonction } f \text{ admet } d \text{ comme unique point fixe sur } [a, +\infty[.}$$

□

16. On note h la fonction définie par :

$$h \;:\; \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\big(f(x)\big) - 2\, f(x) + x \end{array}$$

Un des objectifs de cette question est l'étude du signe des valeurs prises par la fonction h.

a) Démontrer : $\forall x \in [a, d[, \ f(x) > x$.

Démonstration.
Soit $x \in [a, d[$.

- On remarque tout d'abord :

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) > 0$$

- Or, d'après la question précédente, la fonction g est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$. Ainsi, comme $x \in [a, d[$:

$$\begin{array}{ccc} g(x) & > & g(d) \\ & & \shortparallel \\ & & 0 \quad \textit{(par définition de } d\textit{)} \end{array}$$

Par raisonnement par équivalence, on en déduit : $f(x) > x$.

$$\boxed{\forall x \in [a, d[,\ f(x) > x}$$

□

b) En déduire : $\forall x \in [a, d[,\ h(x) < 0$.

Démonstration.
Soit $x \in [a, d[$.

- D'après la question précédente, comme $x \in [a, d[$:

$$\begin{array}{lccl} & f(x) & > & x \\ \text{donc} & f\big(f(x)\big) & < & f(x) \quad \textit{(car, d'après } \textbf{\textit{15a}}\textit{, la fonction } f \textit{ est strictement décroissante sur } [a, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

Ainsi :

$$f\big(f(x)\big) < f(x) \quad \text{et} \quad -f(x) < -x$$

- On en déduit :

$$f\big(f(x)\big) - f(x) < 0 \quad \text{et} \quad -f(x) + x < 0$$

D'où :

$$\begin{array}{c} f\big(f(x)\big) - f(x) - f(x) + x \quad < \quad 0 \\ \shortparallel \\ h(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [a, d[,\ h(x) < 0}$$

□

c) Démontrer : $\forall x \in]d, +\infty[,\ h(x) > 0$.

Démonstration.
On procède comme en questions ***16a*** et ***16b***.

- Soit $x \in]d, +\infty[$.
  - × On remarque tout d'abord :

$$f(x) < x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) < 0$$

  - × Or, d'après la question ***15c***, la fonction g est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$. Ainsi, comme $x \in]d, +\infty[$:

$$\begin{array}{ccc} g(x) & < & g(d) \\ & & \shortparallel \\ & & 0 \quad \textit{(par définition de } d\textit{)} \end{array}$$

Par raisonnement par équivalence, on en déduit : $f(x) < x$.

$$\boxed{\forall x \in]d, +\infty[,\ f(x) < x}$$

- Soit $x \in \,]d, +\infty[$.
  - × D'après ce qui précède, comme $x \in \,]d, +\infty[$:

$$\begin{array}{rrcll} & f(x) & < & x & \\ \text{donc} & f\big(f(x)\big) & > & f(x) & \text{\textit{(car, d'après \textbf{15a}, la fonction f est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$)}} \end{array}$$

    Ainsi :

$$f\big(f(x)\big) \ > \ f(x) \quad \text{et} \quad -f(x) \ > \ -x$$

  - × On en déduit :

$$f\big(f(x)\big) - f(x) \ > \ 0 \quad \text{et} \quad -f(x) + x \ > \ 0$$

    D'où :

$$\underbrace{f\big(f(x)\big) - f(x) - f(x) + x}_{h(x)} \ > \ 0$$

$$\boxed{\forall x \in \,]d, +\infty[, \ h(x) > 0}$$

□

d) Démontrer que la fonction h s'annule une unique fois sur $[a, +\infty[$ et que ce point d'annulation est d.

Démonstration.

- D'après ***16b*** : $\forall x \in [a, d[, \ h(x) < 0$.
  Ainsi, la fonction h ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, d[$.
- D'après ***16c*** : $\forall x \in \,]d, +\infty[, \ h(x) > 0$.
  Ainsi, la fonction h ne s'annule pas sur l'intervalle $]d, +\infty[$.
- Le seul point d'annulation possible de h sur $[a, +\infty[$ est donc d. Or :

$$\begin{array}{rcll} h(d) & = & f\big(f(d)\big) - 2\,f(d) + d & \\ & = & f(d) - 2\,d + d & \text{\textit{(car d est un point fixe de f)}} \\ & = & f(d) - d & \\ & = & 0 & \text{\textit{(car d est un point fixe de f)}} \end{array}$$

  Ainsi, h s'annule en d.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction h s'annule uniquement en d sur l'intervalle $[a, +\infty[$.}}$$

□

17. On note F la fonction définie par :

$$F \ : \ \begin{array}{ccl} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} x - \dfrac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)} & \text{si } x \neq d \\ d & \text{si } x = d \end{array} \right. \end{array}$$

Un des objectifs de cette question est d'établir quelques inégalités sur les valeurs prises par la fonction F.

a) Justifier que la fonction F est bien définie sur $[a, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction $G : x \mapsto \dfrac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)}$ est bien définie sur $[a, d[$ et sur $]d, +\infty[$ car elle est le quotient $G = \dfrac{g_1}{g_2}$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto \big(f(x) - x\big)^2$ qui est bien définie sur ces intervalles.
  - × $g_2 = h$ qui :
    - est bien définie sur ces intervalles,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur ces intervalles, d'après la question précédente.
- La fonction F est alors bien définie :
  - × sur $[a, d[$ et sur $]d, +\infty[$, car elles est la somme de fonctions bien définies sur ces intervalles,
  - × en d, par définition.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc bien définie sur } [a, +\infty[.}$$

Commentaire

L'énoncé ne demande pas encore (à ce stade) des détails sur la régularité de F. En particulier, il n'est pas question ici de démontrer la continuité de F sur $[a, +\infty[$, et donc en d. □

b) Démontrer :

$$\forall x \in [a, d[, \ F(x) > x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]d, +\infty[, \ F(x) < x$$

Démonstration.

- Soit $x \in [a, d[$.

$$\begin{aligned} F(x) > x \quad & \Leftrightarrow \quad \cancel{x} - \frac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)} > \cancel{x} && \textit{(car } x \neq d\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 > \frac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 < \big(f(x) - x\big)^2 && \textit{(car, d'après } \textbf{16b} : h(x) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie. En effet, d'après ***16a*** : $f(x) - x > 0$.
Donc, par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\big(f(x) - x\big)^2 \ > \ 0$$

Par raisonnement par équivalence, la première assertion est donc vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in [a, d[, \ F(x) > x.}$$

- Soit $x \in \,]d, +\infty[$.

$$\begin{aligned} F(x) < x & \Leftrightarrow \quad \cancel{x} - \frac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)} < \cancel{x} \quad \textit{(car } x \neq d\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 < \big(f(x) - x\big)^2 \qquad \textit{(car, d'après } \textbf{\textit{16c}} \textit{ : } h(x) > 0\textit{)} \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie.
En effet, d'après le raisonnement en question ***16b*** : $f(x) - x < 0$. Donc, par stricte positivité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$\big(f(x) - x\big)^2 \ > \ 0$$

Par raisonnement par équivalence, la première assertion est donc vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \,]d, +\infty[, \ F(x) < x.}$$

□

c) Soit $x \in [a, d[$. Démontrer qu'il existe $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \ < \ y \ < \ z \ < \ f(x) \\ f(x) - x \ = \ \big(f'(y) - 1\big)\,(x - d) \\ f\big(f(x)\big) - f(x) \ = \ \big(f'(z) - 1\big)\,\big(f(x) - d\big) \end{array} \right.$$

Démonstration.

- Soit $y \in [a, d[$. Comme : $x - d \neq 0$, on remarque :

$$f(x) - x = \big(f'(y) - 1\big)\,(x - d) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - x}{x - d} = f'(y) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x)}{x - d} = g'(y)$$

Or d'après la question ***15c***, la fonction g s'annule en d. Ainsi : $g(d) = 0$. D'où :

$$f(x) - x = \big(f'(y) - 1\big)\,(x - d) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x)}{x - d} = g'(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x) - g(d)}{x - d} = g'(y)$$

On souhaite donc démontrer qu'il existe $y \in \,]x, d[$ tel que :

$$\frac{g(x) - g(d)}{x - d} \ = \ g'(y)$$

- La fonction g est :
  × continue sur $[x, d]$,
  × dérivable sur $]x, d[$.

  Par théorème des accroissements finis, il existe $y \in \,]x, d[$ tel que :

$$g'(y) \ = \ \frac{g(x) - g(d)}{x - d}$$

$$\boxed{\text{Il existe donc } y \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \left\{ \begin{array}{l} x < y < d \\ f(x) - x = \big(f'(y) - 1\big)\,(x - d) \end{array} \right. .}$$

- Soit $z \in \,]d, +\infty[$.
Comme $x < d$, alors, par stricte décroissance de f sur $[a, +\infty[$ (question ***15a***) :

$$f(x) \;>\; f(d) = d \qquad (**)$$

On rappelle que la dernière égalité est obtenue car d est un point fixe de f (question ***15c***).
On en déduit : $f(x) \neq d$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f\big(f(x)\big) - f(x) = \big(f'(z) - 1\big)\,\big(f(x) - d\big) \;&\Leftrightarrow\; \frac{f\big(f(x)\big) - f(x)}{f(x) - d} = f'(z) - 1 \\ &\Leftrightarrow\; \frac{g\big(f(x)\big)}{f(x) - d} = g'(z) \end{aligned}$$

Or : $g(d) = 0$. D'où :

$$f\big(f(x)\big) - f(x) = \big(f'(z) - 1\big)\,\big(f(x) - d\big) \;\Leftrightarrow\; \frac{g\big(f(x)\big)}{f(x) - d} = g'(z) \;\Leftrightarrow\; \frac{g\big(f(x)\big) - g(d)}{f(x) - d} = g'(z)$$

On souhaite donc démontrer qu'il existe $z \in \,]d, f(x)[$ tel que :

$$\frac{g\big(f(x)\big) - g(d)}{f(x) - d} \;=\; g'(z)$$

Notons que l'intervalle $]d, f(x)[$ est bien défini, car d'après $(**)$: $d < f(x)$.
- La fonction g est :
  × continue sur $[d, f(x)]$,
  × dérivable sur $]d, f(x)[$.

  Par théorème des accroissements finis, il existe $z \in \,]d, f(x)[$ tel que :

$$g'(z) \;=\; \frac{g\big(f(x)\big) - g(d)}{x - d}$$

$$\boxed{\text{Il existe donc } z \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} d < z < f(x) \\ f\big(f(x)\big) - f(x) = \big(f'(z) - 1\big)\,\big(f(x) - d\big) \end{cases}.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, on remarque qu'on a bien : } x < y < d < z < f(x).}$$

Commentaire

Ce type de question demandant d'établir l'existence de réels permettant d'obtenir une relation entre une fonction f et sa dérivée doit faire penser à l'utilisation du théorème des accroissements finis.
Pour savoir à quelle fonction l'appliquer, on raisonne par équivalence pour se ramener à une propriété de la forme :

$$h'(c) \;=\; \frac{h'(b) - h'(a)}{b - a}$$

Il reste ensuite à identifier h, a, b et c pour savoir à quoi appliquer le théorème des accroissements finis.

□

d) Soit $x \in [a,d[$. Démontrer alors :

$$h(x) \;=\; (x-d)\left(\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y)+\big(f'(y)-1\big)^2\right)$$

Démonstration.
Soit $x \in [a,d[$.

- Par définition de h :

$$\begin{array}{rcll}
h(x) & = & f\big(f(x)\big)-2\,f(x)+x & \\
& = & f\big(f(x)\big)-f(x)-\big(f(x)-x\big) & \\
& = & \big(f'(z)-1\big)\,\big(f(x)-d\big)-\big(f'(y)-1\big)\,(x-d) & \textit{(d'après } \textbf{17c}\textit{)} \\
& = & \big(f'(z)-1\big)\,\big(f(x)-x+(x-d)\big)-\big(f'(y)-1\big)\,(x-d) & \\
& = & \big(f'(z)-1\big)\,\big(f(x)-x\big)+\big(f'(z)-1\big)\,(x-d)-\big(f'(y)-1\big)\,(x-d) & \\
& = & \big(f'(z)-1\big)\,\big(f(x)-x\big)+\big(f'(z)-\cancel{1}-\big(f'(y)-\cancel{1}\big)\big)\,(x-d) & \\
& = & \big(f'(z)-1\big)\,\big(f'(y)-1\big)\,(x-d)+\big(f'(z)-f'(y)\big)\,(x-d) & \textit{(d'après } \textbf{17c}\textit{)} \\
& = & (x-d)\left(\big(f'(z)-1\big)\,\big(f'(y)-1\big)+f'(z)-f'(y)\right) & \\
& = & (x-d)\left(\big(f'(z)-1\big)\,f'(y)-\big(\cancel{f'(z)}-1\big)+\cancel{f'(z)}-f'(y)\right) & \\
& = & (x-d)\,\big(f'(z)\,f'(y)-2\,f'(y)+1\big) &
\end{array}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{array}{rl}
& (x-d)\left(\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y)+\big(f'(y)-1\big)^2\right) \\
= & (x-d)\left(f'(z)-\cancel{\big(f'(y)\big)^2}+\cancel{\big(f'(y)\big)^2}-2\,f'(y)+1\right) \\
= & (x-d)\,\big(f'(z)\,f'(y)-2\,f'(y)+1\big)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \in [a,d[,\ h(x) = (x-d)\left(\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y)+\big(f'(y)-1\big)^2\right)}$$

□

e) En déduire, pour tout $x \in [a,d[$: $(x-d)\,h(x) \leqslant \big(f(x)-x\big)^2$. Puis :

$$\forall x \in [a,d[,\ \ F(x) \;\geqslant\; d$$

Démonstration.
Soit $x \in [a,d[$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll}
(x-d)\,h(x) & = & (x-d)^2\left(\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y)+\big(f'(y)-1\big)^2\right) & \\
& = & (x-d)^2\left(\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y)+\left(\dfrac{f(x)-x}{x-d}\right)^2\right) & \textit{(d'après } \textbf{17c}\textit{)} \\
& = & (x-d)^2\,\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y)+\cancel{(x-d)^2}\,\dfrac{\big(f(x)-x\big)^2}{\cancel{(x-d)^2}} & \\
& = & (x-d)^2\,\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y)+\big(f(x)-x\big)^2 &
\end{array}$$

- Ainsi :
$$\begin{array}{rrcl} & (x-d)\,h(x) & \leqslant & \big(f(x)-x\big)^2 \\ \Leftrightarrow & (x-d)^2\,\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y)+\cancel{\big(f(x)-x\big)^2} & \leqslant & \cancel{\big(f(x)-x\big)^2} \\ \Leftrightarrow & (x-d)^2\,\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y) & \leqslant & 0 \\ \Leftrightarrow & \big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y) & \leqslant & 0 \qquad \textit{(car : } (x-d)^2>0\textit{)} \end{array}$$
Par raisonnement par équivalence, il va donc s'agir de démontrer :
$$\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y) \ \leqslant\ 0$$
- D'après l'énoncé, la fonction f' est à valeurs strictement négative sur $[a,+\infty[$. Ainsi :
$$f'(y) \ <\ 0 \qquad (*)$$
- De plus, d'après ***17c*** : $y<z$.
Or, d'après l'énoncé, la fonction f' est croissante sur $[a,+\infty[$. Ainsi :
$$f'(y)\ \leqslant\ f'(z) \qquad \text{donc} \qquad 0\ \leqslant\ f'(z)-f'(y)$$
On en déduit, avec $(*)$:
$$\big(f'(z)-f'(y)\big)\,f'(y) \ \leqslant\ 0$$
$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x\in[a,d[,\ (x-d)\,h(x)\leqslant\big(f(x)-x\big)^2.}$$
- Soit $x\in[a,d[$.
$$\begin{array}{lcccl} \text{Comme} & (x-d)\,h(x) & \leqslant & \big(f(x)-x\big)^2 & \\ \text{alors} & x-d & \geqslant & \dfrac{\big(f(x)-x\big)^2}{h(x)} & \textit{(car, d'après } \textbf{16b}\textit{, comme } x\in[a,d[\textit{, alors : } h(x)<0\textit{)} \\ \text{donc} & x-\dfrac{\big(f(x)-x\big)^2}{h(x)} & \geqslant & d & \\ \text{d'où} & F(x) & \geqslant & d & \textit{(par définition de } F\textit{)} \end{array}$$
$$\boxed{\forall x\in[a,d[,\ F(x)\geqslant d}$$
□

f) À l'aide d'un raisonnement analogue aux questions ***17c*** à ***17e***, démontrer :
$$\forall x\in\,]d,+\infty[,\ \ F(x)\ \geqslant\ d$$

Démonstration.
On suit le même raisonnement que pour les questions ***17c*** à ***17e***.
Soit $x\in\,]d,+\infty[$.
- La fonction g est :
  × continue sur $[d,x]$,
  × dérivable sur $]d,x[$.

  Par théorème des accroissements finis, il existe $y\in\,]d,x[$ tel que :
$$g'(y) \ =\ \frac{g(x)-g(d)}{x-d}$$
  Donc, avec les mêmes calculs que dans ***17c*** :
$$f(x)-x \ =\ \big(f'(y)-1\big)\,(x-d)$$

- Comme $x > d$, par stricte décroissance de f sur $[a, +\infty[$:

$$f(x) \ < \ f(d) = d$$

L'intervalle $]f(x), d[$ est donc bien défini.
La fonction g est :

× continue sur $[f(x), d]$,
× dérivable sur $]f(x), d[$.

Par théorème des accroissements finis, il existe $z \in \,]f(x), d[$ tel que :

$$g'(z) \ = \ \frac{g\big(f(x)\big) - g(d)}{f(x) - d}$$

Donc, avec les mêmes calculs que dans ***17c*** :

$$f\big(f(x)\big) - f(x) \ = \ \big(f'(z) - 1\big)\,\big(f(x) - d\big)$$

$$\boxed{\text{Finalement, il existe } (y, z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } \begin{cases} f(x) < z < d < y < x \\ f(x) - x \ = \ \big(f'(y) - 1\big)\,(x - d) \\ f\big(f(x)\big) - f(x) \ = \ \big(f'(z) - 1\big)\,\big(f(x) - d\big) \end{cases}}$$

- Avec les mêmes calculs qu'en question ***17d***, on a toujours, pour tout $x \in \,]d, +\infty[$:

$$h(x) \ = \ (x - d)\,\Big(\big(f'(z) - f'(y)\big)\,f'(y) + \big(f'(y) - 1\big)^2\Big)$$

- Avec un raisonnement par équivalence similaire à celui de la question ***17e***, on obtient :

$$(x - d)\,h(x) \ \geqslant \ \big(f(x) - x\big)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \big(f'(z) - f'(y)\big)\,f'(y) \ \geqslant \ 0$$

De plus : $z < y$.
Or, d'après l'énoncé, la fonction f' est croissance sur $[a, +\infty[$, ainsi :

$$f'(z) \leqslant f'(y) \quad \text{donc} \quad f'(z) - f'(y) \leqslant 0$$

Par ailleurs, d'après l'énoncé, la fonction f' est à valeurs négatives sur $[a, +\infty[$. Donc : $f'(y) \leqslant 0$.
On en déduit :

$$\big(f'(z) - f'(y)\big) \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \,]d, +\infty[,\ (x - d)\,h(x) \ \geqslant \ \big(f(x) - x\big)^2.}$$

- Soit $x \in \,]d, +\infty[$.

$$\begin{array}{llcll}
\text{Comme} & (x - d)\,h(x) & \geqslant & \big(f(x) - x\big)^2 & \\
\text{alors} & x - d & \geqslant & \dfrac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)} & \textit{(car, d'après } \textbf{16c}\textit{, comme } x \in \,]d, +\infty[\textit{, alors : } h(x) > 0\textit{)} \\
\text{donc} & x - \dfrac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)} & \geqslant & d & \\
\text{d'où} & F(x) & \geqslant & d & \textit{(par définition de } F\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]d, +\infty[,\ F(x) \geqslant d}$$

□

18. Étude de la régularité de la fonction F.

a) Que peut-on dire, sans aucune étude particulière, de la régularité de la restriction de F à $[a,+\infty[\setminus\{d\}$?

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction $u = f \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, car elle est la composée $u = f \circ f$ de :
  - × f qui est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ d'après l'énoncé,
    - telle que : $f\big([a,+\infty[\big) \subset [a,+\infty[$, toujours d'après l'énoncé.
  - × f qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } h \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{, car elle est la somme de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[.}$$

- La fonction $G : x \mapsto \dfrac{\big(f(x)-x\big)^2}{h(x)}$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,d[$ et sur $]d,+\infty[$ car elle est le quotient $G = \dfrac{g_1}{g_2}$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto \big(f(x)-x\big)^2$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ces intervalles.
  - × $g_2 = h$ qui :
    - est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ces intervalles,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur ces intervalles, d'après ***16d***.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,d[\text{ et sur }]d,+\infty[.}$$

□

b) Justifier qu'il existe deux **fonctions** α et β définies sur $[a,+\infty[$, de limite d en d, et vérifiant pour tout $x \in [a,+\infty[$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x)-x &=& \big((f'\circ\alpha)(x)-1\big)\,(x-d) \\ h(x) &=& (x-d)\Big(\big((f'\circ\beta)(x)-(f'\circ\alpha)(x)\big)\,(f'\circ\alpha)(x)+\big((f'\circ\alpha)(x)-1\big)^2\Big) \end{array}\right.$$

Démonstration.

- Soit $x \in [a,+\infty[$. Trois cas se présentent :
  - × si $x \in [a,d[$, d'après la question ***17c***, il existe $\big(\alpha(x),\beta(x)\big) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} x \ < \ \alpha(x) \ < \ d \ < \ \beta(x) \ < \ f(x) \\ f(x)-x \ = \ \Big(f'\big(\alpha(x)\big)-1\Big)\,(x-d) \\ f\big(f(x)\big)-f(x) \ = \ \Big(f'\big(\beta(x)\big)-1\Big)\,\big(f(x)-d\big) \end{array}\right.$$

  - × si $x = d$, on définit :

$$\alpha(d) \ = \ d \qquad \text{et} \qquad \beta(d) \ = \ d$$

× si $x \in \left]d, +\infty\right[$, d'après la question ***17f***, il existe $\big(\alpha(x), \beta(x)\big) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \ < \ \beta(x) \ < \ d \ < \ \alpha(x) \ < \ x \\ f(x) - x \ = \ \Big(f'\big(\alpha(x)\big) - 1\Big)\,(x - d) \\ f\big(f(x)\big) - f(x) \ = \ \Big(f'\big(\beta(x)\big) - 1\Big)\,\big(f(x) - d\big) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{On a ainsi défini deux fonctions } \alpha \text{ et } \beta \text{ sur } [a, +\infty[.}$$

- Démontrons que ces fonctions sont de limite d en d.
  - × Tout d'abord, pour tout $x \in [a, d[$:

$$x \ < \ \alpha(x) \ < \ d \ < \ \beta(x) \ < \ f(x)$$

Or :

- $\lim\limits_{x \to d^-} x = d$
- $\lim\limits_{x \to d^-} d = d$
- $\lim\limits_{x \to d^-} f(x) = f(d)$, car f est continue en d d'après l'énoncé. Or d est un point fixe de f.
  Donc : $\lim\limits_{x \to d^-} f(x) = d$.

Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to d^-} \alpha(x) \ = \ d \qquad\qquad \lim_{x \to d^-} \beta(x) \ = \ d$$

× Ensuite, pour tout $x \in \left]d, +\infty\right[$:

$$f(x) \ < \ \beta(x) \ < \ d \ < \ \alpha(x) \ < \ x$$

Or :

- $\lim\limits_{x \to d^+} x = d$
- $\lim\limits_{x \to d^+} d = d$
- $\lim\limits_{x \to d^+} f(x) = f(d) = d$.

Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to d^+} \alpha(x) \ = \ d \qquad\qquad \lim_{x \to d^+} \beta(x) \ = \ d$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x \to d} \alpha(x) = d \text{ et } \lim_{x \to d} \beta(x) = d.}$$

- Soit $x \in [a, +\infty[$.
  - × Par définition de α : $f(x) - x \ = \ \big((f' \circ \alpha)(x) - 1\big)\,(x - d)$
  - × Toujours par définition de α et β, et d'après les calculs de ***17d*** et ***17f*** :

$$h(x) \ = \ (x - d)\Big(\big((f' \circ \beta)(x) - (f' \circ \alpha)(x)\big)\,(f' \circ \alpha)(x) + \big((f' \circ \alpha)(x) - 1\big)^2\Big)$$

$$\boxed{\forall x \in [a, +\infty[, \left\{\begin{array}{l} f(x) \ < \ \beta(x) \ < \ d \ < \ \alpha(x) \ < \ x \\ f(x) - x \ = \ \Big(f'\big(\alpha(x)\big) - 1\Big)\,(x - d) \\ f\big(f(x)\big) - f(x) \ = \ \Big(f'\big(\beta(x)\big) - 1\Big)\,\big(f(x) - d\big) \end{array}\right.}$$

□

c) En déduire : $\lim\limits_{x \to d} \dfrac{f(x) - x}{h(x)} = \dfrac{1}{f'(d) - 1}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - x}{h(x)} &= \frac{\Big(f'\big(\alpha(x)\big) - 1\Big)\ \cancel{(x - d)}}{\cancel{(x - d)}\ \bigg(\Big(f'\big(\beta(x)\big) - f'\big(\alpha(x)\big)\Big)\ f'\big(\alpha(x)\big) + \Big(f'\big(\alpha(x)\big) - 1\Big)^2\bigg)} \\ &= \frac{f'\big(\alpha(x)\big) - 1}{\Big(f'\big(\beta(x)\big) - f'\big(\alpha(x)\big)\Big)\ f'\big(\alpha(x)\big) + \Big(f'\big(\alpha(x)\big) - 1\Big)^2} \end{aligned}$$

- Or, toujours d'après la question précédente :

$$\lim_{x \to d} \alpha(x) \ = \ d \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to d} \beta(x) \ = \ d$$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, alors la fonction f' est continue sur $[a, +\infty[$. En particulier, elle est continue en d. On en déduit :

× d'une part : $\lim\limits_{x \to d} f'\big(\alpha(x)\big) = f'(d)$,

× d'autre part : $\lim\limits_{x \to D} f'\big(\beta(x)\big) = f'(d)$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to d} \frac{f'\big(\alpha(x)\big) - 1}{\Big(f'\big(\beta(x)\big) - f'\big(\alpha(x)\big)\Big)\ f'\big(\alpha(x)\big) + \Big(f'\big(\alpha(x)\big) - 1\Big)^2} \\ &= \frac{f'(d) - 1}{\cancel{\big(f'(d) - f'(d)\big)\ f'(d)} + \big(f'(d) - 1\big)^2} \\ &= \frac{f'(d) - 1}{\big(f'(d) - 1\big)^2} \\ &= \frac{1}{f'(d) - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x}{h(x)} = \frac{1}{f'(d) - 1}.}$$

□

d) Démontrer : $\lim\limits_{x \to d} F(x) = d$.

Démonstration.
Soit $x \in [a, +\infty[\setminus \{d\}$.

$$F(x) \ = \ x - \frac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)} \ = \ x - \big(f(x) - x\big) \times \frac{f(x) - x}{h(x)}$$

Or :

- × tout d'abord : $\lim\limits_{x \to d} x = d$.
- × ensuite, comme f est continue en d (car elle est continue sur $[a, +\infty[$), alors : $\lim\limits_{x \to d} f(x) = f(d)$.
  De plus, d est un point fixe de f d'après ***15c***. Donc : $f(d) = d$. Ainsi :
  $$\lim_{x \to d} f(x) - x \;=\; f(d) - d \;=\; d - d \;=\; 0$$
- × enfin, d'après la question précédente :
  $$\lim_{x \to d} \frac{f(x) - x}{h(x)} \;=\; \frac{1}{f'(d) - 1}$$

On en déduit :
$$\lim_{x \to d} F(x) \;=\; d - 0 \times \cancel{\frac{1}{f'(d) - 1}} \;=\; d$$
$$\boxed{\lim_{x \to d} F(x) = d}$$

□

e) Pour tout $x \in [a, +\infty[\setminus \{d\}$, donner l'expression explicite de $F'(x)$.
Démontrer alors que la fonction F' admet une limite finie au point d.

Démonstration.

- Soit $x \in [a, +\infty[\setminus \{d\}$.
  $$\begin{aligned} F'(x) &= 1 - \frac{2\big(f(x) - x\big) \times h(x) - \big(f(x) - x\big)^2 \times h'(x)}{\big(h(x)\big)^2} \\ &= 1 - \frac{f(x) - x}{h(x)} \times \frac{2\,h(x) - \big(f(x) - x\big)\ h'(x)}{h(x)} \\ &= 1 - \frac{f(x) - x}{h(x)} \times \left(2 - h'(x)\ \frac{f(x) - x}{h(x)}\right) \end{aligned}$$
  $$\boxed{\forall x \in [a, +\infty[\setminus \{d\},\ F'(x) = 1 - \frac{f(x) - x}{h(x)} \times \left(2 - h'(x)\ \frac{f(x) - x}{h(x)}\right)}$$
- On sait déjà, d'après la question ***18c*** :
  $$\lim_{x \to d} \frac{f(x) - x}{h(x)} \;=\; \frac{1}{f'(d) - 1}$$
  Il reste donc à établir que h' admet une limite en d.
- Soit $x \in [a, +\infty[\setminus \{d\}$.
  $$h'(x) \;=\; f'(x) \times f'\big(f(x)\big) - 2\,f'(x) + 1$$
  - × La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. Ainsi la fonction f' est continue sur $[a, +\infty[$, donc en particulier en d. On en déduit :
    $$\lim_{x \to d} f'(x) \;=\; f'(d)$$
  - × La fonction f est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a, +\infty[$. Ainsi :
    $$\lim_{x \to d} f(x) \;=\; f(d) \;=\; d$$

On en déduit, par composition de limites :

$$\lim_{x\to d} h'(x) \;=\; f'(d)\times f'(d) - 2\,f'(d) + 1 \;=\; \big(f'(d)\big)^2 - 2\,f'(d) + 1 \;=\; \big(f'(d)-1\big)^2$$

- Comme les fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-x}{h(x)}$ et h' admettent une limite finie en d, alors F' admet bien une limite finie en d, car elle est la somme et le produit de fonctions admettant des limites finies en d.

$$\boxed{\text{La fonction } F' \text{ admet une limite finie en } d.}$$

□

f) Démontrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et préciser la valeur de $F'(d)$.

Démonstration.
On sait que :

× la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,d[$ et sur $]d,+\infty[$, d'après ***18a***,

× la fonction F est continue sur $[a,+\infty[$. En effet, la fonction F est continue :

- sur $[a,d[$ et sur $]d,+\infty[$, car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ces intervalles,
- en d, car, d'après la question ***18d*** :

$$\lim_{x\to d} F(x) \;=\; d \;=\; F(d)$$

× la fonction F' admet une limite finie en d, d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Par théorème de la limite de la dérivée, la fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[.}$$

On rappelle de plus, pour tout $x \in [a,+\infty[\setminus\{d\}$:

$$F'(x) \;=\; 1 - \frac{f(x)-x}{h(x)}\left(2 - h'(x)\,\frac{f(x)-x}{h(x)}\right)$$

En passant à la limite dans cette expression, en utilisant les calculs effectués en question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
F'(d) &= \lim_{x\to d} F'(x)\\
&= 1 - \frac{1}{f'(d)-1}\times\left(2 - \big(f'(d)-1\big)^{\cancel{2}}\,\frac{1}{\cancel{f'(d)-1}}\right)\\
&= 1 - \frac{1}{f'(d)-1}\Big(2 - \big(f'(d)-1\big)\Big)\\
&= 1 - \frac{3-f'(d)}{f'(d)-1}\\
&= \frac{f'(d)-1-\big(3-f'(d)\big)}{f'(d)-1}\\
&= \frac{2\,f'(d)-4}{f'(d)-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{F'(d) \;=\; 2\,\frac{f'(d)-2}{f'(d)-1}}$$

□

19. Soit $b \in [a, +\infty[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant d$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ bien défini} \\ u_n \geqslant d \end{cases}$

▸ **Initialisation** :

× D'après l'énoncé : $u_0 = b$. Donc : $u_0 \in [a, +\infty[$. Or F est définie sur $[a, +\infty[$. Ainsi : $u_1 = F(u_0)$ est bien défini.

× De plus, d'après ***17e*** et ***17f*** :

$$\forall x \in [a, +\infty[\setminus \{d\},\ F(x) \geqslant d$$

Par ailleurs, par définition de F : $F(d) = d$. Ainsi :

$$\forall x \in [a, +\infty[,\ F(x) \geqslant d$$

Comme $u_0 \in [a, +\infty[$, on en déduit : $u_1 = F(u_0) \geqslant d$.

D'où $\mathscr{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\begin{cases} u_{n+1} \text{ bien défini} \\ u_{n+1} \geqslant d \end{cases}$)

× Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et : $u_n \geqslant d$. En particulier : $u_n \in [a, +\infty[$. Or, F est définie sur $[a, +\infty[$. Donc : $u_{n+1} = F(u_n)$ est bien défini.

× De plus, comme $u_n \in [a, +\infty[$: $u_{n+1} = F(u_n) \geqslant d$.

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant d.}$$

□

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

× D'après ***17b*** :

$$\forall x \in]d, +\infty[,\ F(x) > x$$

Or : $F(d) = d$. Donc : $F(d) \geqslant d$. On en déduit :

$$\forall x \in [d, +\infty[,\ F(x) \geqslant x$$

× D'après la question précédente, comme $n \geqslant 1$, alors : $u_n \geqslant d$. Donc :

$$\underbrace{F(u_n)}_{= u_{n+1}} \geqslant u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante à partir du rang 1.}}$$

□

c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

Démonstration.

- La suite (u_n) est :
  - × décroissante à partir du rang 1, d'après la question précédente,
  - × minorée par d, d'après ***19a***.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge donc vers une limite } L \text{ vérifiant : } L \geqslant d.}$$

- Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & F(u_n) \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow \\ L & = & F(L) \quad \textit{(par continuité de } F \textit{ en } L\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi, L est un point fixe de F.
- Or, d'après ***17b***, la fonction F n'admet pas de point fixe sur $[a, d[$, ni sur $]d, +\infty[$.
  Enfin : $F(d) = d$.
  Ainsi, d est l'unique point fixe de F. On en conclut : $L = d$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} u_n = d.}$$

□

20. On considère toujours la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en question ***19***. On suppose de plus : $u_1 > d$.

a) Démontrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que la restriction de F sur l'intervalle $[d, u_1]$ soit une fonction M-lipschitzienne.

Démonstration.

- D'après la question ***18f***, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, donc sur $[d, u_1]$.
  On en déduit que la fonction F' est continue sur le `SEGMENT` $[u_1, d]$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes.

$$\boxed{\text{Autrement dit, il existe } M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que : } \forall x \in [u_1, d],\ \left|F'(x)\right| \leqslant M.}$$

- La fonction F est alors :
  - × continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[u_1, d]$,
  - × dérivable (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $]u_1, d[$,
  - × telle que : $\forall x \in [u_1, d]$, $\left|F'(x)\right| \leqslant M$.

$$\boxed{\text{Par inégalité des accroissements finis, la fonction } F \text{ est } M\text{-lipschitizienne sur } [u_1, d].}$$

□

Dans la suite de cette question, on suppose : $M < 1$.

b) Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{n+1} - u_n| \ \leqslant \ M^{n-1}\, |u_2 - u_1|$$

Démonstration.

- D'après la question **??**, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant u_1$$

  De plus, d'après la question ***19*** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant d$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [d, u_1].}$$

- Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : |u_{n+1} - u_n| \leqslant M^{n-1} |u_2 - u_1|$.
  - ▸ **Initialisation**

$$M^{1-1} |u_2 - u_1| = M^0 |u_2 - u_1| = |u_2 - u_1| \geqslant |u_2 - u_1|$$

  D'où $\mathscr{P}(1)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant M^n |u_2 - u_1|$).
    - × Tout d'abord :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \big|F(u_{n+1}) - F(u_n)\big|$$

    - × Or, d'après la début de cette question $(u_n, u_{n+1}) \in [d, u_1]^2$. Ainsi, par M-lipschitziannité de F sur $[d, u_1]$:

$$|F(u_{n+1}) - F(u_n)| \leqslant M |u_{n+1} - u_n|$$

    - × On en déduit :

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - u_{n+1}| &\leqslant M |u_{n+1} - u_n| \\ &\leqslant M \times M^{n-1} |u_2 - u_1| \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= M^n |u_2 - u_1| \end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1} - u_n| \leqslant M^{n-1} |u_2 - u_1|.}$$

□

c) En déduire, pour tout $(n, p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ vérifiant $p > n$:

$$|u_n - u_p| \leqslant \frac{M^n - M^p}{M(1 - M)} |u_2 - u_1|$$

Déterminer alors explicitement une suite (v_n) géométrique et convergente telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - d| \leqslant v_n$$

Démonstration.

- Soit $(n, p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ vérifiant : $p > n$.

$$\begin{aligned} |u_n - u_p| &= \left| \sum_{k=n}^{p-1} (u_k - u_{k+1}) \right| && \textit{(par télescopage)} \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{p-1} |u_k - u_{k+1}| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ &= \sum_{k=n}^{p-1} |u_{k+1} - u_k| \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{p-1} \left(M^{k-1} |u_2 - u_1|\right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= |u_2 - u_1[\sum_{k=n}^{p-1} M^{k-1} \end{aligned}$$

- Or, comme $M \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{p-1} M^{k-1} &= \sum_{k=n-1}^{p-2} M^k && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= M^{n-1}\,\frac{1-M^{p-2-(n-1)+1}}{1-M} && \textit{(car : } M \neq 1\textit{)} \\
&= M^{n-1}\,\frac{1-M^{p-n}}{1-M} \\
&= \frac{M^{n-1}-M^{p-1}}{1-M} \\
&= \frac{M\left(M^{n-1}-M^{p-1}\right)}{M\,(1-M)} \\
&= \frac{M^n-M^p}{M\,(1-M)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien, pour tout } (n,p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2 \text{ vérifiant } p > n : |u_n - u_p| \leqslant \frac{M^n - M^p}{M\,(1-M)}\,|u_2 - u_1|.}$$

- De plus :
  - × d'une part, d'après ***19c*** : $\lim\limits_{p \to +\infty} u_p = d$,
  - × d'autre part, comme $M \in\ ]-1,1[$: $\lim\limits_{p \to +\infty} M^p = 0$.

  Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité précédente quand p tend vers $+\infty$, on obtient :

$$|u_n - d| \ \leqslant\ \frac{M^n}{M\,(1-M)}\,|u_2 - u_1|$$

- On note alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{M^n}{M\,(1-M)}\,|u_2 - u_1|$.
  - × Tout d'abord, d'après le point précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ |u_n - d| \leqslant v_n$$

  - × En notant $a = \dfrac{1}{M\,(1-M)}\,|u_2 - u_1|$, on remarque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n = a \times M^n$$

    La suite (v_n) est donc géométrique de raison M.
  - × Enfin, comme $M \in\ ]-1,1[$: $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = 0$.
    La suite (v_n) est donc convergente (de limite nulle).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On note } (v_n) \text{ la suite définie par : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{M^n}{M\,(1-M)}\,|u_2 - u_1|. \\ \text{Alors la suite } (v_n) \text{ est géométrique, convergente et : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ |u_n - d| \leqslant v_n.\end{array}}$$

□

Seconde partie

Dans cette partie, on note f la fonction définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-5x} \end{array}$$

Soit $b \in \mathbb{R}_+$. On note (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Dans toute cette partie, on pourra utiliser sans démonstration les inégalités suivantes :

$$f\left(\frac{2}{10}\right) > \frac{2}{10}, \qquad f\left(\frac{3}{10}\right) < \frac{3}{10}, \qquad f'\left(\frac{3}{10}\right) \leqslant -\frac{11}{10}$$

21. Démontrer qu'il existe un unique réel $d \in \mathbb{R}_+$ tel que : $f(d) = d$.
Quelles sont les valeurs possibles des limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

22. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux termes consécutifs égaux si et seulement si : $u_0 = d$.

23. Dans toute cette question, on suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant m$: $\begin{cases} u_n \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right] \\ u_0 \neq d \end{cases}$.

a) Démontrer : $\forall x \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right],\ f'(x) \leqslant -\dfrac{11}{10}$.

b) Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+2} - u_{n+1}| \ \geqslant \ \frac{11}{10}\ |u_{n+1} - u_n|$$

c) En déduire, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n \geqslant m$:

$$|u_{n+1} - u_n| \ \geqslant \ \left(\frac{11}{10}\right)^{n-m} \ |u_{m+1} - u_m|$$

d) Que peut-on affirmer en ce qui concerne l'existence d'une limite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Qu'en déduire sur l'hypothèse faite en début de question ?

24. Déterminer un encadrement de d.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si : $u_0 = d$.

On note F la fonction définie par :

$$F \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x - \dfrac{\big(f(x) - x\big)^2}{f\big(f(x)\big) - 2\,f(x) + x} & \text{si } x \neq d \\ d & \text{si } x = d \end{cases} \end{array}$$

On note alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = \dfrac{3}{10} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = F(w_n) \end{cases}$$

On pourra utiliser sans démonstration les inégalités suivantes :

$$F'\left(\frac{2}{10}\right) \;\geqslant\; -\frac{4}{10} \qquad \text{et} \qquad F'\left(\frac{3}{10}\right) \;\leqslant\; \frac{2}{10}$$

25. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers d.

26. **On admet** que la restriction de la fonction F' à l'intervalle $\left[0, \frac{4}{10}\right]$ est croissante sur $\left[0, \frac{4}{10}\right]$.

a) Donner, en justifiant brièvement un minorant et un majorant de la fonction F' sur $\left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right]$.

b) Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique et convergente telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n - d| \;\leqslant\; v_n$$

c) Proposer une fonction **Python** nommée `approx` qui prend en paramètre un réel `eps` strictement positif, et qui renvoie une valeur approchée de d à `eps` près.