DS7

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Une urne contient 10 boules : 4 rouges et 6 blanches numérotées de 1 à 10.

   a) (*) On tire simultanément 3 boules. Combien a-t-on de tirages unicolores possibles ? De tirages bicolores possibles ?

   b) (*) Mêmes questions si on tire 3 boules successivement avec remise.

   c) (*) Mêmes questions si on tire 3 boules successivement sans remise.

2. Soit $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'application f suivante est linéaire.

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & (X-a)\big(P'(X)+P'(a)\big) - 2\big(P(X)-P(a)\big) \end{array}$$

Exercice 2

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$.
Ainsi : $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. (*) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Déterminer la dimension de E.

5. ***a)*** Montrer que l'ensemble $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel.

   b) Montrer que la matrice $A - I$ n'est pas inversible. En déduire que $E_1(A)$ est de dimension supérieure ou égale à 1.

   c) Déterminer l'ensemble $E_1(A)$, puis donner une base $\mathscr{B}_1$ de $E_1(A)$.

6. On considère l'ensemble $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.
On admet que $E_2(A)$ est un espace vectoriel.

a) Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de $E_2(A)$.

b) (*) Démontrer : $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_1(A) \oplus E_2(A)$.

c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$, qui est la concaténation de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

7. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

b) Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

c) Prouver que $\big(M(a, b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a, b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a, b)\big)^2 = I$$

Exercice 3

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

9. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

10. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \,]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

11. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

12. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \, u_n \in [b, +\infty[$.

13. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

14. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \, 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

15. ***a)*** Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n) :` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon) :
2     n = 0
3     while ........... :
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

16. (*) Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

17. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

18. Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

19. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.

c) (*) Démontrer que la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Que vaut $\Phi'(0)$?

20. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 4

Étudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire. Le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales :

	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale	37%	62%
Ouvriers	1%	10%

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociales.

(i) En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée (Profession libérale) et la plus défavorisée (Ouvriers).

(ii) Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on déduit que l'inégalité a diminué.

(iii) Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages *de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire*, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on déduit que l'inégalité a augmenté puisque le nombre de ceux qui n'ont pas accès à l'enseignement supérieur a proportionnellement plus diminué que celui de ceux qui y ont accès.

Comme on le voit chacune des façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la *concentration* d'une loi de probabilité pour contourner des paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins d'en être conscient.

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2) \leqslant \lambda\, f(t_1) + (1-\lambda)\, f(t_2)$.
On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.
On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, continues et convexes sur $[0,1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0,1]$ par $\tilde{f} : t \mapsto t - f(t)$.

On pose $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\, dt = 2\int_0^1 (t - f(t))\, dt$. $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f.

21. ***a)*** Donnez une interprétation géométrique de la propriété de convexité.

b) Lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0,1]$ à l'aide de la dérivée f'.

22. ***a)*** Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.

b) Montrer que $I(f) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.

c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$ et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

23. **Un premier exemple**.
On note $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction $f : t \mapsto t^2$.

a) Montrer que f est un élément de E.

b) Calculer $I(f)$.

24. **Propriétés de l'indice de Gini.**

a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geqslant 0$.

b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = t$.

c) Montrer que pour tout f élément de E : $I(f) < 1$.

d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n : t \mapsto t^n$.

(i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.

(ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leqslant A < 1$, il existe f appartenant à E telle que : $I(f) > A$.

25. Minoration de l'indice de Gini

a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0,1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.

b) Montrer que pour tout t de $[0, t_0]$: $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\, \dfrac{t}{t_0}$.

c) Montrer que pour tout t de $[t_0, 1]$: $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\, \dfrac{t-1}{t_0-1}$.

d) En déduire : $I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0)$.

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30% de la population possèdent 9% de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.