DS7 /112

On traitera OBLIGATOIREMENT les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /9

1. Une urne contient 10 boules : 4 rouges et 6 blanches numérotées de 1 à 10.

a) (*) On tire simultanément 3 boules. Combien a-t-on de tirages unicolores possibles ? De tirages bicolores possibles ?

- **1 pt :** $A_1 = A_{1,r} \sqcup A_{1,b}$**. Comme cette union est disjointe :** $\text{Card}(A_1) = \text{Card}(A_{1,r}) + \text{Card}(A_{1,b})$
- **1 pt :** $\text{Card}(A_{1,r}) = \binom{4}{3}$ **et** $\text{Card}(A_{1,b}) = \binom{6}{3}$
- **1 pt :** $\text{Card}(A_2) = 6\binom{4}{2} + 4\binom{6}{2}$

b) (*) Mêmes questions si on tire 3 boules successivement avec remise.

- **1 pt :** $\text{Card}(B_1) = 4^3 + 6^3$
- **1 pt :** $\text{Card}(B_2) = 18 \times 4^2 + 12 \times 6^2$

c) (*) Mêmes questions si on tire 3 boules successivement sans remise.

- **1 pt :** $\text{Card}(C_1) = 4! + \dfrac{6!}{3!} = 144$
- **1 pt :** $\text{Card}(C_2) = 24 \times 3^2 + \dfrac{6!}{2!}$

2. Soit $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'application f suivante est linéaire.

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X-a)\big(P'(X) + P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big) \end{array}$$

- **2 pts**

Exercice 2 /28

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$.
Ainsi : $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. (*) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $E = \text{Vect}\left(()\, I, A\right)$

4. Déterminer la dimension de E.

- **1 pt**

5. ***a)*** Montrer que l'ensemble $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel.

  - **1 pt :** $X \in E_1(A) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ -\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$
  - **1 pt :** $\cdots \Leftrightarrow x = y + 2z$
  - **1 pt :** $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

  b) Montrer que la matrice $A - I$ n'est pas inversible. En déduire que $E_1(A)$ est de dimension supérieure ou égale à 1.

  - **1 pt :** $A - I$ **non inversible car...**
  - **1 pt :** $\dim\left(E_1(A)\right) \neq 0$ **car... Donc :** $\dim\left(E_1(A)\right) \geqslant 1$.

  c) Déterminer l'ensemble $E_1(A)$, puis donner une base $\mathscr{B}_1$ de $E_1(A)$.

  - **1 pt**

6. On considère l'ensemble $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.
On admet que $E_2(A)$ est un espace vectoriel.

  a) Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de $E_2(A)$.

  - **1 pt :** $X \in E_2(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 3\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ -\,x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$
  - **1 pt :** $\cdots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & -\,z \\ & & y & = & -2\,z \end{array}\right.$
  - **1 pt :** $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$
  - **1 pt :** $\dim\left(E_2(A)\right) = \text{Card}\left(\mathcal{F}_2\right) = 1$

  b) (*) Démontrer : $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_1(A) \oplus E_2(A)$.

  - **1 pt :** $\dim\left(E_1(A)\right) + \dim\left(E_2(A)\right) = \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$
  - **1 pt :** $E_1(A) \cap E_2(A) = \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$

  c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$, qui est la concaténation de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

  - **1 pt : Le vecteur** $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **a pour coordonnées** $(1, 0, 0)$ **dans la base** $\mathscr{B}$**.**
  - **2 pts : Le vecteur** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **a pour coordonnées** $(5, -1, 2)$ **dans la base** $\mathscr{B}$**.**

7. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : La réduite obtenue est triangulaire (supérieure). De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.**
- **1 pt :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

- **1 pt :** $AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

- **1 pt :** $D(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$

b) Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

- **1 pt :** $M(a, b)$ **est inversible si et seulement si** $D(a, b)$ **est inversible**
- **1 pt :** $M(a, b)$ **inversible** $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+2b \neq 0 \\ \\ a+n \neq 0 \end{array} \right.$

c) Prouver que $\big(M(a, b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a, b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a, b)\big)^2 = I$$

- **1 pt :** $\big(M(a, b)\big)^2 = I \Leftrightarrow \big(D(a, b)\big)^2 = I$
- **1 pt :** $\big(D(a, b)\big)^2 = I$ **ssi l'un des systèmes suivants est vrai**

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} a+2b = 1 \\ a+b = 1 \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{l} a+2b = 1 \\ a+b = -1 \end{array} \right.$$

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{l} a+2b = -1 \\ a+b = 1 \end{array} \right. \qquad (S_4) \left\{ \begin{array}{l} a+2b = -1 \\ a+b = -1 \end{array} \right.$$

- **1 pt : Les matrices $M(a, b)$ vérifiant $(M(a, b))^2 = I$ sont $M(1, 0)$, $M(-3, 2)$, $M(3, -2)$ et $M(-1, 0)$**

Exercice 3 /42

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\,]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

9. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

- **1 pt : la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f' : x \mapsto \dfrac{x-1}{x}$**
- **1 pt : TV**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt : limites en 0 et en $+\infty$**

10. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in\,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

- **2 pts : théorème de la bijection sur $]0,1[$**
  - × **1 pt : hypothèses**
  - × **1 pt : $f\big(]0,1[\big) =]1,+\infty[$ et $2 \in\,]1,+\infty[$**
- **1 pt : théorème de la bijection sur $]1,+\infty[$**
- **1 pt : 1 n'est pas solution**

11. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

- **1 pt : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$**
- **1 pt : la réciproque de la restriction de f sur $]1,+\infty[$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.**

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

12. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

13. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

- **1 pt : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n)$**
- **1 pt : $f(u_n) \geqslant f(b)$ car $u_n \geqslant b$ d'après la question précédente et f croissante sur $[b,+\infty[$**
- **1 pt : la suite (u_n) est décroissante et minorée par b. Elle est donc convergente**
- **1 pt : passage à la limite pour démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = b$**

14. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

- **1 pt : la fonction $h : x \mapsto \ln(x) + 2$ est dérivable sur $[b, +\infty[$ et : $\forall x \in [b, +\infty[,\ h'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$**
- **1 pt : hypothèses IAF**
- **1 pt : application à $u_n \in [b, +\infty[$ et $b \in [b, +\infty[$**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

15. ***a)*** Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n) :` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

- **2 pts**

```
def suite(n) :
    u = 4
    for i in range(n) :
        u = np.log(u) + 2
    return u
```

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon) :
2     n = 0
3     while ............ :
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

- **1 pt :** `while 1 / 2**(n-1) > epsilon :`

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

16. (*) Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

- **1 pt : La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est l'inverse d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle.**
  En effet, d'après le tableau de variations de f en question *9* : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f(x) \geqslant 1$.
  La fonction $\dfrac{1}{f}$ admet donc une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- **1 pt : $\Phi : x \mapsto G(2x) - G(x)$ et explications Φ de calsse $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt : calcul Φ'**

17. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

- **1 pt : d'après *9* : $f(x) \geqslant 0$ et $f(2x) \geqslant 0$. Donc : $\Phi'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 \geqslant x$ (par stricte croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$)**
- **1 pt : TV**

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

18. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

- **1 pt : d'après la question *9* : $\forall t \in]0, +\infty[, \ f(t) \geqslant 1 > 0$.**
  On en déduit : $\forall t \in]0, +\infty[, \ \dfrac{1}{f(t)} > 0$.
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$, car $x > 0$)**
- **1 pt : par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, pour tout $t \in]0, +\infty[$: $f(t) \geqslant 1 \ \Leftrightarrow \ \dfrac{1}{f(t)} \leqslant 1$. Puis croissance de l'intégrale...**

19. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

- **1 pt : théorème d'encadrement et : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = 0$**

b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.

- **1 pt : $\Phi'(x) = \dfrac{2}{f(2x)} - \dfrac{1}{f(x)}$ et, d'après *9* : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$. Donc...**

c) (*) Démontrer que la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Que vaut $\Phi'(0)$?

- **1 pt : Φ continue sur $[0, +\infty[$ car...**
- **1 pt : reste des hypothèses du théorème de la limite de la dérivée**

20. On donne $\Phi(2) \simeq 1, 1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0, 7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

- **4 pts :**
  × **1 pt : demi-tangente en 0**
  × **1 pt : tangente en 2**
  × **1 pt : monotonie**
  × **1 pt : limite en $+\infty$**

Exercice 4 /33

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2) \leqslant \lambda\, f(t_1) + (1-\lambda)\, f(t_2)$.
On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.
On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, continues et convexes sur $[0,1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0,1]$ par $\tilde{f} : t \mapsto t - f(t)$.

On pose $I(f) = 2 \displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 2 \int_0^1 (t - f(t))\ dt$. $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f.

21. ***a)*** Donnez une interprétation géométrique de la propriété de convexité.

- **1 pt : Une fonction f est convexe si sa courbe représentative se situe en dessous de chacune de ses cordes.**

b) Lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0,1]$ à l'aide de la dérivée f'.

- **1 pt : Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, alors : f convexe sur $[0,1]$ $\Leftrightarrow$ f' croissante sur $[0,1]$.**

22. ***a)*** Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.

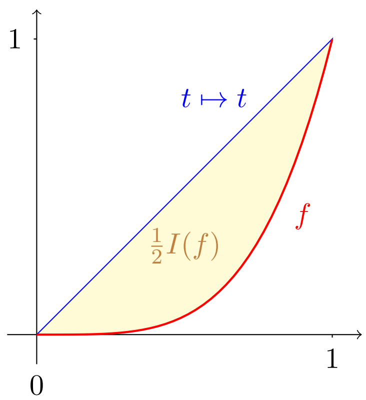
- **1 pt**

b) Montrer que $I(f) = 1 - 2 \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.

- **1 pt : La fonction $\tilde{f}$ est continue sur le SEGMENT $[0,1]$ car elle est la somme de fonctions continues sur $[0,1]$. L'intégrale $I(f)$ est donc bien définie.**
- **1 pt : calcul $I(f)$**

c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$ et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

- **2 pts : dessin**



- **1 pt : $I(f)$ mesure le double de l'aire entre $\mathcal{C}_f$ et sa corde sur $[0,1]$**

23. **Un premier exemple**.
On note $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction $f : t \mapsto t^2$.

a) Montrer que f est un élément de E.

- **1 pt : f croissante sur $[0,1]$ donc... D'où f est à valeurs dans $[0,1]$**
- **1 pt : reste des hypothèses**

b) Calculer $I(f)$.

- **1 pt : $I(f) = \dfrac{1}{3}$**

24. **Propriétés de l'indice de Gini.**

a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geqslant 0$.

- **1 pt : f convexe sur $[0,1]$, donc $\mathcal{C}_f$ sous $y = x$. D'où : $\forall t \in [0,1],\ f(t) \leqslant t$. Ainsi : $\tilde{f}(t) \geqslant 0$**
- **1 pt : croissance de l'intégrale**

b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = t$.

- **1 pt : la fonction $\tilde{f}$ est :**
  - × **continue sur $[0,1]$, car elle est la somme de fonctions continues sur $[0,1]$;**
  - × **positive sur $[0,1]$, d'après la question précédente.**

  Ainsi : $I(f) = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0$

c) Montrer que pour tout f élément de E : $I(f) < 1$.

- **1 pt : $I(f) < 1 \ \Leftrightarrow\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt > 0$**
- **1 pt : f à valeurs positives (car à valeurs dans $[0,1]$), donc : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \geqslant 0$ (par croissance de l'intégrale)**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^1 f(t) \neq 0$ en procédant par l'absurde**

d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n : t \mapsto t^n$.

(i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.

- **1 pt : $f_n \in E$**
- **1 pt : $I(f_n) = 1 - \dfrac{2}{n+1}$**

(ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leqslant A < 1$, il existe f appartenant à E telle que : $I(f) > A$.

- **1 pt : en notant $N = \left\lfloor \dfrac{2}{1-A} - 1 \right\rfloor$, on obtient : $I(f_N) > A$**
- **1 pt : la fonction f cherchée est f_N**

25. Minoration de l'indice de Gini

a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0,1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.

- **1 pt : La fonction $\tilde{f}$ est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$.**
  Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle est majorée et son maximum est atteint pour un certain réel de $[0,1]$.
  Il existe donc $a \in [0,1]$ tel que : $\tilde{f}(a) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.
- **1 pt : si $a \in\,]0,1[$, on note : $t_0 = a$**
- **2 pts : si $a = 0$ ou $a = 1$, on note : $t_0 = \dfrac{1}{2}$ (ou n'importe quel élément de $]0,1[$)**

b) Montrer que pour tout t de $[0,t_0]$: $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\ \dfrac{t}{t_0}$.

- **1 pt : $y = \tilde{f}(t_0)\ \dfrac{t}{t_0}$ est l'équation la corde sur $[0,t_0]$ de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$**
- **1 pt : utilisation de la concavité de $\tilde{f}$ sur $[0,t_0]$**

c) Montrer que pour tout t de $[t_0,1]$: $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\ \dfrac{t-1}{t_0-1}$.

- **1 pt : $y = \tilde{f}(t_0)\ \dfrac{t-1}{t_0-1}$ est l'équation la corde sur $[t_0,1]$ de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$**

d) En déduire : $I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0)$.

- **1 pt : d'après *25b* et croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\ dt \ \geqslant\ \int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\ \frac{t}{t_0}\ dt$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\ \frac{t}{t_0}\ dt = \frac{\tilde{f}(t_0)\, t_0}{2}$**
- **1 pt : d'après *25c* et croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t)\ dt \ \geqslant\ \int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t_0)\ \frac{t-1}{t_0-1}\ dt$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t_0)\ \frac{t-1}{t_0-1}\ dt = \frac{\tilde{f}(t_0)(1-t_0)}{2}$**
- **1 pt : relation de Chasles pour conclure**