DS7

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Une urne contient 10 boules : 4 rouges et 6 blanches numérotées de 1 à 10.

a) (*) On tire simultanément 3 boules. Combien a-t-on de tirages unicolores possibles ? De tirages bicolores possibles ?

Démonstration.

- On note :
  - × A_1 l'ensemble des tirages unicolores possibles lors d'un tirage simultané de 3 boules.
  - × $A_{1,r}$ l'ensemble des tirages unicolores rouges possibles lors d'un tirage simultané de 3 boules.
  - × $A_{1,b}$ l'ensemble des tirages unicolores blanches possibles lors d'un tirage simultané de 3 boules.
- On remarque : $A_1 = A_{1,r} \sqcup A_{1,b}$. Comme cette union est disjointe :

$$\mathrm{Card}(A_1) \ = \ \mathrm{Card}(A_{1,r}) + \mathrm{Card}(A_{1,b})$$

- Une partie à 3 éléments de $A_{1,r}$ est entièrement déterminé par :
  - × le numéro des boules rouges tirées : $\binom{4}{3}$ possibilités.

  Ainsi : $\mathrm{Card}(A_{1,r}) = \binom{4}{3}$.
- Une partie à 3 éléments de $A_{1,b}$ est entièrement déterminé par :
  - × le numéro des boules blanches tirées : $\binom{6}{3}$ possibilités.

  Ainsi : $\mathrm{Card}(A_{1,b}) = \binom{6}{3}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Card}(A_1) = \binom{4}{3} + \binom{6}{3}.}$$

- On note :
  - × A_2 l'ensemble des tirages bicolores possibles lors d'un tirage simultané de 3 boules.
  - × $A_{2,r}$ l'ensemble des tirages bicolores contenant 2 boules rouges et 1 boule blanche.
  - × $A_{2,b}$ l'ensemble des tirages bicolores contenant 2 boules blanches et 1 boule rouge.
- On remarque : $A_2 = A_{2,r} \sqcup A_{2,b}$. Comme cette union est disjointe :

$$\mathrm{Card}(A_2) \ = \ \mathrm{Card}(A_{2,r}) + \mathrm{Card}(A_{2,b})$$

- Une partie à 3 éléments de $A_{2,r}$ est entièrement déterminé par :
  × le numéro des boules rouges tirées : $\binom{4}{2}$ possibilités.
  × le numéro de la boule blanche tirée : $\binom{6}{1}$ possibilités.
  Ainsi : $\text{Card}(A_{2,r}) = 6 \binom{4}{2}$.
- Une partie à 3 éléments de $A_{2,b}$ est entièrement déterminé par :
  × le numéro des boules blanches tirées : $\binom{6}{2}$ possibilités.
  × le numéro de la boule rouge tirée : $\binom{4}{1}$ possibilités.
  Ainsi : $\text{Card}(A_{2,b}) = 4 \binom{6}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Card}(A_2) = 6 \binom{4}{2} + 4 \binom{6}{2}.}$$

□

b) (*) Mêmes questions si on tire 3 boules successivement avec remise.

Démonstration.

- On note :
  × B_1 l'ensemble des tirages unicolores possibles lors d'un tirage successif avec remise de 3 boules.
  × $B_{1,r}$ l'ensemble des tirages unicolores rouges possibles lors d'un tel tirage.
  × $B_{1,b}$ l'ensemble des tirages unicolores bleus possibles lors d'un tel tirage.
- On remarque : $B_1 = B_{1,r} \sqcup B_{1,b}$. Comme cette union est disjointe :

$$\text{Card}(B_1) \;=\; \text{Card}(B_{1,r}) + \text{Card}(B_{1,b})$$

- Un 3-uplet de $B_{1,r}$ est entièrement déterminé par :
  × le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule rouge tirée : 4 possibilités,
  × le numéro de la $2^{\text{ème}}$ boule rouge tirée : 4 possibilités,
  × le numéro de la $3^{\text{ème}}$ boule rouge tirée : 4 possibilités.
  Ainsi : $\text{Card}(B_{1,r}) = 4^3$.
- Un 3-uplet de $B_{1,b}$ est entièrement déterminé par :
  × le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule blanche tirée : 6 possibilités,
  × le numéro de la $2^{\text{ème}}$ boule blanche tirée : 6 possibilités,
  × le numéro de la $3^{\text{ème}}$ boule blanche tirée : 6 possibilités.
  Ainsi : $\text{Card}(B_{1,b}) = 6^3$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Card}(B_1) = 4^3 + 6^3.}$$

- On note :
  × B_2 l'ensemble des tirages unicolores possibles lors d'un tirage successif avec remise de 3 boules.
  × $B_{2,r}$ l'ensemble des tirages bicolores contenant 2 boules rouges et 1 boule blanche.
  × $B_{2,b}$ l'ensemble des tirages bicolores contenant 2 boules blanches et 1 boule rouge.
- On remarque : $B_2 = B_{2,r} \sqcup B_{2,b}$. Comme cette union est disjointe :

$$\text{Card}(B_2) \;=\; \text{Card}(B_{2,r}) + \text{Card}(B_{2,b})$$

- Un 3-uplet de $B_{2,r}$ est entièrement déterminé par :
  × le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule rouge tirée : 4 possibilités,
  × le numéro de la $2^{\text{ème}}$ boule rouge tirée : 4 possibilités,
  × le numéro de la boule blanche tirée : 6 possibilités,
  × la position de la boule blanche dans le tirage : 3 possibilités.
  Ainsi : $\text{Card}(B_{2,r}) = 3 \times 6 \times 4^2$.
- Un 3-uplet de $B_{2,b}$ est entièrement déterminé par :
  × le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule blanche tirée : 6 possibilités,
  × le numéro de la $2^{\text{ème}}$ boule blanche tirée : 6 possibilités,
  × le numéro de la boule rouge tirée : 4 possibilités,
  × la position de la boule rouge dans le tirage : 3 possibilités.
  Ainsi : $\text{Card}(B_{2,b}) = 3 \times 4 \times 6^2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Card}(B_2) = 18 \times 4^2 + 12 \times 6^2.}$$

□

c) (*) Mêmes questions si on tire 3 boules successivement sans remise.

Démonstration.

- On note :
  × C_1 l'ensemble des tirages unicolores possibles lors d'un tirage successif sans remise de 3 boules.
  × $C_{1,r}$ l'ensemble des tirages unicolores rouges possibles lors d'un tel tirage.
  × $C_{1,b}$ l'ensemble des tirages unicolores bleus possibles lors d'un tel tirage.
- On remarque : $C_1 = C_{1,r} \sqcup C_{1,b}$. Comme cette union est disjointe :

$$\text{Card}(C_1) \;=\; \text{Card}(C_{1,r}) + \text{Card}(C_{1,b})$$

- Un 3-uplet de $C_{1,r}$ est entièrement déterminé par :
  × le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule rouge tirée : 4 possibilités,
  × le numéro de la $2^{\text{ème}}$ boule rouge tirée : 3 possibilités,
  × le numéro de la $3^{\text{ème}}$ boule rouge tirée : 2 possibilités.
  Ainsi : $\text{Card}(C_{1,r}) = 4! = 24$.
- Un 3-uplet de $C_{1,b}$ est entièrement déterminé par :
  × le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule blanche tirée : 6 possibilités,
  × le numéro de la $2^{\text{ème}}$ boule blanche tirée : 5 possibilités,
  × le numéro de la $3^{\text{ème}}$ boule blanche tirée : 4 possibilités.
  Ainsi : $\text{Card}(C_{1,b}) = 6 \times 5 \times 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Card}(C_1) = 4! + \frac{6!}{3!} = 144.}$$

- On note :
  × C_2 l'ensemble des tirages unicolores possibles lors d'un tirage successif sans remise de 3 boules.
  × $C_{2,r}$ l'ensemble des tirages bicolores contenant 2 boules rouges et 1 boule blanche.
  × $C_{2,b}$ l'ensemble des tirages bicolores contenant 2 boules blanches et 1 boule rouge.
- On remarque : $C_2 = C_{2,r} \sqcup C_{2,b}$. Comme cette union est disjointe :

$$\text{Card}(C_2) \;=\; \text{Card}(C_{2,r}) + \text{Card}(C_{2,b})$$

- Un 3-uplet de $C_{2,r}$ est entièrement déterminé par :
  - × le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule rouge tirée : 4 possibilités,
  - × le numéro de la $2^{\text{ème}}$ boule rouge tirée : 3 possibilités,
  - × le numéro de la boule blanche tirée : 6 possibilités,
  - × la position de la boule blanche dans le tirage : 3 possibilités.

  Ainsi : $\text{Card}(C_{2,r}) = 4 \times 6 \times 3^2$.
- Un 3-uplet de $C_{2,b}$ est entièrement déterminé par :
  - × le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule blanche tirée : 6 possibilités,
  - × le numéro de la $2^{\text{ème}}$ boule blanche tirée : 5 possibilités,
  - × le numéro de la boule rouge tirée : 4 possibilités,
  - × la position de la boule rouge dans le tirage : 3 possibilités.

  Ainsi : $\text{Card}(B_{2,b}) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \dfrac{6!}{2!}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Card}(C_2) = 24 \times 3^2 + \frac{6!}{2!}.}$$ □

2. Soit $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'application f suivante est linéaire.

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & (X-a)\big(P'(X) + P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big) \end{array}$$

Démonstration.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^2$.

$$\begin{array}{cl} & f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) \\ = & (X-a)\big((\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) + (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(a)\big) - 2\big((\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) - (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(a)\big) \\ = & (X-a)\big((\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) + (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(a)\big) - 2\big((\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) - (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(a)\big) \\ & \textit{(par linéarité de la dérivée)} \\ = & (X-a)\big(\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X) + \lambda\ P'(a) + \mu\ Q'(a)\big) - 2\big(\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X) - \lambda\ P(a) + \mu\ Q(a)\big) \\ & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } X \textit{ et en } a\textit{)} \\ = & \lambda \cdot \Big((X-a)\big(P'(X) + P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big)\Big) + \mu \cdot \Big((X-a)\big(Q'(X) + Q'(a)\big) - 2\big(Q(X) - Q(a)\big)\Big) \\ = & \lambda \cdot f(P) + \mu \cdot f(Q) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'application } f \text{ est linéaire.}}$$ □

Exercice 2

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$.
Ainsi : $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. (*) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{array}{rcl} E & = & \left\{M\left(a,b\right) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ & = & \left\{\begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ & = & \left\{a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ & = & \left\{a\, I + b\, A \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(I, A\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

- Ici, E est un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Il y a tout lieu de penser que cet ensemble va pouvoir facilement s'écrire comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Cette méthode présente un double avantage. En effet, en plus de démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on obtient de plus que famille $\mathcal{F}_0 = (I, A)$ est génératrice de E. Ainsi :
  - × si $\mathcal{F}_0$ est une famille libre, c'est alors une base de E.
  - × si $\mathcal{F}_0$ est une famille liée, on peut extraire de $\mathcal{F}_0$ une base $\mathcal{G}$ de E. La famille $\mathcal{G}$ n'est autre que la famille $\mathcal{F}_0$ dans laquelle on a retiré tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}_0$.

□

Commentaire

- Si la rédaction précédente est celle attendue, il arrive parfois qu'on ne puisse pas l'utiliser (dans certains cas, l'ensemble étudié ne s'écrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie). Il est donc important de savoir utiliser la méthode consistant à revenir à la définition de sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $E \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

(ii) $E \neq \varnothing$. En effet : $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$.

(iii) Démontrons que E est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(U, V) \in E^2$.

- × Comme $U \in E$, il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U = M(a_1, b_1)$.
- × Comme $V \in E$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U = M(a_2, b_2)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
& \lambda \cdot U + \mu \cdot V \\
= \ & \lambda \cdot M(a_1, b_1) + \mu \cdot M(a_2, b_2) \\
= \ & \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 + 2b_1 & -b_1 & -2b_1 \\ 2b_1 & a_1 - b_1 & -4b_1 \\ -b_1 & b_1 & a_1 + 3b_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 + 2b_2 & -b_2 & -2b_2 \\ 2b_2 & a_2 - b_2 & -4b_2 \\ -b_2 & b_2 & a_2 + 3b_2 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 + 2\lambda\, b_1 & -\lambda\, b_1 & -2\lambda\, b_1 \\ 2\lambda\, b_1 & \lambda\, a_1 - \lambda\, b_1 & -4\lambda\, b_1 \\ -\lambda\, b_1 & \lambda\, b_1 & \lambda\, a_1 + 3\lambda\, b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu\, a_2 + 2\mu\, b_2 & -\mu\, b_2 & -2\mu\, b_2 \\ 2\mu\, b_2 & \mu\, a_2 - \mu\, b_2 & -4\mu\, b_2 \\ -\mu\, b_2 & \mu\, b_2 & \mu\, a_2 + 3\mu\, b_2 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2) + 2\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & -(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & -2\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \\ 2\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2) - (\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & -4\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \\ -(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & (\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2) + 3\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où : $\lambda \cdot U + \mu \cdot V = M(\lambda\, a_1 + \mu\, a_2, \lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \in E$.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

4. Déterminer la dimension de E.

Démonstration.
La famille $\mathcal{F}_0 = (I, A)$ est :

- × génératrice de E (d'après la question précédente).
- × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, $\mathcal{F}_0$ est une base de E.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim(E) = \operatorname{Card}\left(\mathcal{F}_0\right) = 2.}$$

□

5. a) Montrer que l'ensemble $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel.

Démonstration.
Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \Longleftrightarrow & AX = X \\
& \Longleftrightarrow & (A - I)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ -\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & y & + & 2\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y + 2z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

On peut de nouveau faire la remarque de la question ***3***. Notons qu'en question ***5c*** on demande d'exhiber une base $\mathscr{B}_1$ de $E_1(A)$. On a donc tout intérêt, dès cette question, à privilégier la méthode qui fournit directement une famille génératrice de $E_1(A)$.

□

Commentaire

Comme on l'a déjà mentionné, il est aussi possible de rédiger en revenant à la définition de sous-espace vectoriel. Rappelons la rédaction associée.

(i) $E_1(A) \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

(ii) $E_1(A) \neq \varnothing$. En effet : $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in E_1(A)$ car : $A \times 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

(iii) Démontrons que $E_1(A)$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(X_1, X_2) \in \big(E_1(A)\big)^2$.

- Comme $X_1 \in E_1(A)$, $A\,X_1 = X_1$.
- Comme $X_2 \in E_1(A)$, $A\,X_2 = X_2$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} A\,(\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2) &= A\,(\lambda_1 \cdot X_1) + A\,(\lambda_2 \cdot X_2) \\ &= \lambda_1 \cdot A\,X_1 + \lambda_1 \cdot A\,X_2 \ = \ \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 \end{aligned}$$

D'où $\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 \in E_1(A)$.

$$\boxed{E_1(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

b) Montrer que la matrice $A - I$ n'est pas inversible.
En déduire que $E_1(A)$ est de dimension supérieure ou égale à 1.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le système $(A - I)\,X = 0$ admet une infinité de solution. Il n'est donc pas de Cramer.

$$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } A - I \text{ n'est pas inversible.}}$$

Commentaire

Il est aussi possible de raisonner directement sur la matrice $A - I$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - I$ est non inversible car elle possède deux colonnes colinéaires : $C_2 = -C_1$.

- Le système $(A - I)\,X = 0$ n'étant pas de Cramer, il admet une solution différente de $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
Ainsi, $E_1(A)$ contient un vecteur différent de $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
On en déduit : $E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \dim\big(E_1(A)\big) \neq 0 \text{ et donc : } \dim\big(E_1(A)\big) \geqslant 1.}$$

Commentaire

On se sert ici de la caractérisation suivante.

$$\boxed{\begin{aligned} M \text{ non inversible} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Le système } MX = 0 \text{ n'est pas de Cramer} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Le système } MX = 0 \text{ admet une solution différente de } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

□

c) Déterminer l'ensemble $E_1(A)$, puis donner une base $\mathscr{B}_1$ de $E_1(A)$.

Démonstration.
La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de $E_1(A)$ (car d'après la question ***5c*** : $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$).

× libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, $\mathscr{B}_1 = \mathcal{F}_1$ est une base de $E_1(A)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(E_1(A)\big) = \text{Card}\big(\mathcal{F}_1\big) = 2.}$$ □

6. On considère l'ensemble $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.
On admet que G est un espace vectoriel.

a) Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de $E_2(A)$.

Démonstration.
Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(A) & \iff & AX = 2X \\[6pt]
& \iff & (A - 2\,I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[6pt]
& \iff & \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[12pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 3\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ -\,x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[12pt]
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 3\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ & - & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[12pt]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[12pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[12pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & z \\ & & y & = & -2\,z \end{array} \right. \\[12pt]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & -\,z \\ & & y & = & -2\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = -2\,z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de $E_2(A)$.

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

Ainsi, $\mathscr{B}_2 = \mathcal{F}_2$ est une base de $E_2(A)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(E_2(A)\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{F}_2\big) = 1.}$$

□

b) (*) Démontrer : $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_1(A) \oplus E_2(A)$.

Démonstration.

- D'après les questions ***5c*** et ***6a*** :

$$\dim\big(E_1(A)\big) + \dim\big(E_2(A)\big) \;=\; \mathrm{Card}(\mathscr{B}_1) + \mathrm{Card}(\mathscr{B}_2) \;=\; 2+1 \;=\; 3 \;=\; \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$$

$$\boxed{\dim\big(E_1(A)\big) + \dim\big(E_2(A)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)}$$

- De plus : $E_1(A) \cap E_2(A) = \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$. Démontrons le.
  On procède par double inclusion.

(⊇) Les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Ainsi : $\{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \subset E_1(A) \cap E_2(A)$.

(⊆) Soit $X \in E_1(A) \cap E_2(A)$.

× Comme $X \in E_1(A)$, $A\,X = X$.

× Comme $X \in E_2(A)$, $A\,X = 2\,X$.

Donc : $X = 2\,X$. D'où : $X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
On en déduit : $E_1(A) \cap E_2(A) \subset \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } E_1(A) \cap E_2(A) = \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}.}$$

- On obtient :

× $\dim\big(E_1(A)\big) + \dim\big(E_2(A)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$,

× $E_1(A) \cap E_2(A) = \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_1(A) \oplus E_2(A).}$$

□

c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$, qui est la concaténation de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

Démonstration.

- On a directement :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Le vecteur } \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } (1,0,0) \text{ dans la base } \mathscr{B}.}$$

- Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique triplet $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Or : $\qquad (*) \qquad \iff \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 1\\ \alpha_1 & & & - & 2\,\alpha_3 & = & 1\\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \end{array}\right.$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 1\\ & - & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0\\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 1\\ & - & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0\\ & & & & \alpha_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & & = 3\\ & - & 2\,\alpha_2 & & = 2\\ & & & \alpha_3 & = 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & & & & = 5\\ & - & 2\,\alpha_2 & & = 2\\ & & & \alpha_3 & = 2 \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Le vecteur } \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } (5,-1,2) \text{ dans la base } \mathscr{B}.}$$

□

7. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

Démonstration.
On procède par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure). De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4\,L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

□

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
P^{-1}M(a,b)P &= P^{-1}\,(aI + bA)\,P \\
&= P^{-1}\,aI\,P + P^{-1}\,bA\,P \\
&= a\,P^{-1}P + b\,P^{-1}AP \\
&= a\,I + b\,D
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ est bien diagonale.}}$$

□

b) Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord la caractérisation de l'inversibilité de $M(a, b)$.

($\Rightarrow$) On suppose que $M(a, b)$ est inversible.
Alors, d'après la question ***8a*** :

$$D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$$

$$\boxed{D(a,b) \text{ est inversible comme produit de matrices inversibles.}}$$

($\Leftarrow$) On suppose que $D(a, b)$ est inversible.
Alors, d'après la question ***8a*** :

$$M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$$

$$\boxed{M(a,b) \text{ est inversible comme produit de matrices inversibles.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } M(a,b) \text{ est inversible} \Leftrightarrow D(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ est inversible.}}$$

- La matrice $D(a,b)$ est diagonale.
  Elle est donc inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

$$\boxed{\text{On en conclut : } M(a,b) \text{ est inversible} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+2b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{array} \right. .}$$

$\square$

c) Prouver que $\big(M(a,b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a,b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a,b)\big)^2 = I$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl}
\big(M(a,b)\big)^2 = I & \Leftrightarrow & \big(P\,D(a,b)\ P^{-1}\big)^2 = I \\
& \Leftrightarrow & \big(P\,D(a,b)\ P^{-1}\big)\big(P\,D(a,b)\ P^{-1}\big) = I \\
& \Leftrightarrow & P\,D(a,b)\ \big(P^{-1}P\big)\,D(a,b)\ P^{-1} = I \\
& \Leftrightarrow & P\,\big(D(a,b)\big)^2\ P^{-1} = I \\
& \Leftrightarrow & \big(D(a,b)\big)^2\ P^{-1} = P^{-1}\,I \\
& \Leftrightarrow & \big(D(a,b)\big)^2 = P^{-1}\,I\,P \\
& \Leftrightarrow & \big(D(a,b)\big)^2 = I
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \big(M(a,b)\big)^2 = I \Leftrightarrow \big(D(a,b)\big)^2 = I.}$$

- Or : $D(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$(D(a,b))^2 = I \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} (a+2b=1) \ \texttt{OU} \ (a+2b=-1) \\ (a+b=1) \ \texttt{OU} \ (a+b=-1) \end{array} \right.$$

  En distinguant les 4 cas possibles, on obtient les 4 systèmes d'équations suivants :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} a+2b=1 \\ a+b=1 \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{l} a+2b=1 \\ a+b=-1 \end{array} \right.$$

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{l} a+2b=-1 \\ a+b=1 \end{array} \right. \qquad (S_4) \left\{ \begin{array}{l} a+2b=-1 \\ a+b=-1 \end{array} \right.$$

- Or : $(S_1) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & 1 \\ a & + & b & = & 1 \end{array} \right.$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & 1 \\ & - & b & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1 \\ & - & b & = & 0 \end{array} \right.$$

Et : (S_2) $\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & 1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array}\right.$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & 1 \\ & - & b & = & -2 \end{array}\right.$

$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & -3 \\ & - & b & = & -2 \end{array}\right.$

Puis : (S_3) $\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right.$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ & - & b & = & 2 \end{array}\right.$

$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & 3 \\ & - & b & = & 2 \end{array}\right.$

Enfin : (S_4) $\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array}\right.$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ & - & b & = & 0 \end{array}\right.$

$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & -1 \\ & - & b & = & 0 \end{array}\right.$

Finalement :

$$\big(D(a,b)\big)^2 = I \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} (a,b) & = & (1,0) \\ (a,b) & = & (-3,2) \\ (a,b) & = & (3,-2) \\ (a,b) & = & (-1,0) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les matrices } M(a,b) \text{ vérifiant } (M(a,b))^2 = I \text{ sont donc} \\ M\,(1,0)\,,\ M\,(-3,2)\,,\ M\,(3,-2)\ \text{ et } M\,(-1,0).\end{array}}$$

Commentaire

- Pour ne pas avoir à résoudre 4 fois le même système (à changement du second membre près), on pouvait le résoudre avec un second membre quelconque. Plus précisément, on pouvait résoudre le système (S) suivant :

$$
\begin{aligned}
(S) \quad & \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2\,b & = & x & & \\ a & + & b & = & & & y \end{array}\right. \\
& \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2\,b & = & x & & \\ & - & b & = & -x & + & y \end{array}\right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & & & = & -x & + & 2\,y \\ & - & b & = & -x & + & y \end{array}\right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & & & = & -x & + & 2\,y \\ & & b & = & x & - & y \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi la solution pour n'importe quel couple (x, y) choisi (par exemple, on consdérant $(x, y) = (1, 0)$ on obtient les solution de (S_1)).

- On pouvait aussi rapprocher les résolutions de (S_1) et (S_4) (et la résolution de (S_2) de celle de (S_3)). Si on considère $(\alpha, \beta) = (-a, -b)$ alors :

$$
\begin{aligned}
(S_4) \quad & \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} -\,a & - & 2\,b & = & 1 \\ -\,a & - & b & = & 1 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha & + & 2\,\beta & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & = & 1 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Ce dernier système a pour solution $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et ainsi (S_4) a pour solution $(a, b) = (-1, 0)$.

□

Exercice 3

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

9. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in\ ]0,+\infty[$.

$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$

  Alors, comme $x > 0$:

$$f'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \geqslant 1$$

  On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$$

  - Enfin, soit $x \in\ ]0,+\infty[$:

$$f(x) \ = \ x - \ln(x) \ = \ x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

    De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

$\square$

10. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0, 1[$ (car dérivable sur $]0, 1[$),
  - × strictement décroissante sur $]0, 1[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]0, 1[$ dans $f(]0, 1[)$.

$$f(]0, 1[) \;=\; \left] \lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x \to 0} f(x) \right[=]1, +\infty[$$

  Or $2 \in]1, +\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0, 1[$, notée a.
- La fonction f est :
  - × continue sur $]1, +\infty[$ (car dérivable sur $]1, +\infty[$),
  - × strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $f(]1, +\infty[)$.

$$f(]1, +\infty[) \;=\; \left] \lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[=]1, +\infty[$$

  Or $2 \in]1, +\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$, notée b.
- Enfin : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1 \neq 2$. Ainsi 1 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 2$.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0, +\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$).

□

11. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$,
  - × $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
    De plus, $\ln(2) \leqslant 0,8$, donc : $2 - \ln(2) \geqslant 1,2$ et ainsi : $f(4) = 2(2 - \ln(2)) \geqslant 2,4 \geqslant 2$.
  - × $f(b) = 2$.

  On a donc : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$.

- Notons g la réciproque de f sur $]1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $g :]1,+\infty[\to]1,+\infty[$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. En appliquant g de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} g\big(f(2)\big) & \leqslant & g\big(f(b)\big) & \leqslant & g\big(f(4)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 2 & \leqslant & b & \leqslant & 4 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } b \in [2,4].}$$

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation. Un encadrement, tel que $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$, permettrait de résoudre ce problème. □

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

12. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b,+\infty[\end{array}\right.$

- **Initialisation** :
  $u_0 = 4$. Or, d'après la question ***11***, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b,+\infty[$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b,+\infty[\end{array}\right.$)

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b,+\infty[$.
  - Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
    Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.
  - Comme

$$\begin{array}{lccc} \text{Comme} & u_n & \geqslant & b \\ \text{alors} & \ln(u_n) & \geqslant & \ln(b) \quad \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[) \\ \text{et} & \ln(u_n)+2 & \geqslant & \ln(b)+2 \\ & \shortparallel & & \\ & u_{n+1} & & \end{array}$$

    Enfin, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$. Ainsi : $\ln(b) = b - 2$.
    On obtient alors :

$$u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[.}$$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes.
  Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre en réalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathscr{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

□

13. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \ = \ \ln(u_n) + 2 - u_n \ = \ 2 - (u_n - \ln(u_n)) \ = \ f(b) - f(u_n)$$

  Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
  De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
  D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

  $\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\ \ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
  Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$).

Tout d'abord	u_{n+1}	$\leqslant$	u_n	*(par hypothèse de récurrence)*
donc	$\ln(u_{n+1})$	$\leqslant$	$\ln(u_n)$	*(par croissance de la fonction* $\ln$ *sur* $]0, +\infty[$*)*
et	$\ln(u_{n+1}) + 2$	$\leqslant$	$\ln(u_n) + 2$	
	$\parallel$		$\parallel$	
	u_{n+2}		u_{n+1}	

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  × décroissante,
  × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$).

  $\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge. On note } \ell \text{ sa limite.}}$

- Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant b$.
  Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.
- Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
  Donc, par continuité de $\ln$ sur $]0, +\infty[$: $\ell = \ln(\ell) + 2$. Or :

  $$\ell = \ln(\ell) + 2 \ \Leftrightarrow\ \ell - \ln(\ell) = 2 \ \Leftrightarrow\ f(\ell) = 2$$

  Or, d'après la question ***2.***, b est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$.

  $$\boxed{\text{Donc } \ell = b.}$$

□

14. a) Montrer : $\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

Démonstration.
On note h la fonction définie par $h : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction h est dérivable sur $[b, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b, +\infty[$.
  Soit $x \in [b, +\infty[$. Alors $h'(x) = \dfrac{1}{x} \geqslant 0$. Ainsi : $\forall x \in [b, +\infty[,\ |h'(x)| = h(x) = \dfrac{1}{x}$.
  Or, d'après la question ***11***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b, +\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi :

  $$\forall x \in [b, +\infty[,\ h'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

- On sait alors :
  × h est dérivable sur $[b, +\infty[$,
  × $\forall x \in [b, +\infty[,\ |h'(x)| = h'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

  $$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2,\ \left|\ h(y) - h(x)\ \right| \leqslant \frac{1}{2}\ |y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$, on obtient :

  $$h(u_n) - h(b) \ = \ \left|\ h(u_n) - h(b)\ \right| \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - b| \ = \ \frac{1}{2}\ (u_n - b)$$

  Or :
  × $h(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
  × $h(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

□

b) En déduire : $\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***12*** : $u_n \geqslant b$.

  $$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\ :\ u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

  ▸ **Initialisation** :
  D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.
  D'autre part : $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$.
  Ainsi :
  $$\begin{aligned} u_0 - b &= 4 - b \\ &\leqslant 4 - 2 && \textit{(car } b \geqslant 2 \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{11}}\textit{)} \\ &= 2 = \frac{1}{2^{0-1}} \end{aligned}$$
  D'où $\mathscr{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2^n}$).
  D'après la question précédente : $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :
  $$u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b) \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

□

15. a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n) :` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n. On admettra que la bibliothèque `numpy` est déjà chargée.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```python
def suite(n) :
    u = 4
    for i in range(n) :
        u = np.log(u) + 2
    return u
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  L'énoncé commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `suite`,
  × elle prend en paramètre d'entrée l'entier `n`,
  × elle renvoie la valeur stockée dans la variable `u`.

```python
def suite(n) :
```

```python
    return u
```

La variable u, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 4 : la valeur de u_0.

```
2        u = 4
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à calculer les valeurs successives de la suite (u_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
3        for i in range(n) :
4            u = np.log(u) + 2
```

On tire ici partie de la définition récursive (d'ordre 1) de cette suite. La nouvelle valeur de la suite, que l'on stockera dans la variable u, est obtenue à l'aide de la valeur précédente qui est celle alors stockée dans u.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable u contient la quantité $u_{\mathtt{n}}$ où n est le paramètre entré lors de l'appel de la fonction.

Commentaire

- Le programme **Python** consiste à mettre à jour successivement la variable u jusqu'à obtention de la valeur que l'on souhaite calculer. L'idée est la suivante.
  Si avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle (avec $\mathtt{i} \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$) :

  $$\text{la variable u contient la valeur } u_{i-1}$$

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  $$\text{la variable u contient la valeur } u_i$$

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable u contient $u_{\mathtt{n}}$. □

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel epsilon strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à epsilon près.

```
1  def valeur_approchee(epsilon) :
2      n = 0
3      while ............ :
4          n = n + 1
5      return suite(n)
```

Démonstration.

- D'après la question ***14b*** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :

$$0 \leqslant u_N - b \leqslant \varepsilon$$

Donc u_N est une valeur approchée de b à ε près.

- On complète alors le programme **Python** de la façon suivante :

```
3      while 1 / 2**(n-1) > epsilon
```

On propose le programme suivant :

```
1  def valeur_approchee(epsilon) :
2      n = 0
3      while 1 / 2**(n-1) > epsilon :
4          n = n + 1
5      return suite(n)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
  Commençons par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `valeur_approchee`,
  × elle prend comme paramètre d'entrée le réel `epsilon`,
  × elle renvoie le résultat de la commande `suite(n)`.

```
1  def valeur_approchee(epsilon)
```

```
5      return suite(n)
```

  On initialise ensuite la variable `n` à 0.

```
2  n = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à déterminer un entier n tel que : $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$. Pour ce faire, on se sert de la condition suffisante exposée ci-dessus à savoir : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$ (si cette condition est vérifiée alors il en est de même de la précédente).
  Le programme consiste donc à incrémenter la variable `n` de 1 jusqu'à ce que : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable `n` de 1 tant que : $\frac{1}{2^{n-1}} > \varepsilon$.
  Pour cela on met en place une boucle while :

```
3      while 1 / 2**(n-1) > epsilon :
```

  Puis on met à jour la variable `n`.

```
4          n = n + 1
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient un entier n tel que : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, ce qui assure : $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$. Il n'y a plus qu'à calculer $u_{\mathtt{n}}$ à l'aide de la fonction `suite` définie précédemment.

```
6      return suite(n)
```

□

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

16. (*)Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \;\; \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

Démonstration.

- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est l'inverse d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
  En effet, d'après le tableau de variations de f en question ***9*** : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \; f(x) \geqslant 1$.
  La fonction $\dfrac{1}{f}$ admet donc une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- On obtient alors, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:

$$\Phi(x) \;=\; \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \;=\; \left[\; G(t) \;\right]_x^{2x} \;=\; G(2x) - G(x)$$

  Or la fonction $x \mapsto G(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $G \circ h$ où :
  × $h : x \mapsto 2x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
    - telle que : $h(]0, +\infty[) \subset \,]0, +\infty[$.

  × G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ (donc dérivable sur }]0, +\infty[) \\ \text{en tant que différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.\end{array}}$$

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 2\,G'(2x) - G'(x) \\
&= 2\,\frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \\
&= \frac{2(\cancel{x} - \ln(x)) - (\cancel{2x} - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\
&= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \,]0, +\infty[, \;\; \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.}$$

□

17. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a :

$$\Phi'(x) \;=\; \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))} \;=\; \frac{\ln(2)-\ln(x)}{f(x)\,f(2x)}$$

Or, d'après la question ***9*** : $f(x) \geqslant 0$ et $f(2x) \geqslant 0$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(2)-\ln(x) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(2) \geqslant \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \geqslant x \end{aligned}$$

(car la fonction $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$*)*

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

□

18. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

Démonstration.
Soit $x \in]0,+\infty[$.

- Tout d'abord, d'après la question ***9*** : $\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) \geqslant 1 > 0$.

  On en déduit : $\forall t \in]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{f(t)} > 0$.

  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$, car $x > 0$) :

$$0 \;\leqslant\; \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt \;=\; \Phi(x)$$

- Ensuite, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, pour tout $t \in]0,+\infty[$:

$$f(t) \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{f(t)} \leqslant 1$$

  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$, car $x > 0$) :

$$\underset{\Phi(x)}{\underset{\parallel}{\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt}} \;\leqslant\; \int_x^{2x} 1\,dt \;=\; [\,t\,]_x^{2x} \;=\; 2x - x \;=\; x$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

Commentaire

Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.

Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$,

1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à-dire montrer :

$$\forall t \in [a, b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$

où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,

2) on utilise ensuite la croissance de l'intégrale (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :

$$m(b-a) = \int_a^b m\ dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b M\ dt = M(b-a)$$

□

19. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\forall x \in]0, +\infty[$, $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
Or $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.
Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \Phi \text{ est prolongeable par continuité et que ce prolongement, toujours noté } \Phi, \text{ vérifie } \Phi(0) = 0.}$$

□

b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.

Démonstration.
D'après la question ***16*** :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ \Phi'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$

Or, d'après la question ***9*** : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$, par composition, on a aussi : $\lim\limits_{x \to 0} f(2x) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to 0} \Phi'(x) = 0.}$$

□

c) (*) Démontrer que la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Que vaut $\Phi'(0)$?

Démonstration.

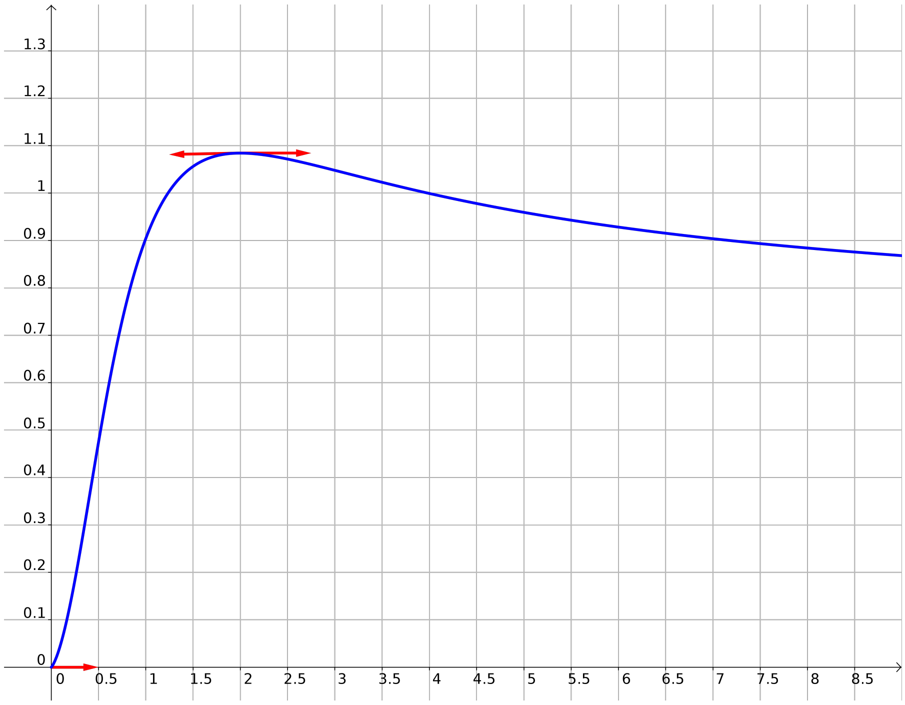
- La fonction Φ est continue sur $[0, +\infty[$, car elle est :
  - × continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $]0, +\infty[$, d'après ***16***,
  - × continue en 0, d'après ***19a***.
- La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, d'après ***16***,
- La fonction Φ' admet une limite en 0, d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Par théorème de la limite de la dérivée, la fonction } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[\text{ et : } \Phi'(0) = 0.}$$

□

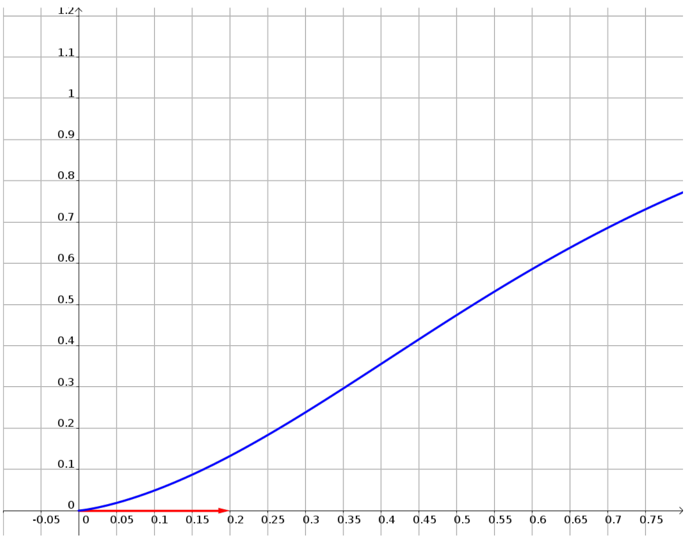
20. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Démonstration.



Commentaire

Sur le graphe précédent, la tangente à l'origine ne semble pas être correcte.
En effet, comme son étymologie (le verbe latin « tangere ») l'indique, une tangente doit **toucher** la courbe, ce qui ne paraît pas être le cas ici.
Cela est simplement dû à l'échelle de la figure. Si on zoome sur l'origine du repère, on obtient le graphe suivant :



Sur une copie, il faut bien évidemment accentuer les tangentes à la courbe. □

Exercice 4

Étudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire. Le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales :

	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale	37%	62%
Ouvriers	1%	10%

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociales.

(i) En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée (Profession libérale) et la plus défavorisée (Ouvriers).

(ii) Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on déduit que l'inégalité a diminué.

(iii) Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages *de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire*, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on déduit que l'inégalité a augmenté puisque le nombre de ceux qui n'ont pas accès à l'enseignement supérieur a proportionnellement plus diminué que celui de ceux qui y ont accès.

Comme on le voit chacune des façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la *concentration* d'une loi de probabilité pour contourner des paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins d'en être conscient.

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2) \leqslant \lambda\, f(t_1) + (1-\lambda)\, f(t_2)$.
On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.
On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, continues et convexes sur $[0, 1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0, 1]$ par $\tilde{f} : t \mapsto t - f(t)$.

On pose $I(f) = 2 \displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\, dt = 2 \int_0^1 (t - f(t))\, dt$. $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f.

21. ***a)*** Donnez une interprétation géométrique de la propriété de convexité.

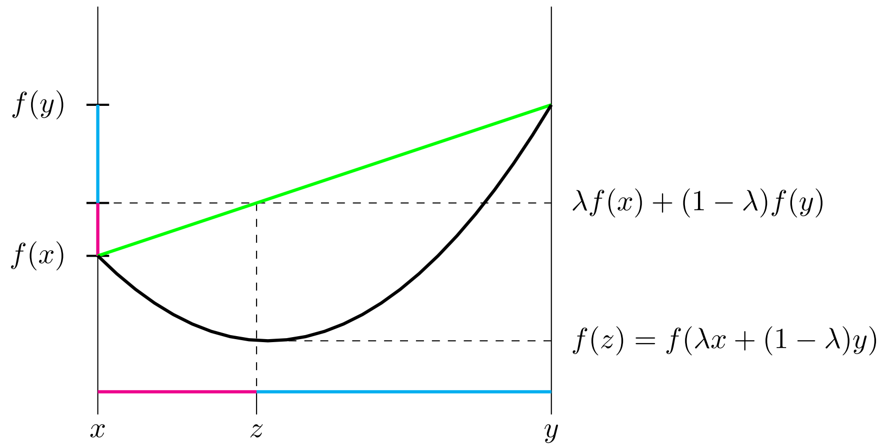
Démonstration.

Une fonction f est convexe si sa courbe représentative se situe en dessous de chacune de ses cordes.

Commentaire

Bien sûr, cette caractéristique est valide pour une orientation des axes usuelle.

On peut représenter graphiquement cette propriété grâce à la figure suivante :



Commentaire

Cette question est une question de cours. Il faut absolument répondre parfaitement pour mettre le correcteur en confiance.
On pouvait aussi utiliser la caractérisation de la convexité avec les tangentes : une fonction f est convexe si sa courbe représentative se situe au-dessus de chacune de ses tangentes.

☐

b) Lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0,1]$ à l'aide de la dérivée f'.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1] \text{, alors :} \\ f \text{ convexe sur } [0,1] \ \Leftrightarrow\ f' \text{ croissante sur } [0,1].\end{array}}$$

Commentaire

Attention à ne pas donner ici la caractérisation pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, alors :

$$f \text{ convexe sur } [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in [0,1],\ f''(x) \geqslant 0$$

L'énoncé insistait bien sur le fait que la fonction f était seulement de classe $\mathcal{C}^1$.
D'ailleurs, dans la suite, on ne travaillera qu'avec des fonctions seulement **continues** sur $[0,1]$.

☐

22. a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.

Démonstration.
Montrons que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$, c'est-à-dire que $-\tilde{f}$ est convexe sur $[0,1]$.
Soit $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{array}{rcll}
-\tilde{f}(\lambda\, t_1 + (1-\lambda) t_2) & = & f(\lambda\, t_1 + (1-\lambda) t_2) - (\lambda\, t_1 + (1-\lambda) t_2) & \\
& \leqslant & \lambda\, f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2) - \lambda\, t_1 - (1-\lambda) t_2 & \textit{(car } f \textit{ est convexe sur } [0,1]\textit{)} \\
& = & \lambda (f(t_1) - t_1) + (1-\lambda)(f(t_2) - t_2) & \\
& = & \lambda (-\tilde{f})(t_1) + (1-\lambda)(-\tilde{f}(t_2)) &
\end{array}$$

Donc la fonction $-\tilde{f}$ est convexe sur $[0,1]$.

$$\boxed{\text{La fonction } \tilde{f} \text{ est concave sur } [0,1].}$$

Commentaire

Attention encore une fois : la fonction f n'est pas supposée ici de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Il n'y a donc pas d'autre choix que d'utiliser la définition de la convexité. □

b) Montrer que $I(f) = 1 - 2 \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.

Démonstration.

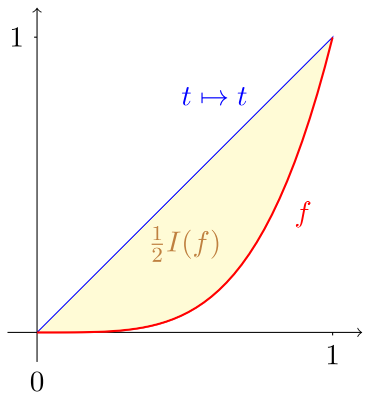
- La fonction $\tilde{f}$ est continue sur le SEGMENT $[0,1]$ car elle est la somme de fonctions continues sur $[0,1]$. L'intégrale $I(f)$ est donc bien définie.
- On calcule alors :

$$\begin{aligned}
I(f) &= 2 \int_0^1 t - f(t)\ dt \\
&= 2 \int_0^1 t\ dt - 2 \int_0^1 f(t)\ dt \\
&= 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 f(t)\ dt \\
&= 2 \times \frac{1}{2} - 2 \int_0^1 f(t)\ dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t)\ dt}$$ □

c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$ et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

Démonstration.
Dans l'ensemble du problème, on notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
La fonction $t \mapsto t$ est représentée graphiquement par la corde de $\mathcal{C}_f$ sur $[0,1]$.



On sait que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t\ dt$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ mesurent respectivement l'aire sous la courbe de $t \mapsto t$ et l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } I(f) \text{ mesure le double de l'aire entre } \mathcal{C}_f \text{ et sa corde sur } [0,1].}$$ □

23. **Un premier exemple**.
On note $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction $f : t \mapsto t^2$.

a) Montrer que f est un élément de E.

Démonstration.

- La fonction f est bien définie sur $[0,1]$.
- De plus : $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(1) = 1^2 = 1$.
- La fonction f est croissante sur $[0,1]$, donc :

$$\forall t \in [0,1],\ f(0) \leqslant f(t) \leqslant f(1)$$

  On obtient : $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$.
  La fonction f est donc à valeurs dans $[0,1]$.
- La fonction f est bien continue sur $[0,1]$ (en tant que fonction polynomiale).
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1],\ f''(t) = 2 \geqslant 0$$

  Elle est donc convexe.

$$\boxed{\text{Finalement : } f \in E.}$$

□

b) Calculer $I(f)$.

Démonstration.
D'après la question ***22b*** :

$$I(f) \ = \ 1 - 2 \int_0^1 t^2 \ dt \ = \ 1 - 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \ = \ 1 - \frac{2}{3} \ = \ \frac{1}{3}$$

$$\boxed{I(f) = \frac{1}{3}}$$

Commentaire

Ces questions ***23a*** et ***23b*** testent la compréhension des notions et notations introduites par l'énoncé.
Ce sont souvent des questions simples qu'il faut repérer et rédiger soigneusement.

□

24. **Propriétés de l'indice de Gini.**

a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geqslant 0$.

Démonstration.

- La fonction f est convexe sur $[0,1]$.
  Sa courbe représentative est donc située en-dessous de sa corde sur $[0,1]$.
- Or, la corde sur $[0,1]$ de $\mathcal{C}_f$ est le segment reliant les points $\big(0, f(0)\big)$ et $\big(1, f(1)\big)$.
  Donc, comme $f \in E$, c'est le segment reliant les points $(0,0)$ et $(1,1)$.
  La corde de $\mathcal{C}_f$ sur $[0,1]$ est la représentation de la fonction $t \mapsto t$ sur le segment $[0,1]$.

- On obtient alors :
$$\forall t \in [0,1],\ f(t) \leqslant t \quad \text{donc} \quad f(t) - t \leqslant 0$$
Ainsi : $\tilde{f}(t) = t - f(t) \geqslant 0$.
- Par croissance de l'intégrale, les bornes sont dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :
$$\int_0^1 (f(t) - t)\ dt \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{D'où : } I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt \geqslant 0.}$$

Commentaire

Le sujet adopte une approche géométrique de la convexité dès le début. On privilégiera donc des réponses de ce type.
On pouvait néanmoins aussi résoudre cette question de la manière suivante.
Soit $t \in [0,1]$.
- On applique l'inégalité de convexité de l'énoncé avec :
$$t_1 = 1, \quad t_2 = 0, \quad \lambda = t$$
On obtient alors :
$$f(t \times 1 + (1-t) \times 0) \ \leqslant\ t\, f(1) + (1-t) f(0)$$
Or : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
D'où : $f(t) \leqslant t$. Donc : $\tilde{f}(t) = t - f(t) \geqslant 0$.
- On conclut alors de la même manière que précédemment en utilisant la croissance de l'intégrale.

$\square$

b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration.
- Tout d'abord :
$$I(f) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 0 \ \Leftrightarrow\ \int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 0$$
- De plus, la fonction $\tilde{f}$ est :
  - × continue sur $[0,1]$, car elle est la somme de fonctions continues sur $[0,1]$;
  - × positive sur $[0,1]$, d'après la question précédente.

  Ainsi :
$$\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ f(t) = t$$

$$\boxed{I(f) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t) = t}$$

$\square$

c) Montrer que pour tout f élément de E, $I(f) < 1$.

Démonstration.
Soit $f \in E$.

- D'après la question ***22b*** :

$$I(f) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\int_0^1 f(t)\ dt > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(t)\ dt > 0$$

- Comme f est à valeurs positives (elle est à valeurs dans $[0,1]$), on a déjà, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(t)\ dt \ \geqslant\ 0$$

- Démontrons : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \neq 0$.

  On procède par l'absurde. Supposons : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = 0$.
  La fonction f est :
  × continue sur $[0,1]$,
  × positive sur $[0,1]$,
  × d'intégrale nulle sur $[0,1]$.
  Ainsi :

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = 0$$

  Cette dernière assertion est fausse car $f(1) = 1$.
  Donc : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \neq 0$. D'où : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt > 0$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall f \in E,\ I(f) < 1.}$$

□

d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

(i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par montrer : $f_n \in E$.

- La fonction f_n est bien définie sur $[0,1]$.
- De plus, comme $n > 0$: $f_n(0) = 0^n = 0$ et $f_n(1) = 1^n = 1$.
- La fonction f_n est croissante sur $[0,1]$, donc :

$$\forall t \in [0,1],\ f_n(0) \leqslant f_n(t) \leqslant f_n(1)$$

  On obtient : $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1$.
  Donc la fonction f_n est à valeurs dans $[0,1]$.
- La fonction f_n est bien continue sur $[0,1]$.
- Elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1],\ f_n''(t) = n(n-1) \geqslant 0$$

  Donc f_n est convexe.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_n \in E.}$$

D'après la question ***22b*** :

$$I(f_n) \;=\; 1 - 2\int_0^1 t^n \, dt \;=\; 1 - 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \;=\; 1 - \frac{2}{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I(f_n) = 1 - \frac{2}{n+1}}$$

Commentaire

On remarque que l'on retrouve bien le résultat obtenu en question ***3.*** pour $n = 2$. □

(ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leqslant A < 1$, il existe f appartenant à E telle que $I(f) > A$.

Démonstration.
Soit $A \in [0,1[$.

- D'après la question précédente : $I(f_n) = 1 - \dfrac{2}{n+1}$.
- On en déduit :

$$\begin{aligned} I(f_n) > A \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{n+1} > A \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{n+1} < 1 - A \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{2} > \frac{1}{1-A} && \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 > \frac{2}{1-A} \;\Leftrightarrow\; n > \frac{2}{1-A} - 1 \end{aligned}$$

On choisit alors $N = \left\lceil \dfrac{2}{1-A} - 1 \right\rceil$, et on obtient : $I(f_N) > A$.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } A \in [0,1[, \text{ il existe } f \in E \text{ tel que } I(f) > A.}$$

Commentaire

On pouvait aussi se servir de la définition de la limite d'une suite, comme détaillé ci-dessous.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} I(f_n) = 1$
- Donc, par définition de la limite d'une suite :

pour tout $A \in [0,1[$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $I(f_N) > A$.

□

25. Minoration de l'indice de Gini

a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0,1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t \in [0,1]} \tilde{f}(t)$.

Démonstration.
La fonction $\tilde{f}$ est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$.
Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle est majorée et son maximum est atteint pour un certain réel de $[0,1]$.
Il existe donc $a \in [0,1]$ tel que : $\tilde{f}(a) = \max\limits_{t \in [0,1]} \tilde{f}(t)$.

Trois cas se présentent alors.

- Si $a \in]0,1[$. Alors on note $t_0 = a$.
  Et on a effectivement montré qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que : $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t \in [0,1]} \tilde{f}(t)$.
- Si $a = 0$. Alors :
$$\tilde{f}(a) = \tilde{f}(0) = 0 - f(0) = 0$$
  × Comme a est un maximum de $\tilde{f}$ sur $[0,1]$, on obtient :
$$\forall t \in [0,1], \ \tilde{f}(t) \leqslant \tilde{f}(a) = 0$$
  × Or, d'après la question *24a* : $\forall t \in [0,1]$, $\tilde{f}(t) \geqslant 0$.
  On en déduit :
$$\forall t \in [0,1], \ \tilde{f}(t) = 0 \quad \textit{(donc } f(t) = t\textit{)}$$
  Le maximum de $\tilde{f}$ est donc 0 et il est atteint en chaque réel du segment $[0,1]$.
  On peut donc choisir n'importe quel réel de $]0,1[$ pour t_0.
  Par exemple, on note : $t_0 = \dfrac{1}{2} \in]0,1[$.
- Si $a = 1$. Alors, en raisonnant comme pour le cas $a = 0$, on obtient :
$$\forall t \in [0,1], \ \tilde{f}(t) = 0$$
  On note donc encore : $t_0 = \dfrac{1}{2} \in]0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe toujours } t_0 \in]0,1[\text{ tel que : } \tilde{f}(t_0) = \max_{t \in [0,1]} \tilde{f}(t).}$$

□

b) Montrer que pour tout t de $[0,t_0]$, $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\ \dfrac{t}{t_0}$.

Démonstration.

- La fonction $\tilde{f}$ est concave sur $[0,t_0]$.
  Sa courbe représentative est donc située au-dessus de sa corde sur $[0,t_0]$.
- Or la corde sur $[0,t_0]$ de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ est le segment reliant les points $\big(0,\tilde{f}(0)\big)$ et $\big(t_0,\tilde{f}(t_0)\big)$.
  C'est donc le segment reliant $(0,0)$ et $(t_0,\tilde{f}(t_0))$.
  Montrons que $y = \tilde{f}(t_0)\ \dfrac{t}{t_0}$ est l'équation de la droite (D) passant par ces deux points.
  × La fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0)\ \dfrac{t}{t_0}$ est bien une fonction affine.
  × Ensuite : $\tilde{f}(t_0) \times \dfrac{0}{t_0} = 0$.
  La droite (D) passe donc bien par le point $(0,0)$.
  × Enfin : $\tilde{f}(t_0) \times \dfrac{t_0}{t_0} = \tilde{f}(t_0)$.
  La droite (D) passe donc bien par le point $\big(t_0,\tilde{f}(t_0)\big)$.

  La corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[0,t_0]$ est donc la représentation de la fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0)\ \dfrac{t}{t_0}$ sur $[0,t_0]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [0,t_0],\ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\ \frac{t}{t_0}}$$

Commentaire

- Comme à la question *24a*, on pouvait appliquer l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec :

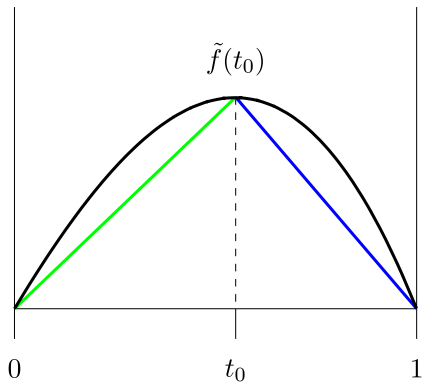
$$t_1 = t_0, \quad t_2 = 0, \quad \lambda = \frac{t}{t_0}$$

(on a bien $\lambda \in [0,1]$ car $t \in [0, t_0]$)
On obtient alors :

$$\tilde{f}\left(\frac{t}{\cancel{t_0}} \times \cancel{t_0} + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \times 0\right) \geqslant \frac{t}{t_0}\,\tilde{f}(t_0) + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\tilde{f}(0)$$

Or : $\tilde{f}(0) = 0$. D'où : $\tilde{f}(t) \geqslant \dfrac{t}{t_0}\,\tilde{f}(t_0)$.

- On peut représenter la situation graphiquement :



Le segment vert représente la corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[0, t_0]$ et le segment bleu représente la corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[t_0, 1]$.

□

c) Montrer que pour tout t de $[t_0, 1]$, $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\,\dfrac{t-1}{t_0-1}$.

Démonstration.

- La fonction $\tilde{f}$ est concave $[t_0, 1]$.
Sa courbe représentative est donc située au-dessus de sa corde sur $[t_0, 1]$.
- Or la corde sur $[t_0, 1]$ de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ est le segment reliant les points $\big(t_0, \tilde{f}(t_0)\big)$ et $\big(1, \tilde{f}(1)\big)$.
Donc, d'après la question *25a*, c'est le segment reliant $\big(t_0, \tilde{f}(t_0)\big)$ et $(1, 0)$.
Montrons que $y = \tilde{f}(t_0)\,\dfrac{t-1}{t_0-1}$ est l'équation de la droite (d) passant par ces deux points.
  × La fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0)\,\dfrac{t-1}{t_0-1}$ est bien une fonction affine.
  × Ensuite : $\tilde{f}(t_0)\,\dfrac{t_0-1}{t_0-1} = \tilde{f}(t_0)$.
  La droite (d) passe donc bien par le point $\big(t_0, \tilde{f}(t_0)\big)$.
  × Enfin : $\tilde{f}(t_0)\,\dfrac{1-1}{t_0-1} = 0$.
  La droite (d) passe donc bien par le point $(1, 0)$.

La corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[t_0, 1]$ est donc représentée par la fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [t_0, 1],\ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\,\frac{t-1}{t_0-1}}$$

Commentaire

Comme à la question *24a*, on pouvait aussi appliquer l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec :

$$t_1 = t_0, \quad t_2 = 1, \quad \lambda = \frac{t-1}{t_0-1}$$

(on a bien $\lambda \in [0,1]$ car $t \in [t_0, 1]$) □

d) En déduire que $I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0)$.

Démonstration.

- D'après la question *25b* :
$$\forall t \in [0, t_0], \quad \tilde{f}(t) \ \geqslant \ \tilde{f}(t_0)\ \frac{t}{t_0}$$
Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant t_0)$:
$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\ dt \ \geqslant \ \int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\ \frac{t}{t_0}\ dt$$
Or :
$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\ \frac{t}{t_0}\ dt \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0} \int_0^{t_0} t\ dt \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0} \left[\ \frac{t^2}{2}\ \right]_0^{t_0} \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{2\,t_0}(t_0^2 - 0^2) \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)\,t_0}{2}$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\ dt \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)\,t_0}{2}.}$$
- De même, d'après la question *25c* :
$$\forall t \in [t_0, 1], \quad \tilde{f}(t) \ \geqslant \ \tilde{f}(t_0)\ \frac{t-1}{t_0-1}$$
Donc, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(t_0 \leqslant 1)$:
$$\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)\ dt \ \geqslant \ \int_{t_0}^1 \tilde{f}(t_0)\ \frac{t-1}{t_0-1}\ dt$$
Or :
$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t_0)\ \frac{t-1}{t_0-1}\ dt \ &= \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1} \int_{t_0}^1 (t-1)\ dt \\
&= \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1} \left[\ \frac{t^2}{2} - t\ \right]_{t_0}^1 \\
&= \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1} \left(\frac{1^2}{2} - 1 - \left(\frac{t_0^2}{2} - t_0\right)\right) \\
&= \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{2(t_0-1)}\ (-t_0^2 + 2t_0 - 1) \\
&= \ -\frac{\tilde{f}(t_0)}{2(t_0-1)}\ (t_0^2 - 2t_0 + 1) \\
&= \ -\frac{\tilde{f}(t_0)}{2\cancel{(t_0-1)}}\ (t_0-1)^{\cancel{2}} \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)(1-t_0)}{2}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)\ dt \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)(1-t_0)}{2}.}$$

- Par relations de Chasles :

$$\begin{array}{rcl} I(f) & = & 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt \\ & = & 2\displaystyle\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\ dt + 2\displaystyle\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)\ dt \\ & \geqslant & \tilde{f}(t_0)\,t_0 + \tilde{f}(t_0)(1-t_0) \ = \ \tilde{f}(t_0) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0).}$$

□

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30% de la population possèdent 9% de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.