DS8

I. Problème 1 (inspiré de Centrale II MP/MPI 2024)

Notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriels des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d.
- On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Objectifs du problème
Sot h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x+1) - f(x) \ = \ h(x) \qquad (E_h)$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h).
La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.
La partie II définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h), ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.
La partie III étend la résolution de (E_h) au cas où h est une fonction entière.

I.1. Étude de l'opérateur de différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que Δ est linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$.

$$\begin{array}{rll} & \Delta(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) & \\ = & (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X+1) - (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) & \\ = & \lambda \cdot P(X+1) + \mu \cdot Q(X+1) - \lambda \cdot P(X) - \mu \cdot Q(X) & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } X+1 \textit{ et en } X\textit{)} \\ = & \lambda \cdot \big(P(X+1) - P(X)\big) + \mu \cdot \big(Q(X+1) - Q(X)\big) & \\ = & \lambda \cdot \Delta(P)(X) + \mu \cdot \Delta(Q)(X) & \\ = & \big(\lambda \cdot \Delta(P) + \mu \cdot \Delta(Q)\big)(X) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'application } \Delta \text{ est donc linéaire.}}$$

- Démontrons ensuite que Δ est à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$.
  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  $$\Delta(P)(X) \ = \ P(X+1) - P(X) \ \in \mathbb{K}[X]$$
  $$\boxed{\text{L'application } \Delta \text{ est à valeurs dans } \mathbb{K}[X].}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{K}[X].}$$

□

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

Démonstration.

- On note : $d = \deg(P)$.
  Alors il existe $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que :
  $$\left\{\begin{array}{lcl} a_d & \neq & 0 \\ P(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, X^k \end{array}\right.$$
- On obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\Delta(P) & = & P(X+1) - P(X) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k - \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, X^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{d} \left(a_k \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\ X^i \right) - \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, X^k & \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{d} \left(\sum\limits_{i=0}^{k} a_k \binom{k}{i}\ X^i \right) - \sum\limits_{i=0}^{d} a_i\, X^i & \textit{(car la variable } k \textit{ est muette)} \\
& = & \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant d} a_k \binom{k}{i}\ X^i - \sum\limits_{i=0}^{d} a_i\, X^i & \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{d} \left(\sum\limits_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i}\ X^i \right) - \sum\limits_{i=0}^{d} a_i\, X^i & \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{d} \left(\sum\limits_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i & \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{d-1} \left(\sum\limits_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i + \left(\sum\limits_{k=d}^{d} a_k \binom{k}{d} - a_d \right) X^d & \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{d-1} \left(\sum\limits_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i + \cancel{\left(a_d \binom{d}{d} - a_d \right) X^d} & \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{d-2} \left(\sum\limits_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i + \left(\sum\limits_{k=d-1}^{d} a_k \binom{k}{d-1} - a_{d-1} \right) X^{d-1} & \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{d-2} \left(\sum\limits_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i + \left(\cancel{a_{d-1} \binom{d-1}{d-1}} + a_d \binom{d}{d-1} - \cancel{a_{d-1}} \right) X^{d-1} & \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{d-2} \left(\sum\limits_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i + d\, a_d\, X^{d-1} &
\end{array}$$

- Ainsi, trois cas se présentent :
  - × si $\deg(P) = \infty$, alors : $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
    Ainsi, comme Δ est linéaire, d'après la question précédente : $\Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

$$\boxed{\text{Si } \deg(P) = -\infty, \text{ alors : } \deg\big(\Delta(P)\big) = -\infty.}$$

  - × si $\deg(P) = 0$, *i.e.* $d = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \sum_{i=0}^{-2} \left(\sum_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i + \cancel{0 \times a_d\, X^{d-1}} \\ &= \sum_{i \in \varnothing} \left(\sum_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i \\ &= 0_{\mathbb{K}[X]} \end{aligned}$$

(car $0_{\mathbb{K}[X]}$ est l'élément neutre pour la loi $+$)

$$\boxed{\text{Si } \deg(P) = 0, \text{ alors : } \deg\big(\Delta(P)\big) = -\infty.}$$

  - × si $\deg(P) \neq 0$, *i.e.* $d \neq 0$, alors :

$$\Delta(P) = \sum_{i=0}^{d-2} \left(\sum_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i + d\, a_d\, X^{d-1}$$

    Or, comme $a_d \neq 0$, alors : $d\, a_d \neq 0$. On en déduit :

$$\deg(\Delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1$$

$$\boxed{\text{Si } \deg(P) \neq 0, \text{ alors : } \deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1.}$$

□

3. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

Démonstration.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$.
Il s'agit de démontrer : $\forall P \in \mathbb{K}_d[X]$, $\Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$.
Soit $P \in \mathbb{K}_d[X]$. D'après la question précédente, deux cas se présentent.

- Si $\deg(P) \leqslant 0$, alors : $\deg\big(\Delta(P)\big) = -\infty$.
  Autrement dit : $\Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$. D'où : $\Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$.
- Si $\deg(P) \neq 0$, alors : $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$. Donc : $\Delta(P) \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
  Or : $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \mathbb{K}_d[X]$. D'où : $\Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$.

Finalement : $\forall P \in \mathbb{K}_d[X]$, $\Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } d \in \mathbb{N}^*, \Delta \text{ induit un endomorphisme sur } \mathbb{K}_d[X].}$$

□

On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta_d)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminons $\mathrm{Ker}(\Delta_d)$.
  Soit $P \in \mathbb{K}_d[X]$. Alors il existe $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \cdot P_k$ où $(P_0, \ldots, P_d)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_d[X]$.

$$\begin{array}{rcll} P \in \mathrm{Ker}(\Delta_d) & \Leftrightarrow & \Delta_d(P) = 0_{\mathbb{K}_d[X]} & \\ & \Leftrightarrow & \Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]} & \textit{(car } \Delta_d \textit{ est l'endomorphisme induit par } \Delta \textit{ sur } \mathbb{K}_d[X]\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \deg\big(\Delta(P)\big) = -\infty & \\ & \Leftrightarrow & \deg(P) \leqslant 0 & \textit{(d'après 2)} \\ & \Leftrightarrow & a_1 = a_2 = \cdots = a_d = 0 & \end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(\Delta_d) & = & \{\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \cdot P_k \mid a_1 = a_2 = \cdots = a_d\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(P_0) \ = \ \mathbb{K}_0[X] \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X].}$$

- Déterminons $\mathrm{Im}(\Delta_d)$.
  On sait que :
  × l'application Δ_d est linéaire (car Δ l'est),
  × l'espace vectoriel $\mathbb{K}_d[X]$ est de dimension finie.

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(\Delta_d) & = & \mathrm{Vect}\,(\Delta_d(P_0), \Delta_d(P_1), \ldots, \Delta_d(P_d)) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(\Delta(P_0), \Delta(P_1), \ldots, \Delta(P_d)) \end{array}$$

  De plus :
  × comme $\deg(P_0) = 0$, alors, d'après *2* : $\Delta(P_0) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
  × pour tout $k \in [\![1, d]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} \Delta(P_k) & = & P_k(X+1) - P_k(X) \\ & = & (X+1)^k - X^k \\ & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k \\ & = & \left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i + \cancel{X^k}\right) - \cancel{X^k} \\ & = & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \end{array}$$

On note alors : $Q_{k-1} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(\Delta_d) & = & \mathrm{Vect}\left(\cancel{0_{\mathbb{K}[X]}}, Q_0, \ldots, Q_{d-1}\right) \\ & = & \mathrm{Vect}\left(Q_0, \ldots, Q_{d-1}\right) \end{array}$$

La famille $\mathscr{B}' = (Q_0, \ldots, Q_{d-1})$ est ainsi une famille :
- génératrice de $\mathrm{Im}(\Delta_d)$ d'après ce qui précède,
- libre, car c'est une famille de polynômes non nuls qui est échelonnée en degré (par définition de Q_0, ..., Q_{d-1}).

C'est donc une base de $\mathrm{Im}(\Delta_d)$ Ainsi :

$$\dim\left(\mathrm{Im}(\Delta_d)\right) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}') = d$$

On en déduit :
- $\mathrm{Im}(\Delta_d) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
  En effet, $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ est un espace vectoriel et : $\forall k \in [\![0, d-1]\!]$, $Q_k \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
- $\dim\left(\mathrm{Im}(\Delta_d)\right) = \dim\left(\mathbb{K}_{d-1}[X]\right)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X].}$$

□

5. En déduire $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.

Démonstration.

- On commence par déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$. Pour cela, on raisonne comme en question précédente.
  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \cdot P_k$.

$$\begin{array}{rcll} P \in \mathrm{Ker}(\Delta) & \Leftrightarrow & \Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]} & \\ & \Leftrightarrow & \deg\left(\Delta(P)\right) = -\infty & \\ & \Leftrightarrow & \deg(P) \leqslant 0 & \textit{(d'après 2)} \\ & \Leftrightarrow & a_1 = a_2 = \cdots = a_d = 0 & \end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(\Delta) & = & \{a_0 \cdot P_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(P_0\right) = \mathbb{K}_0[X] \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X].}$$

- On détermine ensuite $\mathrm{Im}(\Delta)$. Plus précisément, on démontre : $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$.
  On procède par double inclusion.
  $(\subset)$ D'après la question *1*, l'application Δ est à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{K}[X]$$

($\supset$) Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Démontrons : $Q \in \mathrm{Im}(\Delta)$.

× Notons : $m = \deg(Q)$. Comme $Q \in \mathbb{K}_m[X]$, alors, d'après la question précédente (appliquée à $d = m+1$) : $Q \in \mathrm{Im}(\Delta_{m+1})$.
Il existe donc $P \in \mathbb{K}_{m+1}[X]$ tel que : $Q = \Delta_{m+1}(P)$.

× Comme Δ_{m+1} est l'endomorphisme induit de Δ sur $\mathbb{K}_{m+1}[X]$, alors : $Q = \Delta(P)$.
De plus, comme $\mathbb{K}_{m+1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$, alors : $P \in \mathbb{K}[X]$.

× Ainsi, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $Q = \Delta(P)$.
Autrement dit : $Q \in \mathrm{Im}(\Delta)$.

D'où : $\mathbb{K}[X] \subset \mathrm{Im}(\Delta)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X].}$$

Commentaire

- L'intuition derrière l'égalité : $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$, est la suivante. D'après la question 4, l'application Δ envoie, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des polynômes de degré au plus d, sur l'ensemble des polynômes de degré au plus $d-1$.
Avec les mains, cette application fait « perdre un degré ». On peut donc raisonnablement penser que cette application Δ envoie $\mathbb{K}[X]$ (ensemble des polynômes de n'importe quel degré) sur $\mathbb{K}[X]$.
- Plus rigoureusement, par définition d'endomorphisme induit :
$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Im}(\Delta_d) \;=\; \mathrm{Im}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]$$
Autrement dit, d'après la question précédente :
$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{K}_{d-1}[X] \;=\; \mathrm{Im}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}
\bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathbb{K}_{d-1}[X] &= \bigcup_{d=1}^{+\infty} \big(\mathrm{Im}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]\big) \\
&= \mathrm{Im}(\Delta) \cap \Big(\bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathbb{K}_d[X]\Big) && \textit{(par distributivité de } \cup \textit{ sur } \cap\textit{)} \\
&= \mathrm{Im}(\Delta) \cap \mathbb{K}[X] \\
&= \mathrm{Im}(\Delta) && \textit{(car : } \mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{K}[X]\textit{)}
\end{aligned}$$
Comme : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{K}_{d-1}[X] = \mathbb{K}[X]$, on en conclut : $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Im}(\Delta)$.
- Rappelons que, par définition d'endomorphisme induit, on a aussi, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathrm{Ker}(\Delta_d) \;=\; \mathrm{Ker}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]$$
Avec le même raisonnement que dans le point précédent, on obtient de nouveau :
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \displaystyle\bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathrm{Ker}(\Delta_d) & = & \displaystyle\bigcup_{d=1}^{+\infty} \big(\mathrm{Ker}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]\big) \\
 & & \shortparallel & & \shortparallel \\
\mathbb{K}_0[X] & = & \displaystyle\bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathbb{K}_0[X] & & \mathrm{Ker}(\Delta)
\end{array}$$

- Supposons que h est une fonction polynomiale. On note $\tilde{Q}$ son polynôme associé. Alors, pour toute fonction polynomiale f :

$$\begin{array}{rcll} (E_h) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{K},\ f(x+1) - f(x) = h(x) & \\ & \Leftrightarrow & P(X+1) - P(X) = \tilde{Q}(X) & \textit{(où } P \textit{ est le polynôme associé à } f\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \Delta(P) = \tilde{Q} & \end{array}$$

L'équation (E_h) admet donc une solution (polynomiale) si et seulement si le polynôme $\tilde{Q}$ admet un antécédent par l'application Δ.
Or, d'après ce qui précède : $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$. L'application Δ est donc surjective. Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ admet donc un antécédent par Δ, en particulier $\tilde{Q}$.

$$\boxed{\text{Dans le cas où } h \text{ est polynomiale, l'équation } (E_h) \text{ admet des solutions.}}$$

□

6. On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h).

Démonstration.

- Par définition de h, son polynôme Q_0 associé est ici : $\tilde{Q}(X) = X = P_1(X)$.
D'après la question ***5*** (et l'énoncé), on cherche un polynôme $\tilde{P} \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que : $\tilde{Q} = \Delta(\tilde{P})$.
- On sait de plus :
  × d'une part :

$$\Delta(P_1)(X) \;=\; P_1(X+1) - P(X) \;=\; \cancel{X} + 1 - \cancel{X} \;=\; 1 \;=\; P_0(X)$$

  × d'autre part :

$$\Delta(P_2)(X) \;=\; P_2(X+1) - P_2(X) \;=\; (X+1)^2 - X^2 \;=\; \cancel{X^2} + 2X + 1 - \cancel{X^2} \;=\; 2 \cdot P_1(X) + P_0(X)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rrcll} & \Delta(P_2) - \Delta(P_1) & = & 2 \cdot P_1 & \\ \text{donc} & \Delta(P_2) - \Delta(P_1) & = & 2 \cdot \tilde{Q} & \textit{(par définition de } \tilde{Q}\textit{)} \\ \text{donc} & \Delta(P_2 - P_1) & = & 2 \cdot \tilde{Q} & \textit{(par linéarité de } \Delta\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{2} \cdot \Delta(P_2 - P_1) & = & \tilde{Q} & \\ \text{ainsi} & \Delta\left(\dfrac{1}{2} \cdot (P_2 - P_1)\right) & = & \tilde{Q} & \textit{(par linéarité de } \Delta\textit{)} \end{array}$$

Le polynôme $\dfrac{1}{2} \cdot (P_2 - P_1)$ est donc un antécédent de $\tilde{Q}$ dans $\mathbb{K}_2[X]$.

$$\boxed{\text{Une solution de } (E_h) \text{ est donc la fonction } \tilde{f} : x \mapsto \frac{1}{2}\,(x^2 - x).}$$

- Déterminons maintenant toutes les solutions polynomiales de (E_h).
Soit f une fonction polynomiale. On note P son polynôme associé.

$$\begin{array}{rcll}
f \text{ solution de } (E_h) & \Leftrightarrow & \Delta(P) = \tilde{Q} & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& \Leftrightarrow & \Delta(P) = \Delta(\tilde{P}) & \textit{(d'après le point précédent)} \\
& \Leftrightarrow & \Delta(P) - \Delta(\tilde{P}) = 0_{\mathbb{K}[X]} & \\
& \Leftrightarrow & \Delta(P - \tilde{P}) = 0_{\mathbb{K}[X]} & \textit{(par linéarité de } \Delta\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & P - \tilde{P} \in \mathrm{Ker}(\Delta) & \\
& \Leftrightarrow & P - \tilde{P} \in \mathbb{K}_0[X] & \textit{(d'après 5)} \\
& \Leftrightarrow & \exists R \in \mathbb{K}_0[X],\ P - \tilde{P} = R & \\
& \Leftrightarrow & \exists R \in \mathbb{K}_0[X],\ P = \tilde{P} + R & \\
& \Leftrightarrow & \exists c \in \mathbb{K},\ P(X) = \tilde{P}(X) + c & \\
& \Leftrightarrow & \exists c \in \mathbb{K},\ f(x) = \tilde{f}(x) + c &
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions polynomiales de } (E_h) \text{ est donc :} \\ \{x \mapsto \tilde{f}(x) + c \mid c \in \mathbb{K}\} \ = \ \{x \mapsto \frac{1}{2}\,(x^2 - x) + c \mid c \in \mathbb{K}\}\end{array}}$$

Commentaire

- Même si ce n'est pas dans l'esprit du sujet, on pouvait également déterminer directement l'ensemble des solutions polynomiales de (E_h) sans passer le découpage :
  - × recherche d'une solution particulière,
  - × obtention de l'ensemble des solutions.
- Tout d'abord, remarquons que l'on cherche les antécédents de $\tilde{Q}$ par Δ. Or $Q \in \mathbb{K}_1[X]$. Ainsi, d'après la question 4, ces antécédents appartiennent à $\mathbb{K}_2[X]$.
Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

$$\begin{array}{rcll}
\Delta(P) = \tilde{Q} & \Longleftrightarrow & \cancel{a_0 \cdot \Delta(P_0)} + a_1 \cdot \Delta(P_1) + a_2 \cdot \Delta(P_2) = P_1 & \textit{(par linéairité de } \Delta \textit{ et définition de } \tilde{Q}\textit{)} \\
& \Longleftrightarrow & a_1 \cdot P_0 + a_2 \cdot (2 \cdot P_1 + P_0) = P_1 & \\
& \Longleftrightarrow & (a_1 + a_2) \cdot P_0 + 2\,a_2 \cdot P_1 = P_1 & \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ & & 2\,a_2 & = & 1 \end{array}\right. & \textit{(car la famille } (P_0, P_1) \textit{ est libre)} \\
& \overset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,a_1 & & & = & -1 \\ & & 2\,a_2 & = & 1 \end{array}\right. &
\end{array}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $\Delta(P) = \tilde{Q}$ est :

$$\{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid a_1 = -\tfrac{1}{2} \text{ et } a_2 = \tfrac{1}{2}\} \ = \ \{a_0 \cdot P_0 - \tfrac{1}{2} \cdot P_1 + \tfrac{1}{2} \cdot P_2 \mid a_0 \in \mathbb{K}\}$$

On retrouve bien que l'ensemble des solutions polynomiales de (E_h) est :

$$\{x \mapsto a_0 - \tfrac{1}{2}\,x + \tfrac{1}{2}\,x^2 \mid a_0 \in \mathbb{K}\}$$

□

I.2. Polynômes de Bernoulli

On note ω l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0,1]$, par : $\omega(t) = \mathrm{e}^{2i\pi t}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) \ = \ n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\,\omega(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1\right) \left(\omega(t)\right)^{n-1}} \, dt$$

I.2.a) Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$I_p \ = \ \int_0^1 \frac{\left(\omega(t)\right)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1} \, dt$$

7. Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, cette intégrale est bien définie.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{Z}$.
La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\left(\omega(t)\right)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$ car elle est le quotient $g = \dfrac{g_1}{g_2}$ de :

× $g_1 : t \mapsto \left(\omega(t)\right)^{p+1}$ qui est continue sur $[0,1]$ car elle est le produit de fonctions continues sur $[0,1]$.

× $g_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{\omega(t)} - 1$ qui :
- est continue sur $[0,1]$, car elle est la composée de fonctions continues sur des intervalles adéquats,
- `NE S'ANNULE PAS` sur $[0,1]$.
  En effet, soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z - 1 = 0 \ &\Leftrightarrow \ \mathrm{e}^z = 1 \\ &\Leftrightarrow \ \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^{iy} = 1 \times \mathrm{e}^{i\,0} \\ &\Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{e}^x & = & 1 \\ y & \equiv & 0 \ [2\pi] \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & \equiv & 0 \ [2\pi] \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{Z}, \ z = 0 + 2ik\pi \end{aligned}$$

  En particulier, les complexes z vérifiant : $\mathrm{e}^z - 1 = 0$, sont des nombres complexes de module 2π.
  Or, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\left[\omega(t)\right| \ = \ \left|\mathrm{e}^{2i\pi t}\right| \ = \ 1$$

  Ainsi : $\forall t \in [0,1]$, $g_1(t) = \mathrm{e}^{\omega(t)} - 1 \neq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{Z}, \text{ l'intégrale } I_p \text{ est donc bien définie.}}$$

□

On admet :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 \ = \ 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \ I_p = 0 \end{array} \right.$$

I.2.b) Lien avec l'équation (E_h)

8. On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z) \;=\; n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\, I_{k-n}$$

Démontrer que B_n est un polynôme unitaire de degré n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de B_n :

$$B_n(X) \;=\; n! \sum_{k=0}^{n} \frac{I_{k-n}}{k!}\, X^k$$

- On remarque d'abord : $B_n \in \mathbb{K}_n[X]$.
- De plus, le coefficient de degré n de B_n est :

$$\cancel{n}! \times \frac{I_{n-n}}{\cancel{n}!} \;=\; I_0 \;=\; 1 \qquad \textit{(d'après le résultat admis par l'énoncé)}$$

  Ce coefficient est non nul. Ainsi : $\deg(B_n) = n$.
- Comme le coefficient de B_n vaut 1, ce polynôme est unitaire.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N},\ B_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n.}$$

□

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_n' = n\, B_{n-1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
B_n'(X) &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{I_{k-n}}{k!}\, k\, X^{k-1} \\
&= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{I_{k-n}}{k!}\, k\, X^{k-1} \\
&= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{I_{k-n}}{(k-1)!}\, X^{k-1} \\
&= n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k+1-n}}{k!}\, X^{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k-(n-1)}}{k!}\, X^{k} \\
&= n \times (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k-(n-1)}}{k!}\, X^{k} \\
&= n\, B_{n-1}(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = n \cdot B_{n-1}}$$

□

10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z+1) - B_n(z) \;=\; n\, z^{n-1}$$

On pourra utiliser sans démonstration l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{z\,\omega(t)}}{\big(\omega(t)\big)^{n-1}}\, dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
B_n(z+1) - B_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\,\omega(t)}}{(e^{\omega(t)}-1)\,\big(\omega(t)\big)^{n-1}}\, dt - n! \int_0^1 \frac{e^{z\,\omega(t)}}{(e^{\omega(t)}-1)\,\big(\omega(t)\big)^{n-1}}\, dt \\
&= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\,\omega(t)} - e^{z\,\omega(t)}}{(e^{\omega(t)}-1)\,\big(\omega(t)\big)^{n-1}}\, dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= n! \int_0^1 \frac{e^{z\,\omega(t)}\,\cancel{(e^{\omega(t)}-1)}}{\cancel{(e^{\omega(t)}-1)}\,\big(\omega(t)\big)^{n-1}}\, dt \\
&= n! \int_0^1 \frac{e^{z\,\omega(t)}}{\big(\omega(t)\big)^{n-1}}\, dt \\
&= n! \times \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \textit{(d'après l'indication de l'énoncé)} \\
&= n\; z^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ B_n(z+1) - B_n(z) = n\, z^{n-1}}$$

□

11. En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

Démonstration.
Supposons que h est une fonction polynomiale. Alors il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tels que :

$$h : z \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k\, z^k$$

- Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1}(z+1) - B_{k+1}(z) \;=\; (k+1)\, z^k$$

  Autrement dit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{k+1}\, B_{k+1}(z+1) - \frac{1}{k+1}\, B_{k+1}(z) \;=\; z^k$$

  D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_k}{k+1}\, B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1}\, B_{k+1}(z) \;=\; a_k\, z^k$$

- Ainsi, en sommant les égalités précédentes pour k variant de 0 à d, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{d} \left(\frac{a_k}{k+1}\, B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1}\, B_{k+1}(z) \right) \;=\; \sum_{k=0}^{d} a_k\, z^k \;=\; h(z)$$

- Or :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{d} \left(\frac{a_k}{k+1}\ B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1}\ B_{k+1}(z) \right) \\
= \ & \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1}\ B_{k+1}(z+1) - \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1}\ B_{k+1}(z) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= \ & \left(\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1}\ B_{k+1} \right)(z+1) - \left(\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1}\ B_{k+1} \right)(z) && \textit{(par linéarité de l'évaluation en } z+1 \textit{ et en } z\textit{)} \\
= \ & \tilde{g}(z+1) - \tilde{g}(z) && \textit{(en notant : } \tilde{g} = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1}\ B_{k+1}\textit{)}
\end{aligned}$$

On a donc trouvé une fonction $\tilde{g}$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \tilde{g}(z+1) - \tilde{g}(z) \ = \ h(z)$$

La fonction $\tilde{g}$ est donc une solution de (E_h) sur $\mathbb{C}$.

- Enfin, la fonction $\tilde{g}$ est bien polynomiale, car c'est une combinaison linéaire des fonctions B_1, ..., B_{d+1} qui sont polynomiales.

$$\boxed{\text{La fonction } \tilde{g} = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1}\ B_{k+1}, \text{ est une solution polynomiale de } (E_h) \text{ sur } \mathbb{C}.}$$

□

I.2.c) Unicité

12. Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} B_0 \ = \ 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ B_n' = n\, B_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\ dt = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- On commence par vérifier que la suite (B_n) est bien solution du système mentionné, que l'on note (S).
  - × D'après la question ***8***, le polynôme B_0 est un polynôme unitaire de degré 0. C'est donc un polynôme constant de coefficient dominant égal à 1. Autrement dit :

    $$B_0(X) \ = \ 1$$

  - × D'après la question ***9*** :

    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ B_n' = n\, B_{n-1}$$

  - × Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    La fonction B_n est continue (car polynomiale) sur le `SEGMENT` $[0,1]$.
    L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\ dt$ est donc bien définie.

De plus :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_n(t)\,dt &= \int_0^1 \frac{1}{n+1}\,B'_{n+1}(t)\,dt && \textit{(car, d'après le point précédent : } B'_{n+1} = (n+1)\,B_n\textit{)} \\
&= \frac{1}{n+1} \int_0^1 B'_{n+1}(t)\,dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{n+1}\, [\ B_{n+1}(t)\ ]_0^1 \\
&= \frac{1}{n+1}\, \big(B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)\big) \\
&= \frac{1}{n+1}\, \big(B_{n+1}(0+1) - B_{n+1}(0)\big) \\
&= \frac{1}{n+1} \times (n+1)\,0^n && \textit{(d'après } \mathbf{10}\textit{)} \\
&= 0 && \textit{(car } n > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (B_n) \text{ est bien solution du système } (S).}$$

- Démontrons que le système (S) admet une unique suite de polynômes solution.
  On procède par l'absurde.
  Supposons qu'il existe une suite de polynômes (C_n) telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} C_0(X) \ = \ 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ C'_n = n\,C_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 C_n(t)\,dt = 0 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ C_{n_0} \neq B_{n_0}$$

  Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : C_n = B_n$.

  - **Initialisation** :
    Les suite (B_n) et (C_n) satisfont le système (S). Ainsi :

$$B_0(X) \ = \ 1 \ = \ C_0(X)$$

    D'où : $\mathscr{P}(0)$.
  - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* : $C_{n+1} = B_{n+1}$).
    × On commence par remarquer :

$$\begin{aligned}
B'_{n+1} &= (n+1)\,B_n && \textit{(car la suite } (B_n) \textit{ satisfait } (S)\textit{)} \\
&= (n+1)\,C_n && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= C'_{n+1} && \textit{(car la suite } (C_n) \textit{ satisfait } (S)\textit{)}
\end{aligned}$$

    On en déduit qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{K}$ telle que :

$$C_{n+1} \ = \ B_{n+1} + \alpha$$

× La fonction $t \mapsto C_{n+1}(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$, car c'est une fonction polynomiale. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 C_{n+1}(t)\ dt$ est donc bien définie. De plus :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^1 C_{n+1}(t)\ dt & = & \displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t) + \alpha\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)\ dt + \alpha \int_0^1 1\ dt & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & 0 + \alpha\ [\ t\ ]_0^1 & \textit{(car la suite } (B_n) \textit{ satisfait } (S)\textit{)} \\ & = & \alpha & \end{array}$$

Or la suite (C_n) satisfait (S). Donc : $\displaystyle\int_0^1 C_{n+1}(t)\ dt = 0$. On en déduit : $\alpha = 0$. Autrement dit :

$$C_{n+1} \ = \ B_{n+1}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = B_n$. Absurde !

$$\boxed{\text{On en conclut que } (B_n) \text{ est l'unique suite de polynômes vérifiant } (S).}$$

□

13. On note $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n(X) = (-1)^n\, B_n(1-X)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $H_n = B_n$.

Démonstration.
D'après la question précédente, la suite (B_n) est l'unique suite de polynômes à satisfaire le système (S). Pour démontrer que les suites de polynômes (B_n) et (H_n) sont égales, il suffit donc de démontrer que la suite (H_n) satisfait également le système (S).

- Tout d'abord :

$$H_0(X) \ = \ (-1)^0\, B_0(1-X) \ = \ B_0(1-X) \ = \ 1$$

  En effet, d'après ***12*** B_0 est le polynôme constant égal à 1.

$$\boxed{H_0(X) = 1}$$

- Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} H_n'(X) & = & (-1)^n \times (-1)\, B_n'(1-X) & \\ & = & (-1)^{n+1}\, B_n'(1-X) & \\ & = & (-1)^{n+1} \times n\, B_{n-1}(1-X) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{12}}\textit{)} \\ & = & (-1)^2 \times n\,(-1)^{n-1}\, B_{n-1}(1-X) & \\ & = & n\, H_{n-1}(X) & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n' = n\, H_{n-1}}$$

- Enfin, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^1 H_n(t)\ dt & = & \displaystyle\int_0^1 (-1)^n\, B_n(1-t)\ dt & \\ & = & (-1)^n \displaystyle\int_1^0 B_n(u)\ (-du) & \textit{(avec le changement de variable } \boxed{u = 1-t}\textit{)} \\ & = & (-1)^n \displaystyle\int_0^1 B_n(u)\ du & \\ & = & 0(-1)^n \times 0 & \textit{(car la suite } (B_n) \textit{ satisfait } (S)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_0^1 H_n(t)\ dt = 0.}$$

$$\boxed{\text{La suite de polynômes } (H_n) \text{ satisfait } (S). \text{ Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ H_n = B_n.}$$

Commentaire

L'énoncé affirme directement que la suite (H_n) ainsi définie est une suite de polynômes. Il était rapide de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme car il est la composée $Q_n \circ R$ de :
- × $R(X) = 1 - X$ qui est un polynôme,
- × $Q_n(X) = (-1)^n\, B_n$ qui est un polynôme.

□

I.3. Solution entière de l'équation (E_h)

I.3.a) Une inégalité de contrôle

On se propose dans cette partie de montrer par l'absurde la propriété $\mathcal{P}$:

$$\exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ \big(|z| = (2n+1)\,\pi\ \Rightarrow\ |e^z - 1| \geqslant c\big)$$

On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse.

14. Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et d'une suite de complexes $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$e^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N},\ |z_p| = (2n_p+1)\,\pi$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note : $a_p = \mathrm{Re}\,(z_p)$ et $b_p = \mathrm{Im}\,(z_p)$.

Démonstration.

- On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse. Autrement dit, on a supposé :

$$\forall c > 0,\ \exists n_c \in \mathbb{N},\ \exists z_c \in \mathbb{C},\ \big(|z_c| = (2n_c+1)\,\pi\ \texttt{ ET }\ \texttt{NON}(|e^{z_c} - 1| \geqslant c)\big)$$

Ou encore :

$$\forall c > 0,\ \exists n_c \in \mathbb{N},\ \exists z_c \in \mathbb{C},\ \big(|z_c| = (2n_c+1)\,\pi\ \texttt{ ET }\ |e^{z_c} - 1| < c\big)$$

- Cette propriété étant valable pour tout $c > 0$, elle est en particulier valable, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour $c = \dfrac{1}{p}$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_p \in \mathbb{N}$ et il existe $z_p \in \mathbb{C}$ tel que :

$$|z_p| = (2n_p+1)\,\pi \quad \texttt{ET} \quad |e^{z_p} - 1| < \frac{1}{p}$$

- En particulier :

$$0 \leqslant |e^{z_p} - 1| < \frac{1}{p}$$

Or :

× d'une part : $\lim\limits_{p \to +\infty} 0 = 0$,

× d'autre part : $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{1}{p} = 0$.

Par théorème d'encadrement, on en déduit : $\lim\limits_{p \to +\infty} |e^{z_p} - 1| = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{p \to +\infty} e^{z_p} - 1 = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe donc bien une suite } (n_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ et d'une suite } (z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ telles que :} \\ e^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N},\ |z_p| = (2n_p + 1)\,\pi.\end{array}}$$

□

15. Démontrer : $a_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|z_p| - |b_p| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé :

$$a_p = \mathrm{Re}\,(z_p) \quad \text{et} \quad b_p = \mathrm{Im}\,(z_p)$$

Ainsi :

$$e^{z_p} = e^{a_p + i\,b_p} = e^{a_p}\ e^{i\,b_p}$$

On en déduit :

$$|e^{z_p}| = e^{a_p} \qquad \text{et} \qquad \arg(e^{z_p}) \equiv b_p\ [2\pi]$$

- D'après la question précédente : $e^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi :

$$e^{a_p} = |e^{z_p}| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} |1| = 1$$

Par continuité de la fonction ln en 1 :

$$\lim_{p\to+\infty} a_p = \ln(1) = 0$$

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} a_p = 0}$$

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $|i| = 1$, on remarque tout d'abord :

$$|i\,b_p| = |i|\,|b_p| = 1 \times |b_p| = |b_p|$$

D'où :

$$|z_p| - |b_p| = |z_p| - |i\,b_p|$$

De plus, par inégalité triangulaire :

$$\big||z_p| - |i\,b_p|\big| \leqslant |z_p - i\,b_p|$$

Or :

$$|z_p - i\,b_p| = |a_p + \cancel{i\,b_p} - \cancel{i\,b_p}| = |a_p|$$

On en déduit :

$$0 \leqslant \big||z_p| - |b_p|\big| \leqslant |a_p|$$

Or :

× d'une part : $\lim\limits_{p \to +\infty} 0 = 0$,

× d'autre part : $\lim\limits_{p \to +\infty} |a_p| = 0$, d'après le point précédent.

Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{p \to +\infty} \big||z_p| - |b_p|\big| = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim\limits_{p \to +\infty} |z_p| - |b_p| = 0.}$$

□

16. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$\varepsilon_p = \begin{cases} +1 & \text{si } b_p \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } b_p < 0 \end{cases}$$

En étudiant $\exp(z_p - i\,\varepsilon_p\,|z_p|)$ aboutir à une contradiction et conclure.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}$.

- D'une part, d'après *14* : $|z_p| = (2\,n_p + 1)\,\pi$. Ainsi :

$$\exp(z_p - i\,\varepsilon_p\,|z_p|) = \mathrm{e}^{z_p} \times \mathrm{e}^{-i\,\varepsilon_p\,|z_p|} = \mathrm{e}^{z_p} \times \mathrm{e}^{-i\,\varepsilon_p\,(2n_p+1)\,\pi}$$

Or, comme $2n_p + 1$ est un entier impair, on remarque : $\mathrm{e}^{-i\,\varepsilon_p\,(2n_p+1)\,\pi} = -1$. On en déduit :

$$\exp(z_p - i\,\varepsilon_p\,|z_p|) = -\mathrm{e}^{z_p} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} -1 \qquad \textit{(d'après 14)}$$

- D'autre part, soit $p \in \mathbb{N}$, on force l'apparition du terme $|z_p| - |b_p|$ pour exploiter la question précédente :

$$\begin{aligned} z_p - i\,\varepsilon_p\,|z_p| &= z_p - i\,\varepsilon_p\,\big(|z_p| - |b_p| + |b_p|\big) \\ &= z_p - i\,\varepsilon_p\,\big(|z_p| - |b_p|\big) - i\,\varepsilon_p\,|b_p| \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $b_p \geqslant 0$, alors : $\varepsilon_p = 1$. D'où :

$$\varepsilon_p\,|b_p| = 1 \times b_p = b_p$$

× si $b_p < 0$, alors : $\varepsilon_p = -1$. D'où :

$$\varepsilon_p\,|b_p| = (-1) \times (-b_p) = b_p$$

Finalement, dans tous les cas :

$$\begin{aligned} z_p - i\,\varepsilon_p\,|z_p| &= z_p - i\,\varepsilon_p\,\big(|z_p| - |b_p|\big) - i\,b_p \\ &= a_p + \cancel{i\,b_p} - i\,\varepsilon_p\,\big(|z_p| - |b_p|\big) - \cancel{i\,b_p} \\ &= a_p - i\,\varepsilon_p\,\big(|z_p| - |b_p|\big) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\exp\big(z_p - i\,\varepsilon_p\,|z_p|\big) = \exp\Big(a_p - i\,\varepsilon_p\,\big(|z_p| - |b_p|\big)\Big) = \mathrm{e}^{a_p} \times \mathrm{e}^{-i\,\varepsilon_p\,\big(|z_p| - |b_p|\big)}$$

Or, d'après ***15*** :

$$a_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad |z_p| - |b_p| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit, par continuité de exp en 0 :

$$\mathrm{e}^{a_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-i\,\varepsilon_p\,\left(|z_p|-|b_p|\right)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-i\,\varepsilon_p \times 0} = 1$$

Ainsi :

$$\exp\left(z_p - i\,\varepsilon_p\,|z_p|\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1 \neq -1$$

Absurde !

$$\boxed{\text{On en conclut que } \mathcal{P} \text{ est vraie.}}$$

□

I.3.b) Une solution à (E_h)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit maintenant :

$$\gamma_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (2n+1)\,\pi\,\mathrm{e}^{2i\pi t} \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on note :

$$Q_n(z) \;=\; n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\left(\gamma_n(t)\right)^{n-1}}\,dt$$

17. Montrer qu'il existe deux constantes $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\left|Q_n(z)\right| \;\leqslant\; a\,\mathrm{e}^{b\,n\,|z|}$$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \left|Q_n(z)\right| &= \left| n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\left(\gamma_n(t)\right)^{n-1}}\,dt \right| \\ &= |n!| \times \left| \frac{\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\left(\gamma_n(t)\right)^{n-1}}\,dt \right| \\ &\leqslant n! \int_0^1 \left| \frac{\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\left(\gamma_n(t)\right)^{n-1}} \right| dt \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

- Soit $t \in [0,1]$.

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\left(\gamma_n(t)\right)^{n-1}} \right| \;=\; \frac{\left|\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}\right|}{\left|\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right|\left|\gamma_n(t)\right|^{n-1}}$$

De plus :

× tout d'abord :

$$\left|\gamma_n(t)\right| \;=\; \left|(2n+1)\,\pi\,\mathrm{e}^{2i\pi t}\right| \;=\; \left|(2n+1)\,\pi\right|\left|\mathrm{e}^{2i\pi t}\right| \;=\; (2n+1)\,\pi \times 1 \;=\; (2n+1)\,\pi$$

Ainsi :

$$\left|\gamma_n(t)\right|^{n-1} \;=\; \big((2n+1)\,\pi\big)^{n-1} \;=\; (2n+1)^{n-1}\,\pi^{n-1}$$

× Ensuite, puisque la proposition $\mathcal{P}$ de la partie I.3.a) est vraie, alors il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall w \in \mathbb{C},\ \big(|w| = (2n+1)\,\pi \;\Rightarrow\; |\mathrm{e}^w - 1| \geqslant c\big) \qquad (*)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le point précédent :

$$\left|\gamma_n(t)\right| \;=\; (2n+1)\,\pi$$

Ainsi, en appliquant $(*)$ à $w = \gamma_n(t)$, on obtient :

$$\left|\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right| \;\geqslant\; c$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit :

$$\frac{1}{\left|\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right|} \;\leqslant\; \frac{1}{c}$$

× Enfin, on rappelle, pour tout $w \in \mathbb{C}$:

$$\left|\mathrm{e}^w\right| \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w)} \;\leqslant\; \mathrm{e}^{|w|}$$

Ainsi :

$$\left|\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}\right| \;\leqslant\; \mathrm{e}^{|z\,\gamma_n(t)|}$$

Or :

$$\mathrm{e}^{|z\,\gamma_n(t)|} \;=\; \mathrm{e}^{|z|\,|\gamma_n(t)|} \;=\; \mathrm{e}^{|z|\,(2n+1)\,\pi}$$

On en déduit :

$$\left|\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}\right| \;\leqslant\; \mathrm{e}^{(2n+1)\,\pi\,|z|}$$

Commentaire

Détaillons l'obtention de la propriété classique :

$$\forall w \in \mathbb{C},\quad \left|\mathrm{e}^w\right| \;\leqslant\; \mathrm{e}^{|w|}$$

Soit $w \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $w = a + ib$.

$$\left|\mathrm{e}^w\right| \;=\; \left|\mathrm{e}^{a+ib}\right| \;=\; \left|\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}\right| \;=\; \left|\mathrm{e}^a\right|\left|\mathrm{e}^{ib}\right| \;=\; \left|\mathrm{e}^a\right| \times 1 \;=\; \mathrm{e}^a \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w)}$$

De plus : $\mathrm{Re}\,(w) = a \leqslant\ |w|$. En effet :

$$a \;\leqslant\; \sqrt{a^2 + b^2}$$

Par croissance de exp sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w)} \;\leqslant\; \mathrm{e}^{|w|}$$

Ainsi : $\left|\mathrm{e}^w\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w)} \leqslant \mathrm{e}^{|w|}$.

Comme les termes en présence sont tous positifs, on en conclut :

$$\frac{\left|\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}\right|}{\left|\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1\right|\,\left|\gamma_n(t)\right|^{n-1}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{(2n+1)\,\pi\,|z|}}{c\,(2n+1)^{n-1}\,\pi^{n-1}}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\int_0^1 \frac{\left|\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}\right|}{\left|\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1\right|\,\left|\gamma_n(t)\right|^{n-1}}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{(2n+1)\,\pi\,|z|}}{c\,(2n+1)^{n-1}\,\pi^{n-1}}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{(2n+1)\,\pi\,|z|}}{c\,(2n+1)^{n-1}\,\pi^{n-1}}$$

- Comme $n! \geqslant 0$, on en déduit :

$$\left|Q_n(z)\right| \leqslant n!\,\frac{\mathrm{e}^{(2n+1)\,\pi\,|z|}}{c\,(2n+1)^{n-1}\,\pi^{n-1}}$$

- On finit la majoration pour faire apparaître des constantes a et b strictement positives qui conviennent.
  - × Tout d'abord, comme $n \geqslant 1$, alors :

$$\begin{array}{rrcll} & 2n+1 & \leqslant & 3n & \\ \text{donc} & (2n+1)\,\pi\,|z| & \leqslant & 3n\,\pi\,|z| & \textit{(car : } \pi\,|z| \geqslant 0\textit{)} \\ \text{d'où} & \mathrm{e}^{(2n+1)\,\pi\,|z|} & \leqslant & \mathrm{e}^{3\,\pi\,n\,|z|} & \textit{(par croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

  - × De plus :

$$\begin{array}{rrcll} & \pi & \geqslant & 1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{\pi} & \leqslant & 1 & \textit{(par décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{d'où} & \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{n-1} & \leqslant & 1^{n-1} & \textit{(par croissance de } x \mapsto x^{n-1} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{\pi^{n-1}} & \leqslant & 1 & \end{array}$$

  - × Par ailleurs :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=2}^{n} k \leqslant \prod_{k=2}^{n} n = n^{n-1}$$

    On en déduit, comme $(2n+1)^{n-1} > 0$:

$$\frac{n!}{(2n+1)^{n-1}} \leqslant \frac{n^{n-1}}{(2n+1)^{n-1}}$$

    Or :

$$\frac{n^{n-1}}{(2n+1)^{n-1}} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\times\frac{2n}{2n+1}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{n-1}$$

    On remarque alors :

$$\begin{array}{rrcll} & 1-\dfrac{1}{2n+1} & \leqslant & 1 & \\ \text{donc} & \left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^{n-1} & \leqslant & 1^{n-1} & \begin{array}{l}\textit{(par croissance de} \\ x \mapsto x^{n-1} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)}\end{array} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{2^n}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^{n-1} & \leqslant & \dfrac{1}{2^n} & \textit{(car } \dfrac{1}{2^n} \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

Par transitivité :

$$\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{n-1} \;\leqslant\; \frac{1}{2^n} \;\leqslant\; 1$$

On obtient finalement la majoration suivante :

$$\left|Q_n(z)\right| \;\leqslant\; \frac{n!}{(2n+1)^{n-1}} \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{\pi^{n-1}} \times \mathrm{e}^{(2n+1)\,\pi\,|z|} \;\leqslant\; 1 \times \frac{1}{c} \times 1 \times \mathrm{e}^{3\pi\,n\,|z|}$$

On note alors :

$$a \;=\; \frac{1}{c} \quad \text{et} \quad b \;=\; 3\pi$$

Comme $c > 0$, on a bien :

$$\begin{cases} a \;>\; 0 \\ b \;>\; 0 \\ \left|Q_n(z)\right| \;\leqslant\; a\,\mathrm{e}^{b\,n\,|z|} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Il existe donc } a>0 \text{ et } b>0 \text{ tels que : } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall z\in\mathbb{C},\ \left|Q_n(z)\right| \;\leqslant\; a\,\mathrm{e}^{b\,n\,|z|}}$$

□

On pourrait alors démontrer que la fonction f suivante est solution de (E_h) :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\,\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\,Q_{n+1}(x) \end{array}$$

II. Problème II (inspiré de Centrale I MP/MPI 2024)

Pour toute suite de réels $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, si la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, on notera $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} d_k$ sa limite.

On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors la suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} a_k$$

Le problème est constitué de deux parties largement indépendantes. La première partie commence en démontrant un analogue de cette inégalité : l'inégalité de Knopp. La deuxième partie étudie l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

II.1. Inégalité de Knopp

Dans cette partie, on démontre l'inégalité de Knopp, souvent présentée comme analogue continu de l'inégalité de Carlement (on justifie cette appellation en fin de partie).

II.1.a) Inégalité de Jensen et inégalité intégrale de Jensen

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$.

18. *Inégalité de Jensen*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs dans un intervalle J. Soit φ un fonction convexe sur J. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \in [a,b]^n,\ \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(f(a_k)\big)$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$:

$$\forall (a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \in [a,b]^n,\ \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(f(a_k)\big)$$

- **Initialisation** :
  Soit $a_0 \in [a,b]$.
  - D'une part : $\varphi\left(\frac{1}{1}\sum\limits_{k=0}^{0} f(a_k)\right) = \varphi\big(f(a_0)\big)$.
  - D'autre part : $\frac{1}{1}\sum\limits_{k=0}^{0} \varphi\big(f(a_k)\big) = \varphi\big(f(a_0)\big)$.

  D'où $\mathscr{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$

$$(i.e.\ \forall (a_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \in [a,b]^{n+1},\ \varphi\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(a_k)\right) \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi\big(f(a_k)\big))$$

Soit $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \in [a,b]^{n+1}$.

× Comme la fonction φ est convexe sur J, alors (par définition de la convexité) :

$$\forall (x,y) \in J^2,\ \forall t \in [0,1],\ \varphi(tx + (1-t)y) \ \leqslant\ t\,\varphi(x) + (1-t)\,\varphi(y) \qquad (\star)$$

× De plus :

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(a_k)\right) &= \varphi\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \frac{1}{n+1}\, f(a_n)\right) \\ &= \varphi\left(\frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \frac{1}{n+1}\, f(a_n)\right)\end{aligned}$$

On applique alors $(\star)$ à :
- $t = \dfrac{n}{n+1}$,
- $x = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \in J$.
En effet, comme la fonction f est à valeurs dans J, alors : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f(a_k) \in J$.
De plus, comme l'ensemble J est convexe, alors : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \in J$.
- $y = f(a_n) \in J$, car la fonction f est à valeurs dans J.

On obtient :

$$\varphi\left(\frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \frac{1}{n+1}\, f(a_n)\right) \ \leqslant\ \frac{n}{n+1}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right) + \frac{1}{n+1}\,\varphi\big(f(a_n)\big)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(a_k)\right) &\leqslant \frac{n}{n+1}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right) + \frac{1}{n+1}\,\varphi\big(f(a_n)\big) \\ &\leqslant \frac{\cancel{n}}{n+1} \times \frac{1}{\cancel{n}}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(f(a_k)\big) + \frac{1}{n+1}\,\varphi\big(f(a_n)\big) \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(f(a_k)\big) + \frac{1}{n+1}\,\varphi\big(f(a_n)\big) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi\big(f(a_k)\big)\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, l'inégalité de Jensen est démontrée.}}$$

□

19. *Inégalité intégrale de Jensen*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans un intervalle J. Soit φ une fonction continue et convexe sur J. Démontrer :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b (\varphi \circ f)(t)\, dt$$

On pourra utiliser des sommes de Riemann.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la subdivision du segment $[a, b]$ suivante :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a + k\ \frac{b-a}{n}$$

Comme φ est une fonction convexe sur J, alors, par inégalité de Jensen :

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(f(a_k)\big)$$

- Or, par propriété des sommes de Riemann :
  - × comme la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\, dt$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

De plus, la fonction φ est continue sur J, et donc en $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$. Ainsi :

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt\right)$$

  - × comme la fonction $\varphi \circ f$ est continue sur le segment $[a, b]$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(f(a_k)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b (\varphi \circ f)(t)\, dt$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(f(a_k)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a} \int_a^b (\varphi \circ f)(t)\, dt$$

On en déduit :

$$\begin{array}{ccc}
\varphi\left(\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right) & \leqslant & \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(f(a_k)\big) \\
{\scriptstyle n\to+\infty}\big\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\big\downarrow \\
\varphi\left(\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt\right) & \leqslant & \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b (\varphi \circ f)(t)\, dt
\end{array}$$

$$\boxed{\text{L'inégalité intégrale de Jensen est donc vérifiée.}}$$

□

II.1.b) Une autre inégalité intégrale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

20. Justifier que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction F, la primitive de f qui s'annule en 0, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

Commentaire

On pouvait également répondre à cette question de la façon suivante.

× La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

× Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$F(x) \ = \ \int_0^x f(t)\,dt \ = \ \big[\ G(t)\ \big]_0^x \ = \ G(x) - G(0)$$

La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, car elle est une transformée affine de la fonction G, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

□

On suppose que la fonction F admet une limite, notée L, en $+\infty$.
Pour tout $x > 0$, on pose :

$$g(x) \ = \ \frac{1}{x}\int_0^x t\,f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad h(x) \ = \ \frac{1}{x}\,g(x) \ = \ \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)\,dt$$

21. Déterminer la limite de g lorsque x tend vers 0.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \int_0^x t\,f(t)\,dt \ &= \ \big[\ t\,F(t)\ \big]_0^x - \int_0^x F(t)\,dt && \textit{(par intégration par parties)} \\ &= \ x\,F(x) - \cancel{0 \times F(0)} - \int_0^x F(t)\,dt \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} g(x) \ &= \ \frac{1}{x}\left(x\,F(x) - \int_0^x F(t)\,dt\right) \\ &= \ F(x) - \frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,dt \end{aligned}$$

  On cherche maintenant à encadrer $g(x)$.

- D'après l'énoncé : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) > 0$. Or : $F' = f$.
  On en déduit que la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $t \in [0, x]$:

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{F(0)} \ \leqslant \ F(t) \ \leqslant \ F(x)$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 < x$) :

$$\begin{array}{rccccc}
 & 0 & \leqslant & \displaystyle\int_0^x F(t)\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^x F(x)\, dt \\
\text{donc} & 0 & \leqslant & \displaystyle\int_0^x F(t)\, dt & \leqslant & F(x) \displaystyle\int_0^x 1\, dt \\
\text{d'où} & 0 & \leqslant & \displaystyle\int_0^x F(t)\, dt & \leqslant & F(x)\ [\ t\ ]_0^x \\
\text{ainsi} & 0 & \leqslant & \displaystyle\int_0^x F(t)\, dt & \leqslant & x\, F(x) \\
\text{alors} & 0 & \geqslant & -\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x F(t)\, dt & \geqslant & -F(x) \qquad \textit{(car : } -\dfrac{1}{x} < 0\textit{)} \\
\text{puis} & F(x) & \geqslant & F(x) - \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x F(t)\, dt & \geqslant & 0 \\
\text{enfin} & F(x) & \geqslant & g(x) & \geqslant & 0
\end{array}$$

- Or :
  × d'une part : $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$
  × d'autre part, par continuité de F en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{x \to 0} g(x) = 0.}$$

□

On **admet** : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

22. Justifier que, pour tout $A > 0$, la fonction $H_A : x \mapsto \displaystyle\int_A^x h(t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, +\infty[$.

Démonstration.
Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

- La fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $U : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\, f(t)\, dt$, la primitive de $t \mapsto t\, f(t)$ qui s'annule en 0, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
  On en déduit que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est le produit $h = h_1 \times U$ de :
  × $h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
  × U qui est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction h est donc continue sur $[A, +\infty[$. La fonction H_A, la primitive de h qui s'annule en A, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } A > 0, \text{ la fonction } H_A : x \mapsto \int_A^x h(t)\, dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [A, +\infty[.}$$

□

23. Démontrer que la fonction H_A admet une limite en $+\infty$, notée $\tilde{H}(A)$ puis :

$$\lim_{A\to 0} \tilde{H}(A) \;=\; \lim_{x\to+\infty} F(x) \;=\; L$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

Démonstration.

- Soit $x \in [A, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} H_A(x) & = & \displaystyle\int_A^x h(t)\, dt & \\ & = & \displaystyle\int_A^x \frac{1}{t}\, g(t)\, dt & \\ & = & \displaystyle\int_A^x \frac{1}{t^2}\, U(t)\, dt & \text{(car } U : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\, dt\text{)} \\ & = & \left[-\dfrac{1}{t} \times U(t) \right]_A^x - \displaystyle\int_A^x \left(-\frac{1}{t}\right) \times t\,f(t)\, dt & \text{(par intégration par parties, car } U \text{ est une primitive de } t \mapsto t\,f(t)\text{)} \\ & = & -\dfrac{U(x)}{x} + \dfrac{U(A)}{A} + \displaystyle\int_A^x f(t)\, dt & \\ & = & \dfrac{U(A)}{A} - \dfrac{U(x)}{x} + [\ F(t)\ ]_A^x & \\ & = & g(A) - g(x) + F(x) - F(A) & \text{(par définition de } g\text{)} \end{array}$$

- Or d'après l'énoncé :
  × la fonction g admet une limite en $+\infty$. Plus précisément : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
  × la fonction F admet une limite en $+\infty$. Plus précisément : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } H_A \text{ admet une limite en } +\infty, \text{ notée } \tilde{H}(A).}$$

- De plus, par passage à la limite :

$$\begin{array}{ccccccccc} H_A(x) & = & g(A) & - & g(x) & + & F(x) & - & F(A) \\ {\scriptstyle x\to+\infty}\downarrow & & & & {\scriptstyle x\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle x\to+\infty}\downarrow & & \\ \tilde{H}(A) & = & g(A) & - & 0 & + & L & - & F(A) \end{array}$$

- Enfin :
  × d'après la question ***21*** : $\lim\limits_{A\to 0} g(A) = 0$.
  × d'après la question ***20***, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$, et donc en 0.
  Ainsi : $\lim\limits_{A\to 0} F(A) = F(0) = 0$.

  On en déduit :

$$\lim_{A\to 0} \tilde{H}(A) \;=\; 0 + L - 0 \;=\; L$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{A\to 0} \tilde{H}(A) \;=\; L \;=\; \lim_{x\to+\infty} F(x).}$$

□

II.1.c) Démonstration de l'inégalité de Knopp

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

On note toujours F la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

On suppose que la fonction F admet une limite, notée L, en $+\infty$.

24. Soit $a > 0$. Démontrer, pour tout $x \geqslant a$:

$$\exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\ dt\right) \ \leqslant\ \frac{1}{x-a}\int_a^x t\,f(t)\ dt$$

Démonstration.

Soit $x \geqslant a$. D'après l'énoncé :

- la fonction $v : t \mapsto \ln\big(t\,f(t)\big)$ est continue sur le segment $[x, a]$ car elle est la composée $v = v_2 \circ v_2$ de :
  - $\times$ $v_1 : t \mapsto t\,f(t)$ qui est :
    - continue sur $[a, x]$, car elle est le produit de fonctions continues sur $[a, x]$,
    - telle que : $v_1\big([a, x]\big) \subset \mathbb{R}_+^*$, car f est à valeurs strictement positive.
  - $\times$ $v_2 = \ln$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

  La fonction v est donc continue sur le segment $[a, x]$ et à valeurs dans l'intervalle $\mathbb{R}$.
- la fonction exp est continue et convexe sur $\mathbb{R}$.

Par inégalité intégrale de Jensen (question ***25***) :

$$\exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x v(t)\ dt\right) \ \leqslant\ \frac{1}{x-a}\int_a^x (\exp\circ v)(t)\ dt$$

Ainsi :

$$\exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\ dt\right) \ \leqslant\ \frac{1}{x-a}\int_a^x \exp\Big(\ln\big(t\,\ln(t)\big)\Big)\ dt$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \geqslant a,\ \exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\ dt\right) \ \leqslant\ \frac{1}{x-a}\int_a^x t\,f(t)\ dt.}$$

□

25. Soit $x > 0$. Démontrer que la fonction $a \mapsto \displaystyle\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\ dt$ admet une limite finie lorsque a tend vers 0.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $t \in\ ]0, +\infty[$:

  $$\ln\big(t\,f(t)\big) \ =\ \ln(t) + \ln\big(f(t)\big)$$

  Soit $a \in\ ]0, x]$. On obtient :

  $$\begin{aligned}\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\ dt \ &=\ \int_a^x \ln(t) + \ln\big(f(t)\big)\ dt \\ &=\ \int_a^x \ln(t)\ dt + \int_a^x \ln\big(f(t)\big)\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)}\end{aligned}$$

- De plus :
  - × d'une part :

$$\begin{aligned}
\int_a^x \ln(t)\ dt &= \int_a^x 1 \times \ln(t)\ dt \\
&= [\ t \times \ln(t)\ ]_a^x - \int_a^x t \times \frac{1}{t}\ dt \qquad \textit{(par intégration par parties)} \\
&= x\ \ln(x) - a\ \ln(a) - \int_a^x 1\ dt \\
&= x\ \ln(x) - a\ \ln(a) - [\ t\ ]_a^x \\
&= x\ \ln(x) - a\ \ln(a) - (x-a)
\end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{a \to 0} a\ \ln(a) = 0$.

> On en déduit que la fonction $a \mapsto \displaystyle\int_a^x \ln(t)\ dt$ admet une limite finie quand a tend vers 0. Plus précisément : $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_a^x \ln(t)\ dt = x\ \ln(x) - x$.

  - × d'autre part, la fonction $w\ :\ t \mapsto \ln\big(f(t)\big)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Elle admet donc une primitive W de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

$$\int_a^x \ln\big(f(t)\big)\ dt \ = \ \int_a^x w(t)\ dt \ = \ [\ W(t)\ ]_a^x \ = \ W(x) - W(a)$$

Or la fonction W est continue en 0 (car continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi : $\lim\limits_{a\to 0} W(a) = W(0)$.

> On en déduit que la fonction $a \mapsto \displaystyle\int_a^x \ln\big(f(t)\big)\ dt$ admet une limite quand a tend vers 0. Plus précisément : $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_a^x \ln\big(f(t)\big)\ dt = W(x) - W(0) = \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt$.

> La fonction $a \mapsto \displaystyle\int_a^x \ln\big(t\, f(t)\big)\ dt$ admet donc une limite finie lorsque a tend vers 0.
> Plus précisément : $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_a^x \ln\big(t\, f(t)\big)\ dt = x\ \ln(x) - x + \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt$.

□

26. Déduire des deux questions précédentes, pour tout $x > 0$:

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt\right) \ \leqslant\ \frac{\mathrm{e}}{x^2} \int_0^x t\, f(t)\ dt$$

On pourra remarquer : $\ln\big(f(t)\big) = \ln\big(t\, f(t)\big) - \ln(t)$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Tout d'abord, d'après la question *24*, pour tout $a \in\ ]0, x]$:

$$\exp\left(\frac{1}{x-a} \int_a^x \ln\big(t\, f(t)\big)\ dt\right) \ \leqslant\ \frac{1}{x-a} \int_a^x t\, f(t)\ dt$$

On cherche alors à passer à la limite dans cette inégalité lorsque a tend vers 0.

- On a démontré en question 22 que la fonction $U : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,dt$ est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :
$$\int_a^x t\,f(t)\,dt \;=\; U(x) - U(a) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} U(x) - U(0)$$
Or $U(0) = 0$, car U est la primitive de $t \mapsto t\,f(t)$ qui s'annule en 0. Ainsi :
$$\int_a^x t\,f(t)\,dt \underset{a\to 0}{\longrightarrow} U(x) \;=\; \int_0^x t\,f(t)\,dt$$
Or : $\dfrac{1}{x-a} \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{x}$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \frac{1}{x-a}\int_a^x t\,f(t)\,dt \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\int_0^x t\,f(t)\,dt.}$$
- D'après la question précédente :
$$\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\,dt \underset{a\to 0}{\longrightarrow} x\,\ln(x) - x + \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\,dt$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\,dt &\underset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\left(x\,\ln(x) - x + \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\,dt\right)\\ &= \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\,dt\end{aligned}$$
Or, la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit :
$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\,dt\right) &\underset{a\to 0}{\longrightarrow} \exp\left(\ln(x) - 1 + \frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\,dt\right)\\ &= x \times \mathrm{e}^{-1} \times \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\,dt\right)\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On en conclut : } \exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\,dt\right) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{x}{\mathrm{e}}\,\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\,dt\right).}$$
- En passant à la limite quand a tend vers 0 dans l'inégalité de la question 24, on obtient donc :
$$\frac{x}{\mathrm{e}}\,\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x t\,f(t)\,dt$$
Enfin, on remarque : $\dfrac{x}{\mathrm{e}} > 0$. Ainsi :
$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\,dt\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{1}{x}\int_0^x t\,f(t)\,dt$$
$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x > 0,\ \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\,dt\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^2}\int_0^x t\,f(t)\,dt.}$$
□

27. On note $\gamma : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt\right)$ et $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \gamma(t)\, dt$.
Démontrer que Γ admet une limite finie en $+\infty$ que l'on note ℓ, et :

$$\ell \leqslant \mathrm{e}\, L$$

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction γ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$. En effet, elle est continue :
  - × sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est la composée de fonctions continues sur des intervalles adéquats (on rappelle que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après ***25***).
  - × en 0. En effet, toujours d'après d'après ***25***, la fonction W est dérivable (car de classe $\mathcal{C}^1$) en 0.
    Ainsi :
    $$\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt = \frac{W(x) - W(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} W'(0) = \ln\big(f(0)\big)$$
    Par continuité de la fonction exp en $\ln\big(f(0)\big)$:
    $$\gamma(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \exp\Big(\ln\big(f(0)\big)\Big)$$

$$\boxed{\text{La fonction } \gamma \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+. \text{ La fonction } \Gamma, \text{ la primitive de } \gamma \text{ qui s'annule en } 0, \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
  $$\Gamma'(x) = \gamma(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt\right) > 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est donc croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

- Puisque la fonction Γ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de démontrer qu'elle est majorée pour pouvoir conclure quant à l'existence d'une limite en $+\infty$.
  - × Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente :
    $$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^2} \int_0^x t\, f(t)\, dt$$
    Autrement dit :
    $$\gamma(x) \leqslant \mathrm{e}\, h(x)$$
  - × Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissante $(0 \leqslant s)$:
    $$\int_0^s \gamma(x)\, dx \leqslant \int_0^s \mathrm{e}\, h(x)\, dx = \mathrm{e} \int_0^s h(x)\, dx$$
    On obtient :
    $$\Gamma(s) \leqslant \mathrm{e} \int_0^s h(x)\, dx$$

× Or, comme la fonction f est à valeurs positive, pour tout $t > 0$:

$$t\, f(t) \;\geqslant\; 0$$

Soit $x > 0$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$\int_0^x t\, f(t)\, dt \;\geqslant\; 0$$

De plus : $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$. Ainsi :

$$h(x) \;=\; \frac{1}{x^2} \int_0^x t\, f(t)\, dt \;\geqslant\; 0$$

La fonction $H : s \mapsto \displaystyle\int_0^s h(x)\, dx$, primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par ailleurs, d'après la question ***23***, la fonction H admet L comme limite en $+\infty$.
Ainsi, la fonction H :

- est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
- admet pour limite L en $+\infty$.

Par théorème de convergence monotone : $L = \sup\limits_{\mathbb{R}_+^*} (H)$. Ainsi :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^s h(x)\, dx = H(s) \;\leqslant\; L$$

On en déduit, par transitivité, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(s) \;\leqslant\; \mathrm{e} \int_0^s h(x)\, dx \;\leqslant\; \mathrm{e}\, L$$

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est donc majorée par } \mathrm{e}\, L.}$$

- La fonction Γ est :

  × croissante sur $\mathbb{R}_+$,

  × majorée par $\mathrm{e}\, L$.

  Elle admet donc une limite finie, notée ℓ en $+\infty$ vérifiant : $\ell \leqslant \mathrm{e}\, L$.

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ admet une limite finie, notée } \ell, \text{ en } +\infty \text{ et : } \ell \leqslant \mathrm{e}\, L.}$$

□

On admet que tous les résultats des questions ***18*** à ***27*** restent valides pour une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

II.1.d) Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette sous-partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs. On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

28. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie sur $[k-1, k]$ par :

$$\begin{cases} v_k(x) &= \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \dfrac{1}{x} \ (x-k+1) \ \ln(a_k) \quad \text{si } k \geqslant 2 \\ v_1(x) &= \ln(a_1) \end{cases}$$

est minimale pour $x = k$.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction v_1 est constante égale à $\ln(a_1)$ sur $[0, 1]$. Elle est donc en particulier minimale en 1 (ou en tout autre point du segment $[0, 1]$.

$$\boxed{\text{La fonction } v_1 \text{ est minimale en } 1.}$$

- Ensuite, soit $k \in [\![2, +\infty[\![$.
  La fonction $\alpha : x \mapsto \dfrac{x-k+1}{x}$ est dérivable sur $[k-1, k]$ car elle est le quotient $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ de :
  × $\alpha_1 : x \mapsto x - k + 1$ qui est dérivable sur $[k-1, k]$, en tant que fonction polynomiale,
  × $\alpha_2 : x \mapsto x$ qui :
    - est dérivable sur $[k-1, k]$,
    - ne s'annule pas sur $[k-1, k]$, car $k - 1 > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } v_k \text{ est donc dérivable sur } [k-1, k] \text{, car elle est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur } [k-1, k].}$$

- Soit $x \in [k-1, k]$.

$$\begin{aligned} v_k'(x) &= -\frac{1}{x^2} \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \frac{\cancel{1 \times x} - (\cancel{x} - k + 1) \times 1}{x^2} \ \ln(a_k) \\ &= -\frac{1}{x^2} \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \frac{k-1}{x^2} \ \ln(a_k) \\ &= \frac{(k-1) \ln(a_k) - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i)}{x^2} \end{aligned}$$

- Or, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante. Ainsi :

$$\forall i \in [\![1, k-1]\!], \quad a_i \ \leqslant \ a_k$$

  De plus, la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi :

$$\forall i \in [\![1, k-1]\!], \quad \ln(a_i) \ \leqslant \ \ln(a_k)$$

En sommant ces inégalités pour i variant de 1 à $k-1$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) \ \leqslant \ \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_k) \ = \ (k-1)\ln(a_k)$$

D'où : $(k-1)\ln(a_k) - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) \geqslant 0$. On en déduit :

$$v_k'(x) \ = \ \frac{(k-1)\ln(a_k) - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \ln(a_i)}{x^2} \ \leqslant \ 0$$

La fonction v_k est donc décroissante sur $[k-1, k]$. Elle est donc minimale en k. □

29. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt\right) dx \ \geqslant \ \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right)$$

On pourra utiliser la question précédente.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Notons d'abord que, par définition de la fonction f :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [i-1, i[, \ f(x) = a_i$$

- Soit $x \in [k-1, k[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt &= \int_0^{k-1} \ln\big(f(t)\big)\, dt + \int_{k-1}^{x} \ln\big(f(t)\big)\, dt && \textit{(par relation de Chasles, car : } x \geqslant k-1\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_{i-1}^{i} \ln\big(f(t)\big)\, dt\right) + \int_{k-1}^{x} \ln\big(f(t)\big)\, dt && \textit{(par relation de Chasles)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_{i-1}^{i} \ln(a_i)\, dt\right) + \int_{k-1}^{x} \ln(a_k)\, dt && \textit{(par définition de } f \textit{ et car } x \leqslant k\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\ln(a_i) \int_{i-1}^{i} 1\, dt\right) + \ln(a_k) \int_{k-1}^{x} 1\, dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i)\ \big[\, t\, \big]_{i-1}^{i} + \ln(a_k)\ \big[\, t\, \big]_{k-1}^{x} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + (x-k+1)\ln(a_k)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt \ = \ \frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + (x-k+1)\ln(a_k)\right) \ = \ v_k(x)$$

- Or, d'après la question précédente : $v_k(x) \geqslant v_k(k)$. De plus :

$$\begin{aligned} v_k(k) &= \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + (\cancel{k} - \cancel{k} + 1)\ \ln(a_k)\right) \\ &= \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \ln(a_k)\right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} v_k(x) & \geqslant & v_k(k) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt & \geqslant & \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \ln(a_i) \end{array}$$

Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt\right) \geqslant \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right)$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k-1 \leqslant k)$:

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt\right)\ dx \geqslant \int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right)\ dx$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right)\ dx &= \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right) \int_{k-1}^{k} 1\ dx \\ &= \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right)\ [\ x\ ]_{k-1}^{k} \\ &= \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt\right)\ dx \geqslant \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right).}$$

□

30. En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

Démonstration.
Supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On commence par remarquer :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right) &= \left(\prod_{i=1}^{k} \exp\big(\ln(a_i)\big)\right)^{\frac{1}{k}} && \textit{(par propriété de morphisme de } \exp\textit{)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt\right)\ dx \geqslant \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\left(f(t)\right) \, dt \right) \, dx \right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right)^{\frac{1}{k}}$$

Autrement dit, par relation de Chasles :

$$\underbrace{\int_0^n \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\left(f(t)\right) \, dt \right) \, dx}_{= \ \Gamma(n)} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right)^{\frac{1}{k}}$$

- Or, d'après la démonstration de la question 27, la fonction Γ est majorée par $\mathrm{e}\, L$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, par transitivité :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \Gamma(n) \leqslant \mathrm{e}\, L$$

Calculons $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x f(t) \, dt$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t) \, dt &= \int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t) \, dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t) \, dt && \textit{(par relation de Chasles)} \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(\int_{k-1}^{k} f(t) \, dt \right) + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t) \, dt && \textit{(par relation de Chasles toujours)} \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(\int_{k-1}^{k} a_k \, dt \right) + \int_{\lfloor x \rfloor}^x a_{\lfloor x \rfloor + 1} \, dt && \textit{(par définition de } f\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} a_k + a_{\lfloor x \rfloor + 1} && \textit{(par des calculs d'intégrales déjà effectués précédemment)} \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor + 1} a_k
\end{aligned}$$

De plus, on a supposé que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Ainsi, d'après les notations de l'énoncé :

$$L = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t) \, dt = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor + 1} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \mathrm{e}\, L = \mathrm{e} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

$$\boxed{\text{La suite } \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right)^{\frac{1}{k}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est donc majorée par } \mathrm{e} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.}$$

- Afin de démontrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\prod\limits_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, il reste à démontrer qu'elle est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} - \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 0$$
En effet, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.
$$\boxed{\text{La suite } \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc croissante.}}$$
- La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\prod\limits_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc :
× croissante,
× majorée par e $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.
Elle est donc convergente et, toujours avec les notations de l'énoncé :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \mathrm{e} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

$$\boxed{\text{L'inégalité de Carleman est donc vérifiée dans le cas où la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$ □

II.2. Inégalité de Carleman-Yang

Le but de cette dernière partie est d'établir l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

II.2.a) Un développement en série entière

On note φ la fonction définie par :
$$\forall t \in\,]-1, 1[\backslash\{0\}, \qquad \varphi(t) = (1-t)^{1-\frac{1}{t}}$$
On définit aussi la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\left\{\begin{array}{l} b_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1}\, b_{n-k} \end{array}\right.$$

31. Justifier que φ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement en 0.
On notera toujours φ ce prolongement.

Démonstration.
- On commence par remarquer, pour tout $t \in\,]-1, 1[\backslash\{0\}$:
$$\varphi(t) = (1-t)^{1-\frac{1}{t}} = \exp\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)\ln(1-t)\right)$$

- Or :
$$\left(1-\frac{1}{t}\right)\times\ln(1-t) \underset{t\to0}{\sim} -\frac{1}{t}\times(-t) \;=\; 1$$
Ainsi : $\displaystyle\lim_{t\to0}\left(1-\frac{1}{t}\right)\times\ln(1-t)=1$.
Par continuité de exp en 1 :
$$\underbrace{\exp\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)\ln(1-t)\right)}_{=\;\varphi(t)} \xrightarrow[t\to0]{} \mathrm{e}^1$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ admet une limite finie en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par e.}}$$

□

32. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|b_n|\leqslant 1$.
On admet alors que, pour tout $t\in\,]-1,1[$, la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\, t^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration.
Démontrons par récurrence forte : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $|b_n|\leqslant 1$.

- **Initialisation** :
On remarque : $|b_0|=|-1|=1\leqslant 1$.
D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n\in\mathbb{N}$.
Supposons : $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$. Et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* : $|b_{n+1}|\leqslant 1$).
Par définition de b_{n+1}.
$$\begin{aligned}
|b_{n+1}| &= \left|-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+1}\,b_{n+1-k}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{n+1}\right|\left|\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+1}\,b_{n+1-k}\right| \\
&= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+1}\,b_{n+1-k}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\left|\frac{1}{k+1}\,b_{n+1-k}\right| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\left|\frac{1}{k+1}\right||b_{n+1-k}| \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+1}\,|b_{n+1-k}|
\end{aligned}$$
Or, pour tout $k\in[\![1,n+1]\!]$, $n+1-k\in[\![0,n]\!]$. Ainsi, par hypothèse de récurrence :
$$\forall k\in[\![1,n+1]\!],\quad |b_{n+1-k}| \;\leqslant\; 1$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
|b_{n+1}| &\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} |b_{n+1-k}| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} \times 1 \\
&\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} 1 && \textit{(car : } \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \frac{1}{k+1} \leqslant 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{n+1} \times (n+1) \ = \ 1
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence forte : } \forall n \in \mathbb{N},\ |b_n| \leqslant 1.}$$

□

33. Démontrer que, pour tout $t \in\ ]-1,1[\backslash\{0\}$, $\varphi'(t) = \varphi(t)\,\psi(t)$, où ψ est une fonction continue sur $]-1,1[$ à préciser.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ car elle est la composée $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ de :
  - × $\varphi_1 : t \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{t}\right) \ln(1-t)$ qui est :
    - dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$,
    - telle que : $\varphi_1\big(\,]-1,1[\backslash\{0\}\,\big) \subset \mathbb{R}$.
  - × $\varphi_2 = \exp$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est dérivable sur }]-1,1[\backslash\{0\}.}$$

- Soit $t \in\ ]-1,1[\backslash\{0\}$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \varphi_1'(t) \times \big(\varphi_2' \circ \varphi_1\big)(t) \\
&= \left(\frac{1}{t^2}\ \ln(1-t) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{1-t}\right)\right) \times \exp\left(\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t)\right) \\
&= \left(\frac{\ln(1-t)}{t^2} + \frac{\cancel{t-1}}{t} \times \frac{1}{\cancel{t-1}}\right) \times \varphi(t) \\
&= \frac{\ln(1-t)+t}{t^2}\ \varphi(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On note } \psi : t \mapsto \frac{\ln(1-t)+t}{t^2}.\ \text{Alors : } \varphi' = \psi \times \varphi.}$$

- On a défini la fonction ψ sur $]-1,1[\backslash\{0\}$. Il reste à la définir en 0 de sorte à ce que la fonction ψ soit continue sur $]-1,1[$.
  - × Remarquons d'abord que la fonction ψ est continue sur $]-1,1[\backslash\{0\}$, car elle est le quotient $\psi = \dfrac{\psi_1}{\psi_2}$ de :
    - $\psi_1 : t \mapsto \ln(1-t) + t$ qui est continue sur $]-1,1[\backslash\{0\}$,
    - $\psi_2 : t \mapsto t^2$ qui :
      - ▸ est continue sur $]-1,1[\backslash\{0\}$,
      - ▸ ne s'annule pas sur $]-1,1[\backslash\{0\}$.
  - × Démontrons que la fonction ψ admet une limite finie en 0.

$$\ln(1-t) \ = \ (-t) - \frac{(-t)^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

On en déduit :

$$\ln(1-t) + t \ = \ -\frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

Ainsi : $\ln(1-t) + t \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t^2}{2}$. D'où :

$$\psi(t) \ = \ \frac{\ln(1-t)+t}{t^2} \ \underset{t\to 0}{\sim} \ \frac{-\frac{\cancel{t^2}}{2}}{\cancel{t^2}} \ = \ -\frac{1}{2}$$

La fonction ψ admet donc une limite finie en 0 : $-\dfrac{1}{2}$.

On définit alors la fonction ψ de sorte que : $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = \varphi(0)$. Plus précisément :

$$\begin{array}{rcl} \psi \ : \ ]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{\ln(1-t)+t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \psi \text{ ainsi définie est continue sur }]-1,1[\text{ par construction et vérifie : } \forall t \in \,]-1,1[\backslash\{0\},\ \varphi'(t) = \varphi(t)\,\psi(t).}$$

□

34. Démontrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

Démonstration.
On sait que :

× la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[\backslash\{0\}$, avec des arguments similaires à ceux utilisés pour démontrer sa dérivabilité sur cet ensemble en question ***33***;

× la fonction φ est continue sur $]-1,1[$ d'après la question ***31***;

× la fonction φ' admet une limite finie en 0. En effet, d'après la question précédente :

$$\forall t \in \,]-1,1[\backslash\{0\}, \quad \varphi'(t) \ = \ \varphi(t) \times \psi(t)$$

De plus, comme les fonctions φ et ψ sont continues en 0, elles admettent chacune une limite finie en 0. Ainsi, il en est de même de φ'.

$$\boxed{\text{Par théorème de la limite de la dérivée, la fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-1,1[.}$$

□

35. On admet qu'une autre écriture de la fonction ψ est :

$$\forall t \in \,]-1,1[, \quad \psi(t) \;=\; -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\, t^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \,]-1,1[$, on note :

$$u_n(t) \;=\; -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\, t^k \quad \text{et} \quad v_n(t) \;=\; -\mathrm{e} \sum_{k=0}^{n} b_k\, t^k$$

Calculer $u_n(t) \times v_n(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \,]-1,1[$. □

36. On note ξ la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$\xi : t \mapsto \mathrm{e}\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\, t^k\right)$$

On admet que la fonction ξ est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\xi' : t \mapsto -\mathrm{e} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\, b_{k+1}\, t^k$$

Conclure : $\varphi = \xi$.

Démonstration.

□

II.2.b) Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suite de réels strictement positifs. On admet que, pour toute suite de réels strictement positifs $(d_{k,n})_{(k,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} d_{k,n}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} d_{k,n}\right)$$

37. Démontrer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_k\, a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}}\right)$$

Démonstration.

□

38. En considérant $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, en déduire l'inégalité de Carleman-Yang :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \;\leqslant\; \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n$$

Démonstration.

□

39. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n \geqslant 0$.
En quoi l'inégalité précédente est-elle un raffinement de l'inégalité de Carleman ?

Démonstration.

□