
DS1



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 11. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

- Consignes de présentation
 - × Laisser une page de garde complète (juste Nom, Prénom et DS1 - Mathématiques)
 - × N'utiliser que des copies doubles (je rappelle qu'on ne les fournit pas)
 - × Nom et Prénom sur chaque copie double
 - × Ne pas utiliser de correcteur blanco / Typp-Ex (barrer proprement, à la règle)
 - × Ne pas utiliser de stylo à friction
 - × Utiliser une encre foncée
 - × Toutes vos pages comportent des marges (en haut, en bas, à gauche). Sinon, il faut les tracer au stylo rouge
 - × Toutes les copies doubles sont numérotées en bas à droite de la 1^{ère} page de la copie double (1/4, 2/4...)
 - × Les questions seront traitées dans l'ordre. On laisse de la place si besoin pour revenir plus tard aux questions non traitées initialement. Les exercices, par contre, n'ont pas forcément à être traités dans l'ordre.
 - × Démarrer chaque exercice sur une nouvelle page
 - × Toutes les conclusions sont encadrées ou soulignées, dans une autre couleur que la couleur avec laquelle vous écrivez
 - × La copie rendue doit être propre et soignée (tant d'un point de vue visuel que de la syntaxe)
 - × Adopter une rédaction graphique et aérée. On présentera notamment les hypothèses des théorèmes sous forme de liste
 - × Se relire pour éviter les non-sens
- Consignes mathématiques
 - × Toutes les variables libres sont introduites (avec Soit, Il existe ou On note)
 - × Aucune variable muette n'est introduite
 - × Deux propositions sont toujours reliées par un connecteur logique
 - × Argumenter. Un résultat fourni sans explication ne permet pas d'obtenir de point.

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, sur $]0, +\infty[$, par :

$$f : x \mapsto e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$\frac{5}{2} < e < 3 \quad \frac{1}{2} < \ln(2) < \frac{3}{4}$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) (*) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
b) (*) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
4. a) Étudier les variations de la fonction $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto f'(x) - x$$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. (*) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g :]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto f(x) - x$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. (*) Écrire une fonction **Python**, prenant en paramètre un réel A , et renvoyant un entier naturel N tel que $u_N \geq A$.

Exercice 2

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. Tout nombre réel x est inférieur ou égal à son cosinus.
2. (*) Tout réel de carré strictement supérieur à 4 est lui-même strictement supérieur à 2.
3. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.
4. Toute suite d'entiers est majorée.

Exercice 3

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables.

1. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x^2 > 5)$ et $(|x| > \sqrt{5})$.
2. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.
3. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.
Propositions : $(x_1 + \dots + x_n \leq n^2)$ et $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \leq n)$.
4. Paramètre : une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Propositions : $(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R})$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$.

Exercice 4

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. (*) Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P(x) : (x \geq 0)$ et $Q(x) : (x \geq 1)$.
2. Paramètre : $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Propositions : $P(a, b) : ((a+b)^2 = a^2 + b^2)$ et $Q(a, b) : (a = b = 0)$.
3. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Propositions : $P(a, b, c) : (|a+b+c| = 0)$ et $Q(a, b, c) : (|a+b| + |c| = 0)$.
4. Paramètre : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Propositions : $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) : (\forall N \in \mathbb{N}^*, (u_1 - u_0)(u_2 - u_1) \cdots (u_N - u_{N-1}) > 0)$ et $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) : (\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante})$.

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. (*) $x + 1 = \sqrt{\frac{x}{6} + 6}$

2. $\pi^{3x} - 3 \times \pi^x + 2 = 0$

3. (*) $\sqrt{x-1} \leq |x| + 1$

4. $|3x^2 + 2x - 1| < |-x^2 + 2x + 3|$

Exercice 6

1. Sommes de Mengoli

a) (*) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

En s'inspirant de la question précédente, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)}$.

2. Minimum et maximum

a) (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$$

b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)$.

Exercice 7

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 3$.

2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$.

3. (*) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?