

DS1 /135



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 11. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 /38

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, sur $]0, +\infty[$, par :

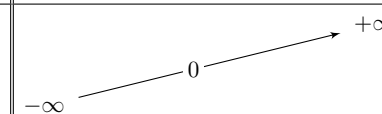
$$f : x \mapsto e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

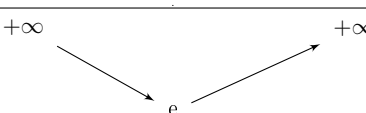
$$\frac{5}{2} < e < 3 \quad \frac{1}{2} < \ln(2) < \frac{3}{4}$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - 1 pt : f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$
 - 1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$
 - 1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$
- b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
 - 1 pt : signe de $f''(x)$ et sens de variations de f'
 - 1 pt : limite de f' en $+\infty$ et en 0
 - 1 pt : calcul de $f'(1)$

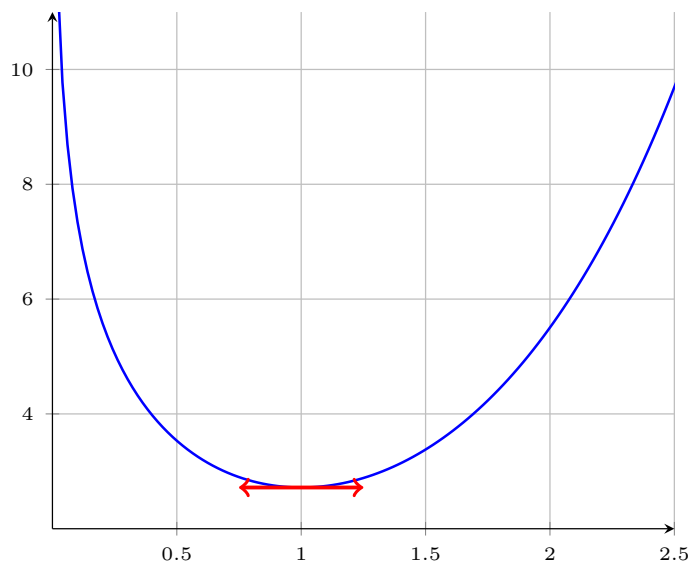
x	0	1	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	+
Variations de f'			

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
 - 1 pt : signe de $f'(x)$ et sens de variations de f
 - 1 pt : limite de f en $+\infty$
 - 1 pt : limite de f en 0 et : calcul de $f(1)$

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		- 0 +	
Variations de f			

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

- 4 pts : tangente, limites, cohérence avec le TV, propriété



4. a) Étudier les variations de la fonction $u : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f'(x) - x \end{cases}$

- 1 pt : u dérivable sur $]0, +\infty[$
- 1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, u'(x) = \frac{x^2(e^x - 1) + e}{x^2}$
- 1 pt : signe de $u'(x)$ et sens de variations de u

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	+	
Variations de u	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

- 1 pt : $f'(x) = x \Leftrightarrow u(x) = 0$
- 3 pts : théorème de la bijection
 - × 1 pt : hypothèses
 - × 1 pt : $u(]0, +\infty[) =] - \infty, +\infty[$
 - × 1 pt : $0 \in] - \infty, +\infty[$
- 1 pt : $u(1) < u(\alpha) < u(2)$
- 1 pt : application de $u^{-1} :] - \infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ strictement croissante sur $] - \infty, +\infty[$

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{cases} [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - x \end{cases}$

- 1 pt : g dérivable sur $[2, +\infty[$ et $g' : x \mapsto f'(x) - 1$
- 1 pt : signe de $g'(x)$ et variations de g

x	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de g		

- 1 pt : $g(2) > 0$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$
- 1 pt : utilisation de : $\forall x \in [2, +\infty[, f(x) > x$ (qst précédente)

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

- 1 pt : théorème de convergence monotone
- 3 pts : raisonnement par l'absurde
 - × 1 pt : structure du raisonnement
 - × 1 pt : $\ell \geq 2$ et $g(\ell) = 0$
 - × 1 pt : d'après 6.a), $\forall x \geq 2, g(x) \neq 0$

8. (*) Écrire une fonction **Python**, prenant en paramètre un réel A , et renvoyant un entier naturel N tel que $u_N \geq A$.

- 1 pt : importation bibliothèque
- 1 pt : initialisation
- 2 pts : boucle while et contenu

```

1  import numpy as np
2  def Entier_tq(A) :
3      N = 0
4      u = 2
5      while u < A :
6          N = N + 1
7          u = np.exp(u) - np.e * np.log(u)
8      return N

```

Exercice 2 /12

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. Tout nombre réel x est inférieur ou égal à son cosinus.

- 1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq \cos(x)$.
- 1 pt : Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0 > \cos(x_0)$.
- 1 pt : En choisissant $x_0 = \frac{\pi}{2}$, on remarque que la négation de la proposition 1. est vraie. La proposition 1. est donc fausse.

2. (*) Tout réel de carré strictement supérieur à 4 est lui-même strictement supérieur à 2.

- 1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 4) \Rightarrow (x > 2)$.
- 1 pt : Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, (x^2 > 4) \text{ ET } (x \leq 2)$.
- 1 pt : En choisissant $x_0 = -3$, on remarque que la négation de la proposition 1. est vraie. La proposition 1. est donc fausse.

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

- 1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\exists a_0 \in \mathbb{R}, z^2 - 3z + 3 = (z - a_0)^2$
- 1 pt : Sa négation est : $\forall a \in \mathbb{R}, z^2 - 3z + 3 \neq (z - a)^2$.
- 1 pt : $\Delta < 0$. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ n'admet donc aucune racine réelle. En particulier, il n'admet pas de racine double. La proposition 3. est donc fausse.

4. Toute suite d'entiers est majorée.

- 1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \exists M_0 \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M_0$.
- 1 pt : Sa négation est : $\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |u_{n_0}| > M$.
- 1 pt : En choisissant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n, \dots$

Exercice 3 /14

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables.

1. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.

Propositions : $(x^2 > 5)$ et $(|x| > \sqrt{5})$.

- 1 pt : par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+, \dots$

2. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.

Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

- 1 pt : En choisissant $x_0 = -2$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes.
- 1 pt : L'implication suivante est fausse : $(x < 1) \Rightarrow (x^2 < x)$. En effet, $\dots$
- 2 pts : démonstration de la réciproque (tableau de signes)
 - × 1 pt : structure de démonstration de l'implication
 - × 1 pt : reste

3. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.
Propositions : $(x_1 + \dots + x_n \leq n^2)$ et $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \leq n)$.
- **1 pt : en choisissant $n = 2$ et $x_1 = 4$ et $x_2 = 0$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes.**
 - **1 pt : L'implication suivante est fausse : $(x_1 + \dots + x_n \leq n) \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \leq n)$. En effet, ...**
 - **2 pts : démonstration de la réciproque**
 - × **1 pt : structure de démonstration de l'implication**
 - × **1 pt : reste**
4. Paramètre : une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Propositions : $(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R})$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$.
- **2 pts : En choisissant $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes**
 - × **1 pt : démonstration de la non croissance**
 - × **1 pt : démonstration de la 1-périodicité**
 - Toute réflexion pertinente sera valorisée**
 - **2 pts : $(f \text{ croissante sur } \mathbb{R}) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$**
 - × **1 pt : structure de démonstration de l'implication**
 - × **1 pt : reste**
 - **1 pt : L'implication suivante est fausse : $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x)) \Rightarrow (f \text{ est croissante sur } \mathbb{R})$**

Exercice 4 /11

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. (*) Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P(x) : (x \geq 0)$ et $Q(x) : (x \geq 1)$.
- **1 pt : La proposition $Q(x)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(x)$.
En choisissant $x_0 = 0$, ...**
 - **1 pt : La proposition $Q(x)$ est une condition suffisante à $P(x)$**
2. Paramètre : $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Propositions : $P(a, b) : ((a+b)^2 = a^2 + b^2)$ et $Q(a, b) : (a = b = 0)$.
- **1 pt : La proposition $Q(a, b)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(a, b)$.
En choisissant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, ...**
 - **1 pt : La proposition $Q(a, b)$ est une condition suffisante à $P(a, b)$.**
3. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Propositions : $P(a, b, c) : (|a+b+c| = 0)$ et $Q(a, b, c) : (|a+b| + |c| = 0)$.
- **1 pt : La proposition $Q(a, b, c)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(a, b, c)$.
En choisissant $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = -1$, ...**
 - **1 pt : La proposition $Q(a, b, c)$ est une condition suffisante à $P(a, b, c)$.**
4. Paramètre : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Propositions : $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) : (\forall N \in \mathbb{N}^*, (u_1 - u_0)(u_2 - u_1) \cdots (u_N - u_{N-1}) > 0)$ et $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) : (\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante})$.

- 4 pts : La proposition $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une condition nécessaire à $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$
 - × 1 pt : structure de récurrence forte
 - × 1 pt : initialisation
 - × 2 pts : hérédité
- 1 pt : La proposition $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une condition suffisante à $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Exercice 5 /28

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. (*) $x + 1 = \sqrt{\frac{x}{6}} + 6$
 2. $\pi^{3x} - 3 \times \pi^x + 2 = 0$
 3. (*) $\sqrt{x-1} \leq |x| + 1$
 4. $|3x^2 + 2x - 1| < |-x^2 + 2x + 3|$
1. • 1 pt : $\mathcal{D}_{(1)} = [-36, +\infty[$
 - 1 pt : obtention de la disjonction de cas : $x \in [-36, -1[, x \geq -1$
 - 1 pt : cas $x \in [-36, -1[$
 - 3 pts : cas $x \geq -1$
 - × 1 pt : (1) $\Leftrightarrow 6x^2 + 11x - 30 = 0$
 - × 1 pt : Le polynôme $6X^2 + 11X - 30$ admet pour racines $-\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{2}$
 - × 1 pt : $-\frac{10}{2} < -1$
 - 1 pt : L'ensemble des solutions de l'équation (1) est donc : $\{\frac{3}{2}\}$.
 2. • 1 pt : $\mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}$
 - 1 pt : changement de variable $y = \pi^x$
 - 1 pt : $X^3 - 3X + 2 = (X - 1)(X^2 + X - 2)$
 - 1 pt : $X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2(X + 2)$
 - 1 pt : $\pi^x \neq -2$
 - 1 pt : L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc : $\{0\}$.
 3. • 1 pt : $\mathcal{D}_{(3)} = [1, +\infty[$
 - 1 pt : $\sqrt{x-1} \leq |x| + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq x + 1$ (car $x \geq 1 \geq 0$)
 - 1 pt : stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ (car $x + 1 \geq 0$)
 - 1 pt : $X^2 + X + 2$ n'admet pas de racine et son coefficient dominant est positif. Donc : $x^2 + x + 2 \geq 0$
 - 1 pt : L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est donc : $\mathcal{D}_{(3)} = [1, +\infty[$.

4. • 1 pt : $\mathcal{D}_{(4)} = \mathbb{R}$

• 1 pt : signe de $3x^2 + 2x - 1$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
Signe de $3x^2 + 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

• 1 pt : signe de $-x^2 + 2x + 3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
Signe de $-x^2 + 2x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

- 1 pt : obtention de la disjonction de cas : $x \in]-\infty, -1] \cup]3, +\infty$, $x \in]-1, \frac{1}{3}]$, $x \in]\frac{1}{3}, 3]$
- 1 pt : L'inéquation (4) n'admet donc pas de solution sur $]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$.
- 2 pts : L'inéquation (4) admet donc pour solution tous les réels de l'intervalle $]-1, \frac{1}{3}]$ (dont 1 pt pour $x \neq -1$)
- 2 pts : L'inéquation (4) admet donc pour solution tous les réels de l'ensemble $]-1, 1[\cap]\frac{1}{3}, 3] =]\frac{1}{3}, 1[$.
- 1 pt : l'ensemble des solutions de l'inéquation (4) est : $]-1, \frac{1}{3}] \cup]\frac{1}{3}, 1[=]-1, 1[$.

Exercice 6 /22

1. Sommes de Mengoli

a) (*) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

• 1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

• 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (télescopage)

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

En s'inspirant de la question précédente, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)}$.

• 1 pt : $\frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (k+p)} \right)$

• 1 pt : $\frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)} = \frac{1}{p} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i} \right)$

• 1 pt : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)} = \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} \right) - \sum_{j=2}^{n+1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{j+i} \right) \right)$ (avec le décalage d'indice $j = k+1$)

• 1 pt : $\frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} \right) - \sum_{j=2}^{n+1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{j+i} \right) \right) = \frac{1}{p} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i+1} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+1+i} \right)$ (par télescopage)

• 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+p+1)} \right)$

2. Minimum et maximum

a) (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$$

- 8 pts : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- × 1 pt : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \min(i, j) \right)$
- × 1 pt : $\sum_{j=1}^n \min(i, j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \leq i}}^n \min(i, j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^n \min(i, j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \leq i}}^n j + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^n i$
- × 1 pt : $\sum_{\substack{j=1 \\ j \leq i}}^n j + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^n i = \sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i$
- × 1 pt : $\sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i = \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i)$
- × 1 pt : $\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = -\frac{1}{2} i^2 + \frac{2n+1}{2} i$
- × 1 pt : $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \min(i, j) \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^n i$
- × 1 pt : $-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^n i = -\frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$
- × 1 pt : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 4 pts : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$
- × 2 pts : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n \max(i, j) = \frac{1}{2} i^2 - \frac{1}{2} i + \frac{n(n+1)}{2}$
- × 2 pts : reste

b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)$.

- 1 pt : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i+j = \min(i, j) + \max(i, j)$
- 1 pt : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \min(i, j) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \max(i, j) \right)$
- 1 pt : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) = n^2(n+1)$

Exercice 7 /10

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 3$.

- 1 pt : initialisation
- 3 pts : hérédité

2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$.

- 1 pt : démonstration de : $\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} > 0$
- 1 pt : reste de la question

3. (*) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

- 1 pt