

DS1

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, sur $]0, +\infty[$, par :

$$f : x \mapsto e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$\frac{5}{2} < e < 3 \quad \frac{1}{2} < \ln(2) < \frac{3}{4}$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

Démonstration.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme $f = f_1 + f_2$ de :

- $f_1 : x \mapsto e^x$ qui est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$,
- $f_2 : x \mapsto e \ln(x)$ qui est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \text{ et } f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}.$$

□

- b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

Démonstration.

- Pour tout $x \in]0, +\infty[: f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 0$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	+
Variations de f'	$-\infty$	0	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
 × Tout d'abord : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} = +\infty$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty.$$

- × Ensuite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

- × Enfin : $f'(1) = e^1 - \frac{e}{1} = e - e = 0$.

□

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

Démonstration.

- La fonction f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi :

$$\times \forall x \in]0, 1[, f'(x) < f'(1) = 0.$$

$$\times \forall x \in]1, +\infty[, f'(x) > f'(1) = 0.$$

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		- 0 +	
Variations de f	$+\infty$	e	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :

$$\times \text{ Tout d'abord : } \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty. \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty.$$

$$\times \text{ Ensuite, pour tout } x \in]0, +\infty[:$$

$$f(x) = e^x - e \ln(x) = e^x \left(1 - e \frac{\ln(x)}{e^x} \right)$$

$$\text{De plus, par croissances comparées : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0.$$

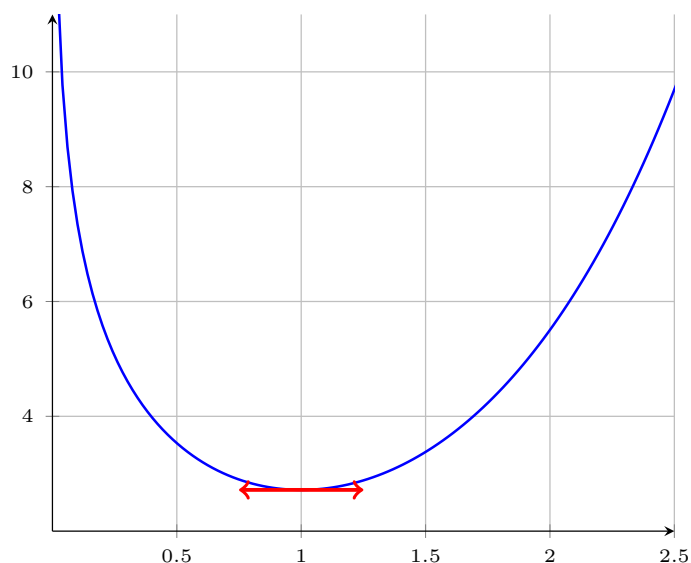
$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\times \text{ Enfin : } f(1) = e^1 - e \ln(1) = e.$$

□

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Démonstration.



Commentaire

On s'efforcera de faire les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes. D'ailleurs, il ne faut pas oublier de faire apparaître les tangentes horizontales et les points d'inflexion si on les a déterminés auparavant.

□

4. a) Étudier les variations de la fonction $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x) - x$$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme $f_1 + f_2$ de :
 - $\times f_1 = f'$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$ car f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$,
 - $\times f_2 : x \mapsto x$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$u'(x) = f''(x) - 1 = e^x + \frac{e}{x^2} - 1 = \frac{x^2 e^x + e - x^2}{x^2} = \frac{x^2 (e^x - 1) + e}{x^2}$$

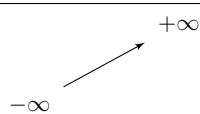
On remarque :

- $\times$ d'une part : $x^2 > 0$.
- $\times$ d'autre part, comme $x > 0$, alors, par stricte croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R} : e^x > e^0 = 1$.
Ainsi : $e^x - 1 > 0$.
- De plus : $x^2 > 0$ et $e > 0$. D'où : $x^2 (e^x - 1) + e > 0$.

On en déduit : $u'(x) > 0$.

La fonction u est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	+	
Variations de u		

- Détaillons les éléments de ce tableau.
 - $\times$ D'après **1b** : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$. De plus : $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.
D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty$.
 - $\times$ Soit $x \in]0, +\infty[$:

$$u(x) = e^x - \frac{e}{x} - x = e^x \left(1 - \frac{e}{xe^x} - \frac{x}{e^x} \right)$$

De plus, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{xe^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.

□

- b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = x \Leftrightarrow f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$$

On cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

- La fonction u est :
 - × continue sur $]0, +\infty[$, car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **4a**,
 - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Ainsi la fonction u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $u(]0, +\infty[)$.

$$u(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0} u(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \right[=] -\infty, +\infty[$$

Or : $0 \in] -\infty, +\infty[$.

L'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que l'équation $f'(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

- Tout d'abord :
 - × $u(\alpha) = 0$
 - × $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$
 - × $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 0$

En effet, d'après les encadrements donnés par l'énoncé, on obtient :

– d'une part : $\frac{5}{2} < e < 3$.

Ainsi, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$: $\frac{25}{4} < e^2 < 9$.

Donc : $\frac{17}{4} < e^2 - 2 < 7$.

– d'autre part : $\frac{5}{2} < e < 3$. Donc : $\frac{5}{4} < \frac{e}{2} < \frac{3}{2}$. D'où : $-\frac{3}{2} < -\frac{e}{2} < -\frac{5}{4}$.

Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \frac{17}{4} - \frac{3}{2} & < & e^2 - 2 - \frac{e}{2} < 7 - \frac{5}{4} \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{11}{4} & & \frac{23}{4} \end{array}$$

On en conclut : $u(2) > \frac{11}{4} > 0$.

On en déduit :

$$u(1) < u(\alpha) < u(2)$$

Or, d'après le théorème de la bijection, $u^{-1} :] -\infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $] -\infty, +\infty[$. En appliquant u^{-1} , on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} u^{-1}(u(1)) & < & u^{-1}(u(\alpha)) & < & u^{-1}(u(2)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & & \alpha & & e \end{array}$$

$$1 < \alpha < 2$$

□

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ existe} \\ u_n \geq 2 \end{cases}$

► **Initialisation** :

D'après l'énoncé : $u_0 = 2 \geq 2$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $\begin{cases} u_{n+1} \text{ existe} \\ u_{n+1} \geq 2 \end{cases}$).

Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq 2$.

- La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$.

Or : $u_n \geq 2$. Donc : $u_n \in]0, +\infty[$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.

- D'après la question 2, e est le minimum de f sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) \geq e$$

En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in]0, +\infty[$, on obtient :

$$u_{n+1} \geq e > 2$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

□

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{matrix} [2, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{matrix}$

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $[2, +\infty[$ car elle est la somme $g_1 + g_2$ de :
 - × $g_1 = f$ qui dérivable sur $[2, +\infty[$, car deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après 1a,
 - × $g_2 : x \mapsto x$ qui est dérivable sur $[2, +\infty[$.

La fonction g est dérivable sur $[2, +\infty[$.

- Soit $x \in [2, +\infty[$.

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

D'après la question 1b, la fonction f' est croissante sur $[2, +\infty[\subset]0, +\infty[$. Ainsi :

$$f'(x) \geq f'(2)$$

Or, avec les encadrements donnés par l'énoncé et les calculs de la question **4b** :

$$f'(2) = e^2 - \frac{e}{2} \geq \frac{25}{4} - \frac{3}{2} = \frac{25}{4} - \frac{6}{4} = \frac{19}{4} > 1$$

On en déduit : $f'(x) > 1$. D'où : $g'(x) > 0$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de g	$g(2)$ 	$+\infty$

- Déterminons maintenant, pour tout $x \in [2, +\infty[$, le signe de $g(x)$.
Comme la fonction g est croissante sur $[2, +\infty[$:

$$\forall x \geq 2, \quad g(x) \geq g(2)$$

Pour conclure, il reste alors à démontrer : $g(2) > 0$. On remarque pour cela :

$$g(2) = f(2) - 2 = e^2 - e \ln(2) - 2$$

D'après les encadrements de l'énoncé :

$$\times \text{ d'une part : } \frac{25}{4} < e^2 < 9$$

$$\times \text{ d'autre part : } \frac{5}{2} < e < 3 \text{ et } \frac{1}{2} < \ln(2) < \frac{3}{4}. \text{ D'où :}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} & < & e \ln(2) < 3 \times \frac{3}{4} \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{5}{4} & & \frac{9}{4} \end{array}$$

$$\text{Ainsi : } -\frac{9}{4} < -e \ln(2) < -\frac{5}{4}.$$

On en déduit :

$$g(2) = e^2 - e \ln(2) - 2 > \frac{25}{4} - \frac{9}{4} - 2 = \frac{16}{4} - 2 = 4 - 2 = 2 > 0$$

On obtient alors, par transitivité, pour tout $x \in [2, +\infty[$:

$$g(x) \geq g(2) > 0$$

$$\boxed{\forall x \in [2, +\infty[, \quad g(x) > 0}$$

□

- b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.

- D'après la question **6a** : $\forall x \geq 2, g(x) > 0$. Autrement dit, pour tout $x \geq 2$:

$$f(x) > x$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $x = u_n \geq 2$ (démontré en question **5**), on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.

□

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

Démonstration.

- On sait que la suite (u_n) est croissante (d'après la question **6b**). Deux cas se présentent alors :

- × soit (u_n) est de plus majorée, et alors elle converge.
- × soit (u_n) n'est pas majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.

- Démontrons par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.

Supposons que la suite (u_n) est majorée.

- × Dans ce cas, la suite (u_n) est
 - × croissante,
 - × majorée.

Elle converge donc vers un réel ℓ .

D'après la question **5** : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$.

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geq 2$.

- × D'autre part, par définition de la suite (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction f est continue sur $[2, +\infty[$, elle est donc en particulier continue en ℓ . Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

On en déduit : $g(\ell) = 0$.

- × Par ailleurs, d'après la question **6a** : $\forall x \geq 2, g(x) > 0$. En particulier : $\forall x \geq 2, g(x) \neq 0$.
Or, on a démontré plus haut dans cette question : $\ell \geq 2$. Ainsi : $g(\ell) \neq 0$.

Absurde !

Ainsi, la suite (u_n) n'est pas majorée et diverge donc vers $+\infty$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

- × montrer qu'une suite N'est PAS majorée,
- × montrer qu'un réel N'est PAS rationnel.

□

8. (*) Écrire une fonction **Python** `Entier_tq`, prenant en paramètre un réel A , et renvoyant un entier naturel N tel que $u_N \geq A$.

Démonstration.

On propose le script suivant :

```

1  import numpy as np
2  def Entier_tq(A) :
3      N = 0
4      u = 2
5      while u < A :
6          N = N + 1
7          u = np.exp(u) - np.e * np.log(u)
8      return N

```

Détaillons les éléments de ce script.

• Début de la fonction

On commence par préciser la structure de la fonction :

- × cette fonction se nomme `Entier_tq`,
- × elle prend en paramètre la variable A ,
- × elle admet pour variable de sortie la variable N .

```

2  def Entier_tq(A) :

```

```

8      return N

```

On initialise ensuite la variable N à 0.

```

3      N = 0

```

La variable u qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 2 : la valeur de u_0 .

```

4      u = 2

```

• Structure itérative

Les lignes 5 à 7 consistent à :

- 1) déterminer un entier n tel que : $u_n \geq A$,
- 2) calculer les valeurs successives de u_n .

On doit donc :

- 1) incrémenter la variable N de 1 jusqu'à ce que : $u_n \geq A$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable N de 1 tant que : $u_n < A$. Pour cela on met en place une structure **while** :

```

5      while u < A :

```

Puis on met à jour la variable N .

```

6          N = N + 1

```

- 2) calculer les valeurs successives de u_n :

```

7          u = np.exp(u) - np.e * np.log(u)

```

- **Fin du programme**

À l'issue de cette boucle, la variable N contient le premier entier n tel que : $u_n \geq A$. On finit donc ce script en renvoyant la valeur de cette variable.

s **return** N

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un script **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

Exercice 2

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. Tout nombre réel x est inférieur ou égal à son cosinus.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq \cos(x)$.

Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0 > \cos(x_0)$.

Étudions la véracité de la proposition 1.

En choisissant $x_0 = \frac{\pi}{2}$, on remarque : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi : $x_0 > \cos(x_0)$.

On en déduit que la négation de la proposition 1. est vraie.

La proposition 1. est donc fausse.

Commentaire

On démontre ici que la négation de la proposition 1. est vraie. Cette négation est une proposition quantifiée existentiellement. Il faut donc exhiber un objet vérifiant cette proposition pour conclure quant à sa véracité. □

2. (*) Tout réel de carré strictement supérieur à 4 est lui-même strictement supérieur à 2.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 4) \Rightarrow (x > 2)$.

Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, (x_0^2 > 4) \text{ ET } (x_0 \leq 2)$.

Étudions la véracité de la proposition 2.

En choisissant $x_0 = -3$, on remarque : $x_0^2 = (-3)^2 = 9 > 4$ ET $x_0 = -3 \leq 2$.

On en déduit que la négation de la proposition 2. est vraie.

La proposition 2. est donc fausse.

Commentaire

- On rappelle : $x^2 > 4 \not\Rightarrow x > 2$.

En toute généralité, comme $\sqrt{x^2} = |x|$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2)$$

- L'implication ci-dessus est même une équivalence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2)$$

C'est elle qui permet de nous orienter quant à la recherche d'un contre-exemple. On constate qu'ici, tout $x_0 < -2$ constituerait un contre-exemple valide à la proposition 2. □

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\exists a_0 \in \mathbb{R}, z^2 - 3z + 3 = (z - a_0)^2$

Sa négation est : $\forall a \in \mathbb{R}, z^2 - 3z + 3 \neq (z - a)^2$.

Étudions la véracité de la proposition 3.

On note Δ le discriminant du polynôme $X^2 - 3X + 3$. Alors :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 9 - 12 < 0$$

Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ n'admet donc aucune racine réelle. En particulier, il n'admet pas de racine double.

La proposition 3. est donc fausse.

□

4. Toute suite d'entiers est majorée.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \exists M_0 \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M_0$.

Sa négation est : $\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |u_{n_0}| > M$.

Étudions la véracité de la proposition 4.

En choisissant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

× est une suite d'entiers,

× n'est pas majorée car : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On en déduit que la proposition 4. est fausse.

□

Exercice 3

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables.

1. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.

Propositions : $(x^2 > 5)$ et $(|x| > \sqrt{5})$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$: $x^2 > 5 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{5}$.

Les deux propositions sont donc équivalentes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

□

2. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.

Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

Démonstration.

• En choisissant $x_0 = -2$, on remarque que :

- × la proposition $(x_0 < 1)$ est vraie : $x_0 = -2 < 1$.
- × la proposition $(x_0^2 < x_0)$ est fausse : $x_0^2 = (-2)^2 = 4 \geq -2$.

Comme ces deux propositions n'ont pas la même valeur de vérité pour chaque valeur de $x \in \mathbb{R}$, elles ne sont pas équivalentes.

Commentaire

- Comme souvent, il est possible de trouver un contre-exemple même sans la moindre inspiration. Pour cela, on peut commencer par chercher à démontrer l'équivalence entre les deux propositions.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :

× si $x > 0$, alors :

$$x < 1 \Leftrightarrow x \times x < 1 \times x \Leftrightarrow x^2 < x$$

Les deux propositions sont donc équivalentes lorsque x est strictement positif.

× si $x = 0$, alors :

- la proposition $(x < 1)$ est vraie. En effet : $0 < 1$.
- la proposition $(x^2 < x)$ est fausse. En effet : $0^2 = 0 \not< 0$.

Le réel 0 constitue donc un contre-exemple à l'équivalence des deux propositions.

× si $x < 0$, alors :

- la proposition $(x < 1)$ est toujours vraie. En effet, par transitivité :

$$x < 0 < 1$$

- la proposition $(x^2 < x)$ est fausse. En effet :

$$x^2 < x \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} > \frac{x}{x} \Leftrightarrow x > 1$$

Cette dernière assertion est fausse car $x < 0$. Par raisonnement par équivalence, la première aussi. Finalement, tout réel x négatif ou nul constitue donc un contre-exemple à l'équivalence des deux propositions.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
 - × L'implication suivante est fausse : $(x < 1) \Rightarrow (x^2 < x)$.
En effet, en reprenant le point précédent, pour $x_0 = -2$:
 - $(x < 1)$ est vraie,
 - $(x^2 < x)$ est fausse.
 Or l'assertion (**VRAI** $\Rightarrow$ **FAUX**) est fausse.
 - × Démontrons : $(x^2 < x) \Rightarrow (x < 1)$.
Supposons : $x^2 < x$. Alors :

$$x^2 - x < 0$$

$$\text{donc } x(x - 1) < 0$$

Or on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x - 1)$	$+$	0	$-$	$+$

On en déduit : $0 < x < 1$. En particulier : $x < 1$.

□

3. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.
Propositions : $(x_1 + \dots + x_n \leq n^2)$ et $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \leq n)$.

Démonstration.

- En choisissant $n = 2 \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = 4 \in \mathbb{R}_+$ et $x_2 = 0 \in \mathbb{R}_+$, on remarque que :
 - × la proposition $(x_1 + x_2 \leq 2^2)$ est vraie : $x_1 + x_2 = 4 = 2^2 \leq 2^2$.
 - × la proposition $(\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, x_i \leq 2)$ est fausse : $x_1 = 4 > 2$.

Comme ces deux propositions n'ont pas la même valeur de vérité pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, elles ne sont pas équivalentes.

Commentaire

- Lorsqu'on souhaite trouver un contre-exemple, on cherche toujours à ce qu'il soit le plus simple possible. Pour cette question, on va donc essayer de trouver un contre-exemple pour de très petites valeurs de n .
- On commence par étudier le cas $n = 1$.
Il faudrait trouver $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tel qu'exactement l'une des propositions suivantes soit vraie :

$$\begin{array}{ccc}
 (x_1 \leq 1^2) & & (\forall i \in \llbracket 1, 1 \rrbracket, x_i \leq 1) \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 (x_1 \leq 1) & & (x_1 \leq 1)
 \end{array}$$

Il n'est donc pas possible de trouver de contre-exemple dans le cas $n = 1$ puisque les deux assertions sont bien équivalentes.

On se place alors dans le cas $n = 2$ pour notre recherche de contre-exemple.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

× L'implication suivante est fautive : $(x_1 + \dots + x_n \leq n) \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \leq n)$.

En effet, en reprenant le point précédent, pour $n = 2$, $x_1 = 4$ et $x_2 = 0$:

- ▶ $(x_1 + x_2 \leq 2^2)$ est vraie,
- ▶ $(\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, x_i \leq 2)$ est fautive.

Or l'assertion (**VRAI** $\Rightarrow$ **FAUX**) est fautive.

× Démontrons : $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \leq n) \Rightarrow (x_1 + \dots + x_n \leq n^2)$.

Supposons : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \leq n$. Alors, en sommant ces inégalités pour i variant de 1 à n , on obtient :

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n n = n \sum_{i=1}^n 1 = n \times n = n^2$$

□

4. Paramètre : une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Propositions : (f est croissante sur $\mathbb{R}$) et $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$.

Démonstration.

- En choisissant $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$, on remarque :

× la proposition (f est croissante sur $\mathbb{R}$) est fautive :

$$\frac{1}{4} \leq 1 \quad \text{mais} \quad f\left(\frac{1}{4}\right) > f(1)$$

En effet :

- d'une part : $f\left(\frac{1}{4}\right) = \sin\left(2\pi \frac{1}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

- d'autre part : $f(1) = \sin(2\pi \times 1) = \sin(2\pi) = 0$.

× la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$ est vraie. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sin(2\pi(x+1)) \\ &= \sin(2\pi x + 2\pi) \\ &= \sin(2\pi x) && \text{(car la fonction sin est } 2\pi\text{-périodique)} \\ &= f(x) \geq f(x) \end{aligned}$$

Commentaire

- Rappelons la définition de (f est croissante sur $\mathbb{R}$).

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$$

Comme la variable y est quantifiée universellement, on peut choisir $y = x + 1$, ce qui fournit la propriété $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$ (on détaille ce point dans la suite de la question).

Puisqu'on vient de remarquer rapidement :

$$(f \text{ croissante sur } \mathbb{R}) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$$

on sait qu'il faut chercher un contre-exemple à la réciproque de cette implication.

Commentaire

- Lorsqu'on souhaite trouver un contre-exemple, on cherche toujours à ce qu'il soit le plus simple possible. Pour cette question, on essaie de trouver un contre-exemple à l'aide d'une fonction usuelle.

Rappelons que, d'après le point précédent, on cherche une fonction f qui n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ mais qui vérifie $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$.

- La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$ n'est pas très éloignée de la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x))$, i.e. de la définition de (f est 1-périodique).

À défaut d'avoir à portée de main des fonctions 1-périodiques, le cours comporte des exemples de fonctions 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$. C'est le cas des fonctions $\sin$ et $\cos$.

Il reste alors à effectuer une transformation de l'une de ces deux fonctions pour la rendre 1-périodique sur $\mathbb{R}$. C'est l'intérêt de la composition par l'homothétie $x \mapsto 2\pi x$.

On pose alors :

$$f : x \mapsto \sin(2\pi x) \quad \text{ou} \quad g : x \mapsto \cos(2\pi x)$$

Notons que, comme ces deux fonctions sont périodiques sur $\mathbb{R}$, elles ne sont en particulier pas croissantes sur $\mathbb{R}$. Elles constituent donc bien des contre-exemples adaptés à la question.

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 × Démontrons : $(f \text{ croissante sur } \mathbb{R}) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$.
 Supposons que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$x \leq x+1$$

$$\text{donc} \quad f(x) \leq f(x+1) \quad \begin{array}{l} \text{(par croissance} \\ \text{de } f \text{ sur } \mathbb{R}) \end{array}$$

(il s'agit ici d'utiliser l'implication : $((x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y)))$ lorsque $y = x+1$)

- × L'implication suivante est fausse : $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x)) \Rightarrow (f \text{ est croissante sur } \mathbb{R})$.
 En effet, en reprenant le premier point, pour $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$:

- ▶ $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) \geq f(x))$ est vraie,
- ▶ $(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R})$ est fausse.

Or l'assertion **(VRAI $\Rightarrow$ FAUX)** est fausse.

□

Exercice 4

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. (*) Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.

Propositions : $P(x) : (x \geq 0)$ et $Q(x) : (x \geq 1)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- L'implication $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ est fausse.
En effet, en choisissant $x_0 = 0$, on obtient :
 - × d'une part : $x_0 = 0 \geq 0$,
 - × d'autre part : $x_0 = 0 < 1$.Ainsi x_0 vérifie $P(x_0)$ **ET** $\text{NON}(Q(x_0))$.

La proposition $Q(x)$ n'est donc pas une condition nécessaire à $P(x)$.

- Supposons $Q(x) : x \geq 1$.
Alors, par transitivité : $x \geq 1 \geq 0$.
D'où $P(x)$.

La proposition $Q(x)$ est donc une condition suffisante à $P(x)$.

□

2. Paramètre : $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Propositions : $P(a, b) : ((a + b)^2 = a^2 + b^2)$ et $Q(a, b) : (a = b = 0)$.

Démonstration.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- L'implication $(P(a, b) \Rightarrow Q(a, b))$ est fausse.
En effet, en choisissant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on obtient :
 - × d'une part : $(a_0 + b_0)^2 = (1 + 0)^2 = 1$.
De plus : $a_0^2 + b_0^2 = 1^2 + 0^2 = 1$.
Ainsi : $(a_0 + b_0)^2 = a_0^2 + b_0^2$.
 - × d'autre part : $a_0 \neq 0$.Ainsi le couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $P(a_0, b_0)$ **ET** $\text{NON}(Q(a_0, b_0))$.

La proposition $Q(a, b)$ n'est donc pas une condition nécessaire à $P(a, b)$.

- Supposons $Q(a, b) : a = b = 0$. Alors :
 - × d'une part : $(a + b)^2 = (0 + 0)^2 = 0^2 = 0$,
 - × d'autre part : $a^2 + b^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.D'où $P(a, b)$.

La proposition $Q(a, b)$ est donc une condition suffisante à $P(a, b)$.

Commentaire

- Si les deux propositions de l'énoncé ne sont pas équivalentes, les deux suivantes le sont pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
 $\times P(a, b) : (a + b)^2 = a^2 + b^2$.
 $\times q(a, b) : a = 0 \text{ OU } b = 0$
(alors que dans l'énoncé $Q(a, b) : a = 0 \text{ ET } b = 0$)
- En effet, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 P(a, b) &\Leftrightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 \\
 &\Leftrightarrow \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} \\
 &\Leftrightarrow 2ab = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = 0 \text{ OU } b = 0 \\
 &\Leftrightarrow q(a, b)
 \end{aligned}$$

3. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Propositions : $P(a, b, c) : (|a + b + c| = 0)$ et $Q(a, b, c) : (|a + b| + |c| = 0)$.

Démonstration.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- L'implication $(P(a, b, c) \Rightarrow Q(a, b, c))$ est fausse.
 En effet, en choisissant $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = -1$, on obtient :
 $\times$ d'une part : $|a_0 + b_0 + c_0| = |1 + 0 - 1| = |0| = 0$.
 $\times$ d'autre part : $|a_0 + b_0| + |c_0| = |1 + 0| + |-1| = 1 + 1 = 2 \neq 0$.
 Ainsi le triplet (a_0, b_0, c_0) vérifie $P(a_0, b_0, c_0)$ ET NON $Q(a_0, b_0, c_0)$.

La proposition $Q(a, b, c)$ n'est donc pas une condition nécessaire à $P(a, b, c)$.

- Supposons $Q(a, b, c) : |a + b| + |c| = 0$.
 Le réel $|a + b| + |c|$ est donc une somme nulle de deux termes positifs. On en déduit :

$$\begin{aligned}
 |a + b| &= 0 \text{ ET } |c| = 0 \\
 \text{donc } |a + b| &= 0 \text{ ET } c = 0
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$|a + b + c| = |a + b + 0| = |a + b| = 0$$

D'où $P(a, b, c)$.

La proposition $Q(a, b, c)$ est donc une condition suffisante à $P(a, b, c)$.

□

4. Paramètre : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Propositions : $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) : (\forall N \in \mathbb{N}^*, (u_1 - u_0)(u_2 - u_1) \cdots (u_N - u_{N-1}) > 0)$ et
 $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) : (\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante})$.

Démonstration.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Supposons $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) : (\forall N \in \mathbb{N}^*, (u_1 - u_0)(u_2 - u_1) \cdots (u_N - u_{N-1}) > 0)$.
 Démontrons par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} - u_n > 0$.

► **Initialisation**

D'après $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$ appliquée en $N = 1$, on sait : $u_1 - u_0 > 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)$. Et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$).

× Par hypothèse de récurrence : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_{k+1} - u_k > 0$.

En multipliant ces inégalité pour k variant de 0 à n , on obtient :

$$\prod_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) > 0 \quad (\star)$$

× Par ailleurs, d'après $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$ appliquée à $N = n+2$, on sait :

$$\prod_{i=1}^{n+2} (u_i - u_{i-1}) > 0$$

Avec le décalage d'indice $k = i - 1$, on obtient :

$$\prod_{k=0}^{n+1} (u_{k+1} - u_k) > 0$$

Ainsi :

$$\left(\prod_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) \right) \times (u_{n+2} - u_{n+1}) > 0$$

× On en déduit, en utilisant $(\star)$: $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

D'où $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

La proposition $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est donc une condition nécessaire à $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

- Supposons $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) : \text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}$.

Alors : $\forall i \in \mathbb{N}, u_{i+1} - u_i > 0$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En multipliant les inégalités précédentes pour i variant de 0 à $N-1$, on obtient :

$$\prod_{i=0}^{N-1} (u_{i+1} - u_i) > 0$$

Autrement dit :

$$(u_1 - u_0) \cdots (u_N - u_{N-1}) > 0$$

D'où $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

La proposition $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est donc une condition suffisante à $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

□

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. (*) $x + 1 = \sqrt{\frac{x}{6} + 6}$

2. $\pi^{3x} - 3 \times \pi^x + 2 = 0$

3. (*) $\sqrt{x-1} \leq |x| + 1$

4. $|3x^2 + 2x - 1| < |-x^2 + 2x + 3|$

Démonstration.

1. Résolvons l'équation (1).

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(1)}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{L'équation (1) est bien définie} &\Leftrightarrow \frac{x}{6} + 6 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{6} \geq -6 \\ &\Leftrightarrow x \geq -36 \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{D}_{(1)} = [-36, +\infty[.$

- Soit $x \in [-36, +\infty[.$
On procède par disjonction de cas selon le signe de $(x+1)$ (car, comme une racine est toujours positive, on a toujours : $\sqrt{\frac{x}{6} + 6} \geq 0$).

On remarque :

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

Comme $-1 \in [-36, +\infty[$, deux cas se présentent :

- × si $x \in [-36, -1[$, alors :
- d'une part : $x + 1 < 0$,
- d'autre part : $\sqrt{\frac{x}{6} + 6} \geq 0$.

L'équation (1) n'admet donc pas de solution sur $[-36, -1[$.

- × si $x \geq -1$, alors :

$$\begin{aligned} x + 1 &= \sqrt{\frac{x}{6} + 6} \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 &= \left(\sqrt{\frac{x}{6} + 6}\right)^2 \quad (\text{par injectivité de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+) \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= \frac{x}{6} + 6 \\ \Leftrightarrow 6(x^2 + 2x + 1) &= 6\left(\frac{x}{6} + 6\right) \\ \Leftrightarrow 6x^2 + 12x + 6 &= x + 36 \\ \Leftrightarrow 6x^2 + 11x - 30 &= 0 \end{aligned}$$

On note Δ le discriminant du polynôme $6X^2 + 11X - 30$. Alors :

$$\Delta = 11^2 - 4 \times 6 \times (-30) = 121 + 24 \times 30 = 121 + 720 = 841$$

Le polynôme $6X^2 + 11X - 30$ admet donc 2 racines réelles, notée x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{841}}{2 \times 6} = \frac{-11 - 29}{12} = -\frac{40}{12} = -\frac{\cancel{4} \times 10}{\cancel{4} \times 3} = -\frac{10}{3}$$

$$x_2 = \frac{-11 + \sqrt{841}}{2 \times 6} = \frac{-11 + 29}{12} = \frac{18}{12} = \frac{\cancel{6} \times 3}{\cancel{6} \times 2} = \frac{3}{2}$$

Or $-\frac{10}{3} < -1$. Comme on se place dans le cas $x \geq -1$, on en déduit :

$$6x^2 + 11x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Ainsi, l'équation (1) admet $\frac{3}{2}$ comme unique solution sur $[-1, +\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est donc : $\{\frac{3}{2}\}$.

Commentaire

On rappelle : $u = v \not\Leftrightarrow u^2 = v^2$.

En toute généralité, comme $\sqrt{u^2} = |u|$ (pour tout $u \in \mathbb{R}$), on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad (|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2)$$

C'est pourquoi on procède par disjonction de cas pour résoudre cette inéquation, en fonction du signe des quantités que l'on considère (ici $(x+1)$ et $\sqrt{\frac{x}{6}+6}$).

2. Résolvons l'équation (2).

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(2)}$.

Il n'y a aucun problème de définition dans cette équation.

Ainsi : $\mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\pi^{3x} - 3\pi^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (\pi^x)^3 - 3\pi^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 3y + 2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{avec le changement de} \\ \text{variable } y = \pi^x \end{array} \right)$$

On remarque que 1 est racine évidente du polynôme $X^3 - 3X + 2$. On en déduit la factorisation :

$$X^3 - 3X + 2 = (X - 1)(X^2 + X - 2)$$

On remarque de nouveau que 1 est racine évidente du polynôme $X^2 + X - 2$. On en déduit la factorisation :

$$X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2)$$

Finalement :

$$X^3 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 1)(X + 2) = (X - 1)^2(X + 2)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 y^3 - 3y + 2 &= 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(y+2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow y-1=0 \text{ OU } y+2=0 \\
 &\Leftrightarrow y=1 \text{ OU } y=-2 \\
 &\Leftrightarrow \pi^x = 1 \text{ OU } \pi^x = -2 \quad (\text{car } y = \pi^x) \\
 &\Leftrightarrow \pi^x = 1 \quad (\text{car } \pi^x \geq 0) \\
 &\Leftrightarrow e^{x \ln(\pi)} = 1 \\
 &\Leftrightarrow x \ln(\pi) = \ln(1) = 0 \quad (\text{par injectivité de } \exp \text{ sur } \mathbb{R}) \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{0}{\ln(\pi)} = 0
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc : $\{0\}$.

Commentaire

- Revenons sur la factorisation : $X^3 - 3X + 2 = (X-1)(X^2 + X - 2)$. Il s'agit en fait d'une identification. Détaillons la.

Comme le polynôme $P(X) = X^3 - 3X + 2$ de degré 3 admet 1 pour racine évidente, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que :

$$P(X) = (X-1)Q(X)$$

Comme Q est de degré 2, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$Q(X) = aX^2 + bX + c$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 P(X) &= (X-1)Q(X) \Leftrightarrow X^3 - 3X + 2 = (X-1)(aX^2 + bX + c) \\
 &\Leftrightarrow X^3 - 3X + 2 = aX^3 + bX^2 + cX - aX^2 - bX - c \\
 &\Leftrightarrow X^3 - 3X + 2 = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ -a + b &= 0 \\ -b + c &= -3 \\ -c &= 2 \end{cases} \quad (\text{par identification des coefficients}) \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 1 \\ -b + c &= -3 \\ -c &= 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit : $Q(X) = 1 \times X^2 + 1 \times X - 2$. On retrouve alors bien la factorisation :

$$P(X) = (X-1)(X^2 + X - 2)$$

Commentaire

- Notons que certains coefficients du polynôme Q pouvait être obtenus avant d'effectuer le moindre calcul.
- × Tout d'abord, le produit des coefficients dominants de $X - 1$ et Q doit être égal au coefficient dominant de P . Autrement dit, avec nos notations : $1 \times a = 1$
On en déduit que le coefficient dominant de Q est 1.
- × Ensuite, le produit des coefficients constants de $X - 1$ et Q doit être égal au coefficient constant de P . Autrement dit, avec nos notations : $(-1) \times c = 2$.
On en déduit que le coefficient dominant de Q est -2 .
- À ce stade, on sait, sans avoir fait aucun calcul, que Q s'écrit de la façon suivante :

$$Q(X) = X^2 + bX - 2$$

Le seul coefficient à trouver par identification est donc le coefficient b .

3. Résolvons l'inéquation (3).

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(3)}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{L'inéquation (3) est bien définie} \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Ainsi : $\mathcal{D}_{(3)} = [1, +\infty[$.

- Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \leq |x| + 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq x + 1 && (\text{car } x \geq 1 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-1})^2 \leq (x+1)^2 && (\text{par stricte croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+ \text{ (car } x+1 \geq 0)) \\ &\Leftrightarrow x-1 \leq x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

On note Δ le discriminant du polynôme $X^2 + X + 2$. Alors :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 < 0$$

Le polynôme $X^2 + X + 2$ n'admet pas de racine et son coefficient dominant est strictement positif.
On en déduit que l'assertion $(0 \leq x^2 + x + 2)$ est toujours vraie.
Par raisonnement par équivalence, la première assertion l'est également.

L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est donc : $\mathcal{D}_{(3)} = [1, +\infty[$.

4. Résolvons l'inéquation (4).

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(4)}$.
Il n'y a aucun problème de définition dans cette inéquation.

Ainsi : $\mathcal{D}_{(4)} = \mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

On résout l'inéquation (4) par disjonction de cas selon le signe des termes $(3x^2 + 2x - 1)$ et $(-x^2 + 2x + 3)$.

- × d'une part, on remarque que -1 est racine évidente du polynôme $3X^2 + 2X - 1$. On en déduit la factorisation :

$$3X^2 + 2X - 1 = 3 \left(X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{1}{3} \right) = 3(X - (-1)) \left(X - \frac{1}{3} \right) = 3(X + 1) \left(X - \frac{1}{3} \right)$$

On obtient alors le signe du trinôme $3x^2 + 2x - 1$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
Signe de $3x^2 + 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

- × d'autre part, on remarque que -1 est racine évidente du polynôme $-X^2 + 2X + 3$. On en déduit la factorisation :

$$-X^2 + 2X + 3 = -(X^2 - 2X - 3) = -(X - (-1))(X - 3) = -(X + 1)(X - 3)$$

On obtient alors le signe du trinôme $-x^2 + 2x + 3$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
Signe de $-x^2 + 2x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
$3x^2 + 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x^2 + 2x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

Trois cas se présentent alors :

- × si $x \in]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$, alors :

- d'une part : $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$,
- d'autre part : $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 |3x^2 + 2x - 1| < |-x^2 + 2x + 3| &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 < -(-x^2 + 2x + 3) \\
 &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 + (-x^2 + 2x + 3) < 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 < 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) < 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 < 0 \\
 &\Leftrightarrow (x + 1)^2 < 0
 \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est fausse (un carré est toujours positif ou nul). Par raisonnement par équivalence, la première aussi.

L'inéquation (4) n'admet donc pas de solution sur $] -\infty, -1] \cup]3, +\infty[$.

× si $x \in]-1, \frac{1}{3}]$, alors :

- d'une part : $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$,
- d'autre part : $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 |3x^2 + 2x - 1| < |-x^2 + 2x + 3| &\Leftrightarrow -(3x^2 + 2x - 1) < -x^2 + 2x + 3 \\
 &\Leftrightarrow 0 < (3x^2 + 2x - 1) - x^2 + 2x + 3 \\
 &\Leftrightarrow 0 < 2x^2 + 4x + 2 \\
 &\Leftrightarrow 0 < 2(x^2 + 2x + 1) \\
 &\Leftrightarrow 0 < x^2 + 2x + 1 \\
 &\Leftrightarrow 0 < (x + 1)^2
 \end{aligned}$$

Comme $x \neq -1$, alors cette dernière assertion est toujours vraie. En effet, un carré est toujours positif ou nul et :

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Par raisonnement par équivalence, la première assertion est également vraie.

L'inéquation (4) admet donc pour solution tous les réels de l'intervalle $] -1, \frac{1}{3}]$.

× si $x \in]\frac{1}{3}, 3]$, alors :

- d'une part : $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$,
- d'autre part : $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 |3x^2 + 2x - 1| < |-x^2 + 2x + 3| &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 < -x^2 + 2x + 3 \\
 &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 - (-x^2 + 2x + 3) < 0 \\
 &\Leftrightarrow 3x^2 + \cancel{2x} - 1 + x^2 - \cancel{2x} - 3 < 0 \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 - 4 < 0 \\
 &\Leftrightarrow 4(x^2 - 1) < 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) < 0
 \end{aligned}$$

On a par ailleurs le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 1)(x + 1)$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi :

$$(x - 1)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow x \in] -1, 1[$$

L'inéquation (4) admet donc pour solution tous les réels de l'ensemble $] -1, 1[\cap]\frac{1}{3}, 3] =]\frac{1}{3}, 1[$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation (4) est : $] -1, \frac{1}{3}] \cup]\frac{1}{3}, 1[=] -1, 1[$.

Exercice 6

1. Sommes de Mengoli

a) (*) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \quad (\text{par télescopage}) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Commentaire

- Détaillons le télescopage.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \quad (\text{avec le décalage d'indice } i = k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \quad (\text{car } i \text{ est une variable muette}) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \sum_{k=2}^n \cancel{\frac{1}{k}} \right) - \left(\sum_{k=2}^n \cancel{\frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la décomposition :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

est extrêmement classique et qu'il faut donc la mémoriser.

□

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

En s'inspirant de la question précédente, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)}$.

Commentaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire plus proprement cette somme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)} = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^p \frac{1}{k+i} \right)$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)} &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (k+p)} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=1}^p \frac{1}{k+i} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{j=0}^{p-1} \frac{1}{k+(j+1)} \right) \quad (\text{avec le décalage} \\ &\quad \text{d'indice } j = i - 1) \\ &= \frac{1}{p} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i} \right) \quad (\text{car } j \text{ est une} \\ &\quad \text{variable muette}) \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{p} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i} \right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i} \right) \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} \right) - \sum_{j=2}^{n+1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{j+i} \right) \right) \quad (\text{avec le décalage} \\ &\quad \text{d'indice } j = k + 1) \\ &= \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} \right) - \sum_{k=2}^{n+1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} \right) \right) \quad (\text{car } j \text{ est une} \\ &\quad \text{variable muette}) \\ &= \frac{1}{p} \left(\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{1+i} + \sum_{k=2}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} \right) \right) - \left(\sum_{k=2}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} \right) + \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+1+i} \right) \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i+1} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+1+i} \right) \end{aligned}$$

- Enfin, on calcule :

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i+1} &= \prod_{j=1}^p \frac{1}{j} && (\text{avec le décalage} \\ &&& \text{d'indice } j = i + 1) \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^p j} = \frac{1}{p!} \end{aligned}$$

De plus :

$$\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+1+i} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)}$$

$$\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)} \right).$$

Commentaire

- On a ici détaillé ce télescope plus ardu. Toutefois, l'égalité suivante peut suffire à obtenir la totalité des points alloués à ce télescope.

$$\sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i} \right) = \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{1+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+i}$$

Il s'agit en effet d'appliquer l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1}$$

dans le cas où la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, v_k = \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'égalité :

$$\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+p)} \right)$$

n'est pas classique et n'est donc pas à retenir. Pour en avoir l'idée, on se laisse ici guider par l'énoncé qui nous suggère d'obtenir une égalité similaire à celle de la question précédente. □

2. Minimum et maximum

- a) (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \min(i, j) \right)$$

- Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \min(i, j) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \leq i}}^n \min(i, j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^n \min(i, j) \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \leq i}}^n j + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^n i \\
 &= \sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i \\
 &= \frac{i(i+1)}{2} + i \sum_{j=i+1}^n 1 \\
 &= \frac{i(i+1)}{2} + i(n - (i + \textcolor{red}{1}) + \textcolor{red}{1}) \\
 &= \frac{i(i+1)}{2} + i(n - i) \\
 &= \frac{i^2 + i}{2} + ni - i^2 \\
 &= -\frac{1}{2} i^2 + \left(\frac{1}{2} + n\right) i
 \end{aligned}$$

On obtient : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n \min(i, j) = -\frac{1}{2} i^2 + \frac{2n+1}{2} i$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \min(i, j) \right) &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2} i^2 + \frac{2n+1}{2} i \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^n i \\
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \times 2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \times \textcolor{red}{2}} \times \frac{\textcolor{red}{2}}{3}
 \end{aligned}$$

Finalement : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Tout d'abord :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \max(i, j) \right)$$

- Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \max(i, j) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \leq i}}^n \max(i, j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^n \max(i, j) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \leq i}}^n i + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^n j \\ &= \sum_{j=1}^i i + \sum_{j=i+1}^n j \\ &= i \sum_{j=1}^i 1 + \frac{(n - (i + \cancel{1}) + \cancel{1})(n + (i + 1))}{2} \\ &= i \times i + \frac{(n - i)(n + i + 1)}{2} \\ &= i^2 + \frac{n^2 + \cancel{i}n + n - \cancel{i}n - i^2 - i}{2} \\ &= \frac{1}{2} i^2 - \frac{1}{2} i + \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n \max(i, j) = \frac{1}{2} i^2 - \frac{1}{2} i + \frac{n(n+1)}{2}}$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \max(i, j) \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} i^2 - \frac{1}{2} i + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} + n \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{3}{6} + \frac{6n}{6} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{8n-2}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}(4n-1)}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.}$$

□

b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i + j = \min(i, j) + \max(i, j)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (i + j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\min(i, j) + \max(i, j)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \min(i, j) + \sum_{j=1}^n \max(i, j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \min(i, j) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \max(i, j) \right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \quad (d'après la question précédente) \\ &= \frac{n(n+1)}{6} ((2n + \textcolor{red}{1}) + (4n - \textcolor{red}{1})) \\ &= \frac{n(n+1)}{\textcolor{red}{6}} \times (\textcolor{red}{6}n) \end{aligned}$$

Finalement : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) = n^2(n+1)$.

Commentaire

L'énoncé demandait explicitement d'utiliser la question précédente. On peut néanmoins déterminer la valeur de la double somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)$ sans connaître les deux doubles sommes de la question précédentes. On procéderait de la façon suivante.

- Tout d'abord, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (i + j) &= \sum_{j=1}^n i + \sum_{j=1}^n j \\ &= i \sum_{j=1}^n 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= ni + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Commentaire

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (i + j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= n \sum_{i=1}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= n \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times n \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} \\ &= n^2(n+1)\end{aligned}$$

□

Exercice 7

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 3$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n > 3$.

► **Initialisation** :

D'après l'énoncé : $u_0 = 4 > 3$.

D'où : $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. : $u_{n+1} > 3$).

On remarque :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$$

On cherche à démontrer : $u_{n+1} - 3 > 0$. Autrement dit : $\frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2} > 0$.

× d'une part, par hypothèse de récurrence : $u_n > 3$. Donc : $u_n + 2 > 5 > 0$.

× d'autre part, on note Δ le discriminant du polynôme P défini par : $P(X) = 2X^2 - 3X - 9$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81$$

Les racines de P sont donc :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{81}}{4} = \frac{3 - 9}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{81}}{4} = \frac{3 + 9}{4} = 3$$

On en déduit : $2u_n^2 - 3u_n - 9 = (u_n - 3)(2u_n + 3)$. Par hypothèse de récurrence : $u_n - 3 > 0$.

De plus : $2u_n + 3 > 2 \times 3 + 3 > 0$.

On en déduit : $2u_n^2 - 3u_n - 9 > 0$.

On en conclut :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2} > 0$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 3$.

□

2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Tout d'abord, en reprenant les calculs de la question précédente, on remarque :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$$

Il reste donc à démontrer : $\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} > \frac{3}{2}$.

- On remarque :

$$\begin{aligned}\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} > \frac{3}{2} &\Leftrightarrow 2(2u_n + 3) > 3(u_n + 2) \quad (\text{car : } 2(u_n + 2) > 0) \\ &\Leftrightarrow 4u_n + \cancel{6} > 3u_n + \cancel{6} \\ &\Leftrightarrow u_n > 0\end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie d'après la question précédente.

Ainsi, par raisonnement par équivalence, la première assertion l'est aussi. On en déduit :

$$\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} > \frac{3}{2}$$

Or : $u_n - 3 > 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2} &> \frac{3}{2}(u_n - 3) \\ &\parallel \\ &u_{n+1}\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

□

3. (*) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.

Démonstration.

Déontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.

► **Initialisation** :

× D'une part : $u_0 = 4$.

× D'autre part : $\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 3 = 3$.

Ainsi : $u_0 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^0 + 3$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. : $u_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 3$)

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 3 &> \frac{3}{2}(u_n - 3) \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &\geq \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

On en déduit : $u_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 3$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.

□

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Démonstration.

On remarque :

× d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$,

× puisque : $\frac{3}{2} > 1$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3 = +\infty$.

Par théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

□