TP3 : Résolution approchée d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1 et 2 - Méthode d'Euler

I. Équations différentielles d'ordre 1

I.1. Aspect théorique

- On appelle équation différentielle d'ordre 1 toute équation de la forme :

$$y' = f(t, y), \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \forall t \in I,\ y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$$

  × l'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
  × $f : I \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $I \times \mathbb{R}$.

- On appelle problème de Cauchy en $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ le système :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.}$$

  Sous certaines conditions (par exemple le caractère $\mathcal{C}^1$ de f sur I), on peut démontrer que le problème de Cauchy possède une unique solution.

I.2. Aspect pratique

I.2.a) Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1

Le théorème précédent (dit de Cauchy-Lipschitz) affirme que le problème de Cauchy admet une unique solution. Cependant, cette solution n'admet pas forcément une expression simple.

La forme de la fonction f permet parfois de pouvoir expliciter les solutions.

- On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute équation de la forme :

$$y' + a(t)y \ = \ b(t)$$

  × l'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
  × les fonctions $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont définies et continues sur l'intervalle I,
  × lorsque $b = 0$ (la fonction b est identiquement nulle), on dit que l'équation est homogène.

- Le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & b - ay \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$ admet une unique solution y définie sur I dont l'expression est :

$$\boxed{\forall t \in I,\ y(t) \ = \ y_0 \ \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\ ds\right)}$$

- La solution de l'équation générale (avec second membre) s'obtient, en vertu du principe de superposition des solutions, par l'ajout d'une solution particulière. Cette solution particulière est déterminée :
  × soit car il existe une solution évidente,
  (on est aussi parfois amené à chercher une solution particulière d'une certaine forme)
  × soit à l'aide de la méthode de variation de la constante.
  (on procède alors par analyse-synthèse)

Exemple *(Dynamique d'une population sans compétition pour la nourriture)*
En l'absence de prédateurs et avec une nourriture abondante, l'évolution d'une famille de lapins suit un modèle de Malthus :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & ry \\ y(0) & = & 2 \end{array}\right. \qquad \text{où } r \in \mathbb{R}_+$$

- Résoudre cette équation.

- On souhaite maintenant obtenir la représentation graphique de cette fonction.
  À l'aide de quelle fonction peut-on obtenir le tracé d'une courbe en **Python** ?
  Rappeler brièvement son fonctionnement.

- Dans la même fenêtre graphique, représenter la solution du système de Malthus pour $r_1 = \ln(2)$ et $r_2 = 1$. La première courbe devra être représentée en rouge et la seconde en bleu. On effectuera le tracé sur l'intervalle $[0, 10]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

r1 =
r2 =

X =
Y1 =
Y2 =

plt.clf()
plt.plot(                                                    )
plt.plot(                                                 )

plt.xlabel(‘Temps‘)
plt.ylabel(‘Évolution de la population‘)
plt.title(‘Solutions du système de Malthus‘)
plt.legend()
plt.show()
```

I.2.b) Résolution approchée par la méthode d'Euler

Les équations différentielles n'ont pas toujours de solutions explicites. Cependant, en tout point, on peut connaître la valeur **approchée** de la solution à un problème de Cauchy.

Pour ce faire, on utilise des méthodes numériques telles que la **méthode d'Euler**.

Principe de la méthode d'Euler

On cherche ici à connaître une solution approchée d'un problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$ sur un intervalle $I = [a, b]$ où : $b > a$.

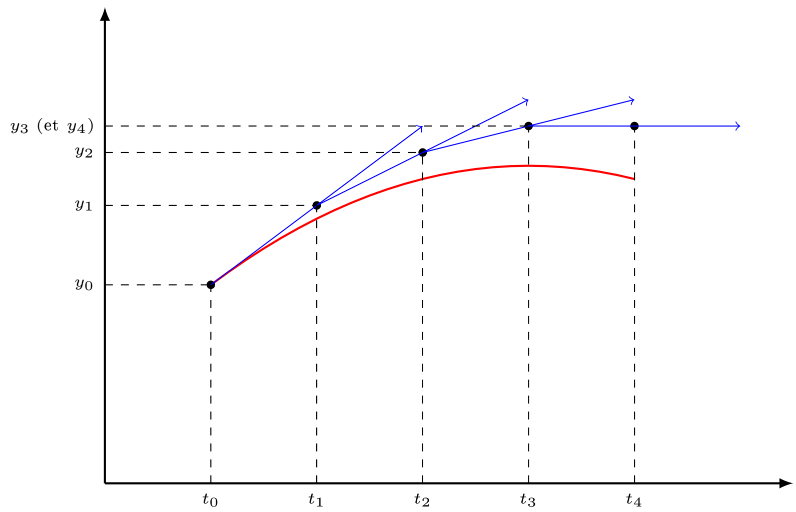
- On commence par découper l'intervalle $[a, b]$ à l'aide de $N+1$ points régulièrement espacés d'un pas de $h = \dfrac{b-a}{N}$.

$$t_0 = a, \quad t_1 = a + h, \quad t_2 = a + 2h, \quad \dots \quad , \quad t_k = a + kh, \quad \dots \quad , \quad t_N = b$$

- On cherche alors à déterminer, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, une valeur y_k telle que $y_k \simeq y(t_k)$.
  (y_k est une valeur approchée de $y(t_k)$)

  Pour ce faire, on approche la fonction f par une constante sur chaque sous-intervalle de la subdivision.

  Approche naïve de la méthode d'Euler
  En partant de y_k (valeur approchée de $y(t_k)$), l'idée est de « suivre » la tangente au point $\big(t_k, y(t_k)\big)$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_y$ de y, jusqu'au point d'abscisse t_{k+1}. Cela revient à considérer que la fonction $f\big(\cdot, y(\cdot)\big)$ est constante égale à $f(t_k, y_k)$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$. L'ordonnée obtenue est alors une valeur approchée de $y(t_{k+1})$, que l'on notera y_{k+1}.
  On peut illustrer cette idée par la figure ci-dessous.



  Plus précisément, on écrit :

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}], \; f(t, y(t)) \; \simeq \; f(t_k, y(t_k)) \; \simeq \; f(t_k, y_k)$$

  (cela correspond à l'approximation faite dans la méthode des rectangles)

- Les valeurs de t_k s'obtiennent en remarquant que :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) \; = \; \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t) \; dt \; = \; \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) \; dt$$

- Avec les approximations mentionnées, on est amené à poser :

$$y_{k+1} - y_k \ = \ \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, y_k)\ dt \ = \ (t_{k+1} - t_k) \times f(t_k, y_k)$$

Autrement dit, on considère :

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], \ \boxed{y_{k+1} \ = \ y_k \ + \ h \times f(t_k, y_k)}$$

► Écrire en **Python** la fonction `euler(f, y0, a, b, N)` qui renvoie le couple `(T, Y)` où `T` est la liste des réels t_k et `Y` est la liste des réels y_k.

On souhaite maintenant tester la fonction `euler` sur le système de Malthus précédent.
Pour ce faire, il suffit essentiellement de coder la fonction $f : (t, y) \mapsto f(t, y)$.

► Écrire en **Python** la fonction f de l'exemple ***I.2.a)***. .

- ▶ Tester la fonction **euler** sur l'exemple.
  On se placera sur l'intervalle $[0, 10]$ ($a = 0$ et $b = 10$) et on tracera sur le même graphique la solution obtenue avec une subdivision en 10 points, en 100 points et en 1000 points.

```
r = np.log(2)
a =
b =
N1 =
N2 =
N3 =

X =
(T1, Y1) =
(T2, Y2) =
(T3, Y3) =

Y =

plt.clf()
plt.plot(                                                    )
plt.plot(                                                            )
plt.plot(                                                            )
plt.plot(                                                            )

plt.xlabel('Temps')
plt.ylabel('Évolution de la population')
plt.title('Solutions du système de Malthus')
plt.legend()
plt.show()
```

Remarque

- L'exemple précédent a un intérêt pratique : comme l'on sait déterminer de manière explicite la solution exacte, on peut la comparer à la méthode d'Euler pour se convaincre de son bon fonctionnement.
- Évidemment, cette utilisation est artificielle. La méthode d'Euler est utilisée pour trouver des solutions approchées à des équations différentielles plus compliquées.

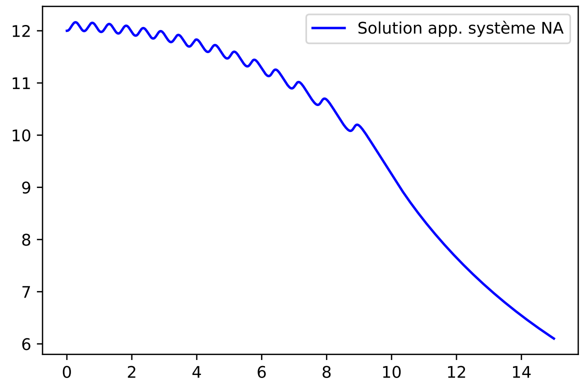
Exemple

L'équation différentielle : $y' = \sin(ty)$ est dite **non autonome**.
En effet, la fonction $f : (t, y) \mapsto f(t, y) = \sin(ty)$ dépend de t.

- ▶ Tester la fonction **euler** sur ce nouvel exemple.
  On se placera sur l'intervalle $[0, 15]$ ($a = 0$ et $b = 15$) et on choisira $y_0 = 12$ et $N = 1000$.

```
def g(t, y) :
    return
a =
b =
N =
(T, Y) =
plt.clf()
plt.plot(                                                              )
```

On obtient le diagramme suivant :



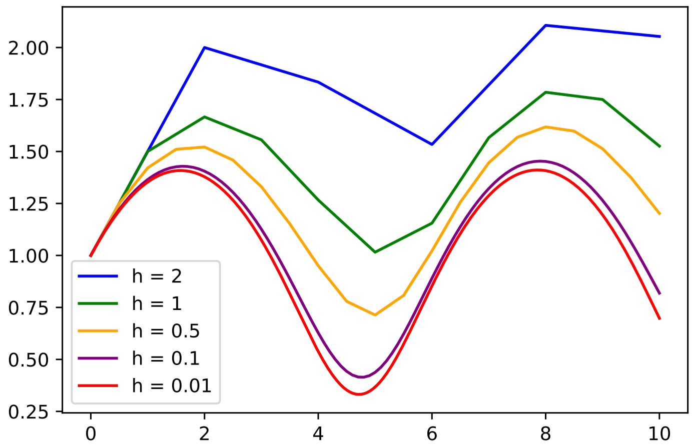
Exercice 1
On considère le problème de Cauchy suivant, définie sur l'intervalle $[0, 10]$:

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{\cos(t)}{1+y^2} \\ \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Le graphique ci-dessous fait apparaitre les courbes obtenues en appliquant la méthode d'Euler, avec les pas suivants :

$$h = 2, \quad h = 1, \quad h = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{1}{10}, \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{100}$$

On observe bien la convergence de la ligne polygonale vers la courbe représentative de la solution.
Écrire un programme **Python**, utilisant la fonction `euler` et permettant d'obtenir le graphe ci-dessous.



II. Équations différentielles d'ordre 2

II.1. Aspect théorique

- On appelle équation différentielle d'ordre 2 toute équation de la forme :

$$y'' = f(t, y, y'), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall t \in I,\ y''(t) = f\big(t, y(t), y'(t)\big)$$

  × l'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
  × $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- On appelle problème de Cauchy en $(t_0, y_0, \dot{y_0}) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y'' &=& f(t, y, y') \\ y(t_0) &=& y_0 \\ y'(t_0) &=& \dot{y_0} \end{array}\right.}$$

  Sous certaines conditions (par exemple le caractère $\mathcal{C}^2$ de f), on peut démontrer que le problème de Cauchy possède une unique solution.

II.2. Aspect pratique

II.2.a) Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à cœfficients constants

Le théorème précédent (dit de Cauchy-Lipschitz) affirme que le problème de Cauchy admet une unique solution. Cependant, cette solution n'admet pas forcément une expression simple.

La forme de la fonction f permet parfois de pouvoir expliciter les solutions.

- On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à cœfficients **constants** toute équation de la forme :

$$y'' + ay' + by \ = \ m$$

  × l'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
  × a et b sont des réels,
  × $m : t \mapsto m(t)$ est une fonction continue sur I.

- Le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{rcl} y'' &=& -ay' - by \\ y(t_0) &=& y_0 \\ y'(t_0) &=& \dot{y_0} \end{array}\right.$ admet une unique solution y sur I dont l'expression est donnée en fonction des solutions λ et μ de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.
  (cf cours)

- La solution de l'équation générale (avec second membre) s'obtient, en vertu du principe de superposition des solutions, par l'ajout d'une solution particulière. Cette solution particulière est déterminée :
  × soit car il existe une solution évidente,
  (on est aussi parfois amené à chercher une solution particulière d'une certaine forme)
  × soit à l'aide de la méthode de variation des constantes.
  (on procède alors par analyse-synthèse)

II.2.b) Résolution approchée à l'aide de la méthode d'Euler

La méthode précédente peut s'adapter au cas de l'ordre 2.

En effet, en notant $Z : t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ on obtient $Z' : t \mapsto \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ et l'équation différentielle d'ordre 2 précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\forall t \in I,\ \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Autrement dit : $\boxed{Z' \ = \ A \times Z}$
On a alors de nouveau affaire à une équation différentielle d'ordre 1 !

L'idée est donc d'adapter la méthode d'Euler scalaire précédente à ce cas matriciel.
Commençons par les opérations sur les tableaux de la bibliothèque `numpy`.

- Quel est le résultat renvoyé par l'appel `(1,2) + (4,5)` ? Et `[1,2] + [4,5]` ?
  Comment se nomme l'opérateur `+` dans ce cas ?

- Quel est le résultat de l'appel `2 * np.array([0,1]) + np.array([3,0])` ? Commenter.

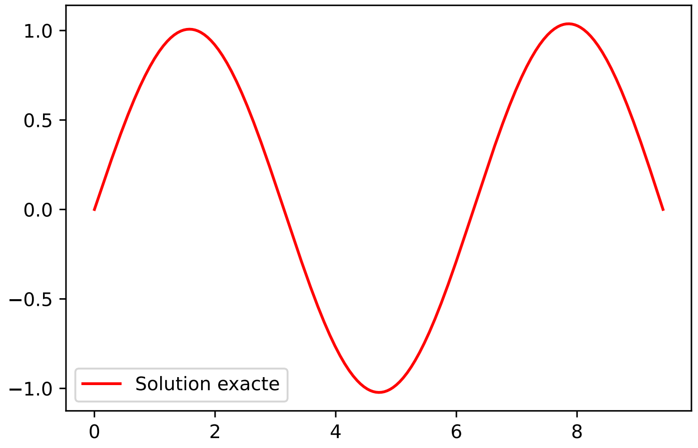
- Adapter la méthode d'Euler pour résoudre une équation du type $Z' \ = \ A \times Z$.
  Il s'agit donc d'écrire en **Python** la fonction `euler_ordre2(f, y0, yp0, a, b, N)` qui renvoie le couple `(T, Z)` où `T` est la liste des points t_k et `Z` est la liste des vecteurs $\begin{pmatrix} y_k \\ \dot{y}_k \end{pmatrix}$.

On souhaite maintenant tester cette méthode sur l'équation différentielle $y'' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, dont on sait que la solution est la fonction sinus.

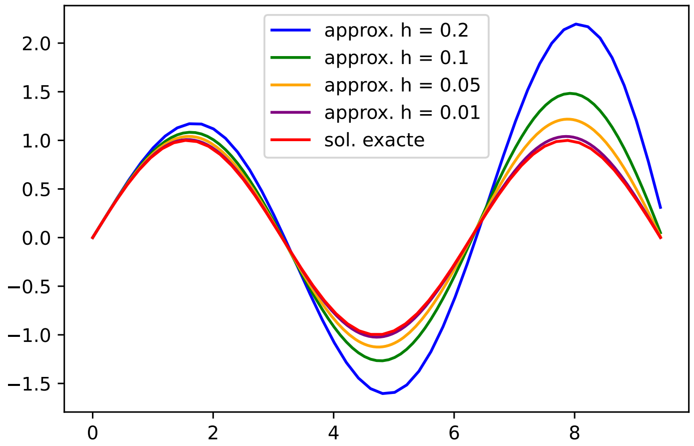
- Quelle est la fonction $f : (t, Z) \mapsto f(t, Z)$ dans ce cas ?

- En déduire l'appel nécessaire pour obtenir la solution approchée au système de Cauchy $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

  On effectuera le tracé sur l'intervalle $[0, 3\pi]$ et on prendra $N = 100$.

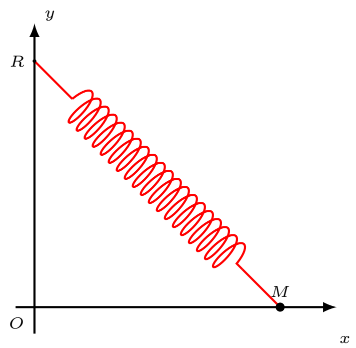


Remarque
Naturellement, plus le pas est petit, plus la solution est précise, comme on peut encore le voir sur la figure ci-dessous.



Exercice 2

On s'intéresse au système mécanique suivant : un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k. La masse peut coulisser sans frottement sur une tige. On repère la position de la masse sur cette tige par l'abscisse x dont l'axe est confondu avec la tige, et dont l'origine O est située sur la même verticale que le point d'attache R fixe du ressort. On appelle d la distance OR.



On peut démontrer que le mouvement est régi par l'équation :

$$m\,x'' + k\,x' - \frac{k\,\ell_0\,x}{\sqrt{x^2+d^2}} \;=\; 0 \qquad (*)$$

1. Déterminer une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que l'équation $(*)$ se mette sous la forme $Y' = f(t, Y)$, avec $Y : t \mapsto \big(x(t), x'(t)\big)$.

2. Écrire une fonction `Euler`, qui prend en paramètres :

- une fonction `f`,
- des réels `a`, `b`, `x0` et `x0prime`,
- un réel `h` strictement positif,

qui renvoie deux listes `liste_t` et `liste_x`, et qui permet, en utilisant la méthode d'Euler de pas h, de résoudre de manière approchée l'équation $Y' = f(t, Y)$, sur l'intervalle $[a, b]$ avec les conditions initiales :

$$x(a) = x_0 \qquad \text{et} \qquad x'(a) = x'_0$$

3. On prend les valeurs numériques suivantes :

- $m = 300$ g,
- $k = 5$ N·m^{-1},
- $\ell_0 = 20$ cm,
- $d = 10$ cm,
- $x'(0) = 0$ m·s^{-1}.

En choisissant judicieusement différentes valeurs de $x(0)$, montrer qu'avec les valeurs ci-dessus, le système admet :

- un équilibre instable si $x(0) = 0$,
- un équilibre stable si $x(0) = \pm\sqrt{\ell_0^2 - d^2}$.