Structure algébrique de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n.

1. Montrer que P' divise P si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$(X-\lambda)\,P'(X) \;=\; n\,P(X)$$

2. En déduire les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.
*On pourra décomposer le polynôme P introduit en question **1.** sur la famille $\big(1, X-\lambda, \ldots, (X-\lambda)^n\big)$.*

Exercice 2

Donner les coefficients dominants, constants et le degré des polynômes suivants ($n \in \mathbb{N}^*$) :

a) $(X-1)^n - (X+1)^n$,

b) $(1-X^4)^5 + (X^4-1)^4$,

c) $(1-X^3)^5 + (X^5-1)^3$,

d) $(X^2+1)^{3n+1} - (X^2-1)^{3n+1}$

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ en fonction du degré de P.

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) = P(n+1)$. Montrer que $\deg(P) \leqslant 0$.

Fonctions polynomiales, racines

Exercice 5

On considère le polynôme P défini par $P(X) = 3X^2 - X - 2$.

a. Montrer que 1 est une racine de P, et trouver un polynôme Q tel que : $P(X) = (X-1)Q(X)$.

b. Étudier le signe de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x$.

2. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \bar{z}$.

Exercice 7

Pour $T \in \mathbb{C}^*$, déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est T-périodique.

Exercice 8

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples.
On pourra raisonner par récurrence en remarquant que $E'_{n+1} = E_n$.

Exercice 9

L'objectif de l'exercice est de déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = P(X)\,P(X+1) \quad (*)$.

1. Déterminer les polynômes constants solutions de $(*)$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P.

a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, z^{2k} est racine de P.

b) Démontrer : $|z| \in \{0, 1\}$.

c) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(z-1)^{2k}$ est racine de P. Que peut-on en déduire quant à $|z-1|$?

d) En déduire les seules racines possibles de P.

3. Conclure quant aux solutions de $(*)$.

Exercice 10

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$. On pourra en particulier s'intéresser à une racine de module maximal d'un polynôme P non nul satisfaisant l'équation.

Exercice 11
Soit $p \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2p+1$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0, 2p+1]\!]$, $P^{(k)}(0) < 0$.

1. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

2. Montrer que toutes les racines réelles de P sont strictement négatives.

Exercice 12
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On pose :

$$P(X) \;=\; \left((X-a)^n\,(X-b)^n\right)^{(p)}$$

Un des objectifs de l'exercice est de calculer la valeur prise par la fonction polynomiale $\tilde{P}$ associée à P au point a.

1. On suppose : $p > 2n$. Que vaut P ? Conclure quant à l'objectif de cet exercice.

2. On suppose : $p < n$. Justifier le fait que a est racine de P. En déduire la valeur de $\tilde{P}(a)$.

3. On suppose : $n \leqslant p \leqslant 2n$.

a) Pour tout $(\lambda, m, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^2$ vérifiant $k \leqslant m$, donner une expression explicite du polynôme dérivé d'ordre k de $(X-\lambda)^m$.

b) En utilisant alors la formule de Leibniz, démontrer :

$$\tilde{P}(a) \;=\; \frac{p!\,n!}{(p-n)!\,(2n-p)!}\,(a-b)^{2n-p}$$

Exercice 13
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \circ P = P$.

Exercice 14
Déteminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P'^2 = 4P$.

Exercice 15
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que les racines de $X^n + X + 1$ dans $\mathbb{C}$ sont simples.

Exercice 16
On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Delta & : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Montrer pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta^q(P) \;=\; \sum_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} P(X+k)$$

en notant Δ^q la composée de Δ avec elle-même q fois.

2. *a)* Montrer que pour tout polynôme réel P non nul : $\deg\big(\Delta(P)\big) \leqslant \deg(P) - 1$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$, la valeur de $\Delta^n(P)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\tilde{P}(k) = r^k$. Calculer la valeur de $\tilde{P}(n+1)$.

Exercice 17
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme complexe $3X^5 + 10aX^3 + 15X - 8i$ admette une racine d'ordre de multiplicité au moins 3.

Exercice 18
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = P \times P(X+1)$.

1. Soit P un polynôme non nul de $\mathcal{A}$.

a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors il en est de même, pour tout $r \in \mathbb{N}$, de $a^{(2^r)}$.

b) En déduire que les racines non nulles de P sont de module 1.

2. Soit P un polynôme non nul de $\mathcal{A}$.

a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors il en est de même de $(a-1)^2$.

b) Quelles sont les racines de P ?

3. Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{A}$.

Résolution d'équations

Exercice 19
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

b. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$

c. $x = \sqrt{x} + 2$

d. $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

e. $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$

f. $(2x - 3)^2 = (7x + 5)^2$

Exercice 20
Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout x différent de 0, 1 et -1, on ait :

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

Exercice 21
Déterminer les couples de réels (a, b) telles que :

a. $a^3 - b^3 \geqslant ab^2 - a^2b$

b. $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2a + 2b$

c. $a^2 - 2ab - 3b^2 \geqslant 0$

Exercice 22
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x :

$$m^2x + 2m = 9x - 6$$

On pourra discuter selon la valeur du paramètre m.

Exercice 23
Pour quelles valeurs du paramètre réel m les trinômes $x^2 + 2x + m - 4$ et $x^2 + x - 7m + 1$ ont-ils une racine commune ?
Quelle est cette racine ?

Autour de la division euclidienne

Exercice 24
À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 25
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de valeurs prises par la fonction polynomiale associée à P et par les dérivées de cette dernière.

Exercice 26
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X + 1$.

Exercice 27
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X - 1)^2$.

Exercice 28
Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(X) - X$ divise $(P \circ P)(X) - X$.

Exercice 29
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(\theta)\, X^n - \sin(n\theta)\, X + \sin\big((n-1)\theta\big)$ est divisible par $X^2 - 2\cos(\theta)\, X + 1$.

Exercice 30
Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Démontrer que $X^2 - 2\cos(\alpha)\, X + 1$ divise dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\cos\big((n-1)\,\alpha\big)\, X^{n+1} - \cos(n\,\alpha)\, X^n - \cos(\alpha)\, X + 1$$

Exercice 31
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $\big(\cos(\theta) + \sin(\theta)\, X\big)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 32
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la division euclidienne de X^n par P.

Exercice 33
On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$.

1. Calculer, en fonction de a, $P(a)$, $P'(a)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X-a)^2$ divise P.
2. Soit $b \in \mathbb{K}$ distinct de a. Calculer, en fonction de a, b, $P(a)$, $P(b)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X-a)(X-b)$ divise P.

Exercice 34
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$.

1. Soit P un polynôme de $\mathcal{A}$. Démontrer que $(X^2-1)^3$ divise P'.
2. Déterminer un élément de $\mathcal{A}$ de degré 7.
3. Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{A}$.

Factorisation de polynômes

Exercice 35
Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 6X^2 + 7X - 6$, sachant qu'il admet deux racines évidentes.

Exercice 36
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 2$.

Exercice 37
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 38
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $6X^4 - 43X^3 + 107X^2 - 108X36$ sachant qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \big(\mathbb{R}^*\big)^2$ tel que ses racines soient α, β, $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Liens entre coefficients et racines d'un polynôme

Exercice 39
Donner la somme et le produit des racines (complexes) de $X^5 - 3X^3 + 7X - 1$, puis de $-X^3 - 2X^4 + X + 1$.

Exercice 40
Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'une des racines de $X^2 - 7X + \lambda$ soit le double de l'autre.

Exercice 41
Factoriser $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Exercice 42
Soient x, y, z les racines complexes du polynome $X^3 + pX^2 + qX + r$, où $(p, q, r) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$.

1. Donner les relations entre les racines et les coefficients du polynôme.
2. Calculer $x^n + y^n + z^n$ pour $n \in \{1, 2, -1\}$.
3. Former le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x^2, y^2, z^2 (on exprimera ses coefficients en fonction de p, q, et r.)

Exercice 43
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer : $\sum\limits_{p=0}^{n-1} X^{2p} = \prod\limits_{p=1}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{p\pi}{n}\right) X + 1\right)$.
2. En déduire des expressions sans produit de $\prod\limits_{p=1}^{n-1} \cos\left(\frac{p\pi}{n}\right)$ et $\prod\limits_{p=1}^{n} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$.

Exercice 44
Soit $m \in \mathbb{C}$. On note P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P(X) = X^4 - 9X^3 + mX^2 - 8X + 6$$

Déterminer les complexes m pour que la somme de deux racines du polynôme P soit égale à la somme des deux autres.

Exercice 45
Résoudre dans $\left(\mathbb{C}^*\right)^3$ le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1 \\ a^2 & + & b^2 & + & c^2 & = & 9 \\ \frac{1}{a} & + & \frac{1}{b} & + & \frac{1}{c} & = & 1 \end{array}\right.$$