Programme de colle - Semaine 16

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Fonction** arcsin

  1) La fonction arcsin est la bijection réciproque de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

  2) Elle est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$.

  3) Elle est impaire.

  4) Elle est dérivable sur $]-1,1[$ et : $\forall x \in\,]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

  Démonstration.

  1) La fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est :

  × continue sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

  × strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

  Elle réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\big([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\big)$ où :

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\big([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\big) \;=\; \Big[\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big), \sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big] \;=\; [-1,1]$$

  La fonction arcsin est alors la bijection réciproque de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.

  2) Par théorème de la bijection, la fonction arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$.

  3) Soit $x \in [-1,1]$. Alors $-x \in [-1,1]$. Donc $y = \arcsin(-x)$ est bien défini.

  - La fonction sin est impaire. Ainsi :

$$\sin(-y) \;=\; -\sin(y)$$

    On en déduit :

$$\sin\big(-\arcsin(-x)\big) \;=\; -\sin\big(\arcsin(-x)\big)$$

  - Or :

$$\sin\big(\arcsin(-x)\big) \;=\; -x$$

    On en déduit : $\sin\big(-\arcsin(-x)\big) = -(-x) = x$.

  - Comme $x \in [-1,1]$, on peut composer cette dernière égalité par arcsin. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \arcsin\Big(\sin\big(-\arcsin(-x)\big)\Big) & = & \arcsin(x) \\ \shortparallel & & \\ -\arcsin(-x) & & \end{array}$$

    car $-\arcsin(-x) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
    D'où : $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

4) • La fonction $\sin_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est :
× bijective de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $]-1,1[$,
× dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,
× telle que : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$.
Alors sa bijection réciproque arcsin est donc dérivable sur $]-1,1[$
• De plus, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'\big(\arcsin(x)\big)} \\ &= \frac{1}{\cos\big(\arcsin(x)\big)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

□

- **Fonction** arctan

1) La fonction arctan est la bijection réciproque de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$
2) Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3) Elle est impaire.
4) Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration.
1) La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est :
× continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,
× strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\big(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\big)$ où :

$$\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\big(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\big) = \left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x)\right] =]-\infty,+\infty[$$

La fonction arctan est alors la bijection réciproque de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.
2) Par théorème de la bijection, la fonction arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$. Donc $y = \arctan(-x)$ est bien défini.
• La fonction tan est impaire. Ainsi :

$$\tan(-y) = -\tan(y)$$

On en déduit :

$$\tan\big(-\arctan(-x)\big) = -\tan\big(\arctan(-x)\big)$$

• Or :

$$\tan\big(\arctan(-x)\big) = -x$$

On en déduit : $\tan\big(-\arctan(-x)\big) = -(-x) = x$.
• On compose cette dernière égalité par arctan. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \arctan\Big(\tan\big(-\arctan(-x)\big)\Big) & = & \arctan(x) \\ \shortparallel & & \\ -\arctan(-x) & & \end{array}$$

car $-\arctan(-x) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
D'où : $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.

4) • La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est :

× bijective de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $\mathbb{R}$,

× dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

× telle que : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) \neq 0$.

Alors sa bijection réciproque arctan est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

• De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'\big(\arctan(x)\big)} \\ &= \frac{1}{1+\Big(\tan\big(\arctan(x)\big)\Big)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

□

• **Existence d'un diviseur premier**
Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
On demandera à l'étudiant, en plus de la démonstration de la proposition précédente, un calcul de pgcd par décomposition en facteurs premiers.

Démonstration.
Démontrons par récurrence (forte) : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: n admet au moins un diviseur premier.

▸ **Initialisation**
Le nombre 2 admet 2 comme diviseur premier.
D'où $\mathscr{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.
Supposons : $\forall d \in [\![2,n]\!]$, $\mathscr{P}(d)$. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $n+1$ admet au moins un diviseur premier).
Deux cas se présentent :

× si $n+1$ est premier, alors il admet un diviseur premier : lui-même.

× si $n+1$ n'est pas premier, alors il admet des diviseurs positifs autres que 1 et $n+1$.
Notons d l'un de ces diviseurs positifs. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n+1 = k\,d$. De plus :

$$\begin{array}{rccccl} & 1 & < & d & < & n+1 \\ \text{donc} & 2 & \leqslant & d & \leqslant & n \qquad \textit{(car } d \in \mathbb{N}\textit{)} \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, d admet un diviseur premier. Notons le δ. Alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que : $d = k'\,\delta$. D'où :

$$n+1 \;=\; k\,d \;=\; k\,k'\,\delta$$

Ainsi : $\delta \mid n+1$. Comme δ est premier, on en déduit que $n+1$ admet bien un diviseur premier.
D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

□

Connaissances exigibles

Notion de limite

- Voisinages : voisinage d'un point, de $+\infty$ et de $-\infty$
- Définition de limite : en un point, en $+\infty$ et en $-\infty$
- Définition de limite à droite et limite à gauche
- Unicité de la limite
- Opérations sur les limites
- Caractérisation séquentielle de la limite. Application : démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.
- Méthodes pour lever des formes indéterminées :
  - factorisation par le terme dominant
  - utilisation de la quantité conjuguée
  - retour à la définition des fonctions puissances avec les fonctions exp et ln
  - changement de variable
  - utilisation des croissances comparées
  - utilisation des taux d'accroissements
- Compatibilité de la limite avec la relation d'ordre
- Théorème d'encadrement et de comparaison
- Théorème de la limite monotone

Continuité en un point

- Définition d'une fonction continue en un point
- Définition d'une fonction prolongeable par continuité en un point
- Continuité à droite, continuité à gauche
- Définition de la continuité dans le cas d'une fonction à valeurs complexes

Continuité sur un intervalle

- Définition d'une fonction continue dur un intervalle
- Opérations algébriques sur les fonctions continues
- Définition d'une fonction continue par morceaux
- Définition de la continuité dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.
- Le conjugué et le module d'une fonction continue sur I sont continues sur I

Grands théorèmes de la continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires :
  - existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$
  - existence, dans l'intervalle d'extrémités a et b, d'une solution à l'équation $f(x) = c$ si c compris entre $f(a)$ et $f(b)$
  - l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
  - existence, dans I, d'une solution à l'équation $f(x) = c$ si c compris entre $\inf\limits_I (f)$ (ou $-\infty$ si f non minorée) et $\sup\limits_I (f)$ (ou $+\infty$ si f non majorée)

- Théorème des bornes atteintes :
  - × toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes
  - × l'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- Théorème de la bijection
- Fonctions trigonométriques réciproques : arcsin, arccos, arctan
- Relations de comparaison : $\underset{x \to x_0}{o}$, $\underset{x \to x_0}{\sim}$, $\underset{x \to x_0}{O}$

Arithmétique

- Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$: définition et propriétés
- Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$
- Descente de Fermat : principe et code **Python**
- Congruence : définition et propriétés
- PGCD : définition et propriétés
- Algorithme d'Euclide : principe et code **Python** (impératif et récursif)
- PPCM : définition et propriétés
- Nombres premiers entre eux : définition
- Nombres premiers : définition et propriétés
- Existence d'une infinité de nombres premiers
- Crible d'Ératostène
- Décomposition en produit de facteurs premiers. Application au calcul de PGCD et PPCM

⚠

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.