# Programme de colle - Semaine 18

## Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note $> 8$.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

## Questions de cours

- **Résolution d'un système linéaire par pivot de Gauss**
  Par exemple, résoudre le système suivant.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

*Démonstration.*
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(S) \overset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 2y & = & -2z \\ & & 4y & = & 2z \end{array} \right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -z \\ & & 2y & = & z \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & -z \\ & & 2y & = & z \end{array} \right.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(S)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -\frac{1}{2}\, z \text{ et } y = \frac{1}{2}\, z\} \\ &= \{\left(-\frac{1}{2}\, z, \frac{1}{2}\, z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

□

- **Inverse d'une matrice par pivot de Gauss**
  Par exemple, déterminer, si elle existe, l'inverse de la matrice $A$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.*
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite de Gauss obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Elle est donc inversible et $A$ aussi.
On effectue ensuite l'opération $\{L_1 \leftarrow L_1 - L_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On en déduit : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

- **Décomposition en somme d'une matrice symétrique et antisymétrique**
  Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

*Démonstration.*
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On procède par analyse-synthèse.

- <u>**Analyse**</u> : Supposons qu'il existe $(A, S) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ telle que :
  *1)* $M = A + S$,
  *2)* $A \in \mathscr{A}n$,
  *3)* $S \in \mathscr{S}n$.
  On remarque tout d'abord :

$$\begin{aligned} M^T &= (A+S)^T \\ &= A^T + S^T && \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ &= -A + S && \textit{(car } A \in \mathscr{A}n \textit{ et } S \in \mathscr{S}n\textit{)} \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} A & + & S & = & M \\ -A & + & S & = & M^T \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} A & + & S & = & M \\ & & 2 \cdot S & = & M + M^T \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 2 \cdot A & = & M - M^T \\ 2 \cdot S & = & M + M^T \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} A & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M - M^T) \\ S & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M + M^T) \end{array}\right.$$

- **<u>Synthèse</u>** : On pose

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot (M - M^T) \quad \text{et} \quad S_0 = \frac{1}{2} \cdot (M + M^T)$$

On remarque alors :

*1)* tout d'abord :

$$A_0 + S_0 = \frac{1}{2} \cdot (M - \cancel{M^T}) + \frac{1}{2} \cdot (M + \cancel{M^T}) = M$$

*2)* ensuite : $A_0 \in \mathscr{A}n$. En effet :

$$\begin{array}{rcll} A_0^T & = & \left(\dfrac{1}{2} \cdot (M - M^T)\right)^T & \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot \left(M^T - (M^T)^T\right) & \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M^T - M) & \textit{(car la transposée est involutive)} \\ & = & -\dfrac{1}{2} \cdot (M - M^T) = -A_0 & \end{array}$$

*3)* enfin : $S_0 \in \mathscr{S}n$. En effet :

$$\begin{array}{rcll} S_0^T & = & \left(\dfrac{1}{2} \cdot (M + M^T)\right)^T & \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot \left(M^T + (M^T)^T\right) & \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M^T + M) & \textit{(car la transposée est involutive)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M + M^T) = S_0 & \end{array}$$

$\square$

- **Formule de Taylor polynomiale**

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
  Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$P(X) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$$

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$
où $\quad \mathscr{P}(n) : \forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$.

- **Initialisation** : soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.
  - D'une part :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k \;=\; \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!}\,(X-\alpha)^0 \;=\; P(\alpha)$$

  - D'autre part, $P$ est un polynôme constant. Ainsi : $P(X) = P(\alpha)$.

  Ainsi : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{0} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall P \in \mathbb{K}_{n+1}[X],\ P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$).
  Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$.
  - On remarque : $P' \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$P'(X) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(P')^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$$

  - On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\begin{aligned}
P(X) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!}\,\frac{1}{k+1}\,(X-\alpha)^{k+1} + \lambda \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}\,(X-\alpha)^{k+1} + \lambda \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^{k} + \lambda \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= (X-\alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^{k-1} + \lambda
\end{aligned}$$

  - Enfin, en évaluant l'égalité précédente en $\alpha$, on obtient :

$$P(\alpha) \;=\; \cancel{(\alpha-\alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(\alpha-\alpha)^{k-1}} + \lambda \;=\; \lambda$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k + \lambda \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k + P(\alpha) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k + \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!}\,(X-\alpha)^0 \quad \textit{(d'après le calcul de l'initialisation)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$. □

# Connaissances exigibles

## Systèmes linéaires et matrices

- Système linéaire, homogène, de Cramer, échelonné, triangulaire
- Algorithme du pivot de Gauss
- Matrice rectangle, carrée, ligne, colonne, nulle, identité, élémentaire, scalaire, triangulaire inférieure, triangulaire supérieure, diagonale
- Somme de matrices
- Produit externe d'une matrice par un scalaire
- Produit de matrices (interne dans le cas de matrices carrées de même ordre)
- Puissance $m^{\text{ème}}$ d'une matrice
- Symbole de Kronecker
- Interprétation des opérations élémentaires à l'aide de matrices
- Transposée de matrices
- Matrices symétriques, antisymétriques
- Calcul par blocs
- Matrices inversibles : définition, propriétés, calcul explicite par algorithme du pivot de Gauss

## Polynômes

- Définitions d'un polynôme, ses coefficients, son degré, son coefficient dominant
- Opérations dans $\mathbb{K}[X]$ : $+$, $\times$, $\cdot$, $\circ$
- Binôme de Newton
- Propriétés du degré
- Divisibilité : définition et propriétés
- Division euclidienne
- Dérivation formelle d'un polynôme : définition et propriétés
- Dérivées $p^{\text{ème}}$
- Formule de Leibniz

- Formule de Taylor polynomiale
- Racine d'un polynôme : définition, caractérisation avec la divisibilité
- Lien entre degré d'un polynômé et nombre maximal de ses racines
- Multiplicité d'une racine : définition, caractérisation par la divisibilité, caractérisation à l'aide des dérivées

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.