Programme de colle - Semaine 19

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Formule de Taylor polynomiale**

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
  Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$P(X) \; = \; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^k$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$
où $\quad \mathscr{P}(n)$: $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^k$.

▸ **Initialisation** : soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.

- D'une part :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^k \; = \; \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!} \, (X-\alpha)^0 \; = \; P(\alpha)$$

- D'autre part, P est un polynôme constant. Ainsi : $P(X) = P(\alpha)$.

Ainsi : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{0} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^k$.
D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^k$).
Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$.

- On remarque : $P' \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$P'(X) \; = \; \sum_{k=0}^{n} \frac{(P')^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^k \; = \; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^k$$

- On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!} \, \frac{1}{k+1} \, (X-\alpha)^{k+1} + \lambda \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!} \, (X-\alpha)^{k+1} + \lambda \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^{k} + \lambda && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= (X-\alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^{k-1} + \lambda \end{aligned}$$

- Enfin, en évaluant l'égalité précédente en α, on obtient :

$$P(\alpha) \; = \; \cancel{(\alpha-\alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (\alpha-\alpha)^{k-1}} + \lambda \; = \; \lambda$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^{k} + \lambda \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^{k} + P(\alpha) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^{k} + \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!} \, (X-\alpha)^{0} && \textit{(d'après le calcul de l'initialisation)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \, (X-\alpha)^{k} \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$. □

- **Calcul de la racine carrée d'un nombre complexe**

Par exemple, déterminer les racines carrées du nombre complexe $2-i$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

- Supposons : $z^2 = 2 - i$.
  - × D'une part : $|z^2| = |2-i| = \sqrt{5}$. Donc :

$$x^2 + y^2 \; = \; |z|^2 \; = \; |z^2| \; = \; \sqrt{5} \qquad (1)$$

  - × De plus, comme $z^2 = 2 - i$, alors :

$$2 - i \; = \; z^2 \; = \; (x+iy)^2 \; = \; (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 2 \quad (2) \\ 2xy & = & -1 \quad (*) \end{array} \right.$$

× D'après (1) et (2), on obtient :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcr} x^2 & - & y^2 & = & 2 \\ x^2 & + & y^2 & = & \sqrt{5} \end{array} \right.$$

Or :

$$(S) \quad \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x^2 & - & y^2 & = & 2 \\ & & 2\,y^2 & = & \sqrt{5}-2 \end{array} \right.$$

$$\underset{}{\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow}} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x^2 & & & = & \sqrt{5}+2 \\ & & 2\,y^2 & = & \sqrt{5}-2 \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \quad \texttt{OU} \quad x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$$
$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \quad \texttt{OU} \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$$

× Or, d'après $(*)$: $xy = -\dfrac{1}{2} < 0$. On note alors :

$$z_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} - i\,\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$$

On conclut :

$$z = z_0 \quad \texttt{OU} \quad z = -z_0$$

- Les complexes z_0 et $-z_0$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = 2 - i$. Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.

On en déduit que l'ensemble des solutions de $z^2 = 2 - i$ est :

$$\{z_0, -z_0\}$$

□

- **Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$**

Connaissances exigibles

Polynômes

- Définitions d'un polynôme, ses coefficients, son degré, son coefficient dominant
- Opérations dans $\mathbb{K}[X]$: $+$, $\times$, $\cdot$, $\circ$
- Binôme de Newton
- Propriétés du degré
- Divisibilité : définition et propriétés
- Division euclidienne
- Dérivation formelle d'un polynôme : définition et propriétés
- Dérivées $p^{\text{ème}}$
- Formule de Leibniz
- Formule de Taylor polynomiale

- Racine d'un polynôme : définition, caractérisation avec la divisibilité
- Lien entre degré d'un polynômé et nombre maximal de ses racines
- Multiplicité d'une racine : définition, caractérisation par la divisibilité, caractérisation à l'aide des dérivées
- Polynômes scindés : définition, caractérisation à l'aide du degré
- Relations coefficients / racines
- Polynômes irréductibles : définition, propriétés, description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$
- Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
- Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.