PCSI

Programme de colle - Semaine 20

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Calcul de la racine carrée d'un nombre complexe**
  Par exemple, déterminer les racines carrées du nombre complexe $2 - i$.

  Démonstration.
  Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

  - Supposons : $z^2 = 2 - i$.

    × D'une part : $|z^2| = |2 - i| = \sqrt{5}$. Donc :

    $$x^2 + y^2 \; = \; |z|^2 \; = \; |z^2| \; = \; \sqrt{5} \qquad (1)$$

    × De plus, comme $z^2 = 2 - i$, alors :

    $$2 - i \; = \; z^2 \; = \; (x + iy)^2 \; = \; (x^2 - y^2) + 2ixy$$

    Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit :

    $$\left\{ \begin{array}{rcll} x^2 - y^2 & = & 2 & (2) \\ 2xy & = & -1 & (*) \end{array} \right.$$

    × D'après (1) et (2), on obtient :

    $$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & - & y^2 & = & 2 \\ x^2 & + & y^2 & = & \sqrt{5} \end{array} \right.$$

    Or :

    $$(S) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & - & y^2 & = & 2 \\ & & 2\,y^2 & = & \sqrt{5} - 2 \end{array} \right.$$

    $$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccc} 2\,x^2 & = & \sqrt{5} + 2 \\ 2\,y^2 & = & \sqrt{5} - 2 \end{array} \right.$$

    Ainsi :

    $$x \; = \; \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} \quad \texttt{OU} \quad x \; = \; -\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}}$$

    $$y \; = \; \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}} \quad \texttt{OU} \quad y \; = \; -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}$$

× Or, d'après $(*)$: $xy = -\dfrac{1}{2} < 0$. On note alors :

$$z_0 \;=\; \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} - i\,\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$$

On conclut :

$$z = z_0 \quad \texttt{OU} \quad z = -z_0$$

- Les complexes z_0 et $-z_0$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = 2 - i$. Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.

On en déduit que l'ensemble des solutions de $z^2 = 2 - i$ est :

$$\{z_0, -z_0\}$$

□

- **Résolution d'une équation polynomiale de degré 2 à coefficients complexes**
Par exemple, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3i\,z + i - 3 = 0$.

Démonstration.

- On note Δ le discriminant du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 3i\,X + i - 3$.

$$\Delta \;=\; (-3i)^2 - 4 \times 1 \times (i-3) \;=\; -9 - 4i + 12 \;=\; 3 - 4i$$

En notant δ une racine carrée de Δ, les solutions de l'équation étudiée sont :

$$\frac{3i+\delta}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{3i-\delta}{2}$$

- On souhaite donc déterminer une racine carrée de Δ.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.
  × Supposons : $z^2 = 3 - 4i$.
    - D'une part : $|z^2| = |3 - 4i| = 5$. Donc :

$$x^2 + y^2 \;=\; |z|^2 \;=\; |z^2| \;=\; 5 \qquad (1)$$

    - De plus, comme $z^2 = 3 - 4i$, alors :

$$3 - 4i \;=\; z^2 \;=\; (x+iy)^2 \;=\; (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lll} x^2 - y^2 \;=\; 3 & (2) \\ 2xy \;=\; -4 & (*) \end{array}\right.$$

    - D'après (1) et (2), on obtient :

$$(S) \left\{\begin{array}{ccccc} x^2 & - & y^2 & = & 3 \\ x^2 & + & y^2 & = & 5 \end{array}\right.$$

Or :

$$(S) \quad \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{cccc} x^2 & - \quad y^2 & = & 3 \\ & 2\,y^2 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{cccc} 2\,x^2 & & = & 8 \\ & 2\,y^2 & = & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$x \;=\; 4 \;\; \texttt{OU} \;\; x \;=\; -4$$

$$y \;=\; 1 \;\; \texttt{OU} \;\; y \;=\; -1$$

- Or, d'après $(*)$: $xy = -2 < 0$. On note alors :

$$\delta \ = \ 4 - i$$

On conclut :

$$z = \delta \quad \texttt{OU} \quad z = -\delta$$

× Les complexes δ et $-\delta$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = 3 - 4i$. Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.

On en déduit que les racines carrées de $\Delta = 3 - 4i$ sont δ et $-\delta$.

- On en déduit que les solutions de l'équation $z^2 - 3i\,z + i - 3 = 0$ sont :

$$z_1 \ = \ \frac{3i + \delta}{2} \ = \ \frac{3i + (4-i)}{2} \ = \ 2 + i \qquad \text{et} \qquad z_2 \ = \ \frac{3i - \delta}{2} \ = \ \frac{3i - (4-i)}{2} \ = \ -2 + 2i$$

□

- **Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$**
Par exemple :

× La factorisation en irréductibles de $P(X) = X^4 + 2$ dans $C[X]$ est :

$$P(X) \ = \ \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}\right)$$

Commentaire

- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ revient à déterminer les racines complexes de P, ou encore résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 2 = 0$. Résolvons cette équation. Cette étape peut s'effectuer au brouillon.
- Soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que : $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}
z^4 + 2 = 0 \ &\Leftrightarrow \ z^4 = -2 \\
&\Leftrightarrow \ (r\,\mathrm{e}^{i\theta})^4 = 2\,\mathrm{e}^{i\pi} \\
&\Leftrightarrow \ r^4\,\mathrm{e}^{4i\theta} = 2\,\mathrm{e}^{i\pi} \\
&\Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{l} r^4 = 2 \\ 4\theta \equiv \pi \ [2\pi] \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{l} r = 2^{\frac{1}{4}} \\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{4} \ \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right. && \textit{(par injectivité de } x \mapsto x^4 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{l} r = 2^{\frac{1}{4}} \\ \exists k \in [\![0, 3]\!], \ \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\,\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $z^4 + 2 = 0$ est donc :

$$\{2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{4}}, \ 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{3\pi}{4}}, \ 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{5\pi}{4}}, \ 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{7\pi}{4}}\}$$

× On en déduit la factorisation en irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}
P(X) &= \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}\right) \\
&= \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \times \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) \\
&= \left(X^2 - 2^{\frac{1}{4}}\,(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}})\,X + 1\right)\left(X^2 - 2^{\frac{1}{4}}\,(\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}})\,X + 1\right) \\
&= \left(X^2 - 2 \times 2^{\frac{1}{4}}\,\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\,X + 1\right)\left(X^2 - 2 \times 2^{\frac{1}{4}}\,\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\,X + 1\right) \\
&= \left(X^2 - \cancel{2} \times 2^{\frac{1}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\,X + 1\right)\left(X^2 + \cancel{2} \times 2^{\frac{1}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\,X + 1\right) \\
&= \left(X^2 - 2^{\frac{3}{4}}\,X + 1\right)\left(X^2 - 2^{\frac{3}{4}}\,X + 1\right)
\end{aligned}$$

- **Développement limité d'ordre 1 et dérivabilité**

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

  $$\begin{array}{ccc} f \text{ est dérivable} & \Leftrightarrow & f \text{ admet un développement limité} \\ \text{en } x_0 & & \text{d'ordre 1 en } x_0 \end{array}$$

  Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{\begin{array}{l} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{array}\right.$

  Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel qu'au voisinage de x_0 :

  $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

  Démonstration.

  $(\Rightarrow)$ Supposons f dérivable en x_0.

  Notons $\varepsilon : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$

  (c'est le ε donné par la formule finale)

  On a alors $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$:

  $$\begin{array}{ll} & \varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) \\ \text{donc} & \varepsilon(x) + f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{et} & f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \end{array}$$

  Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Au final, on a bien :
  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0}\ \varepsilon(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

× $a_0 = f(x_0)$ (le développement est vérifié en x_0 !)

× $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \varepsilon(x)$

On en conclut que $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie quand $x \to x_0$.

□

- **Théorème de Rolle**

  Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
  Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction f est continue sur le `SEGMENT` $[a,b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.
  On en déduit qu'il existe $(c_1, c_2) \in [a,b]^2$ tel que :
  × $f(c_1) = \min\limits_{[a,b]} (f) = m$,
  × $f(c_2) = \max\limits_{[a,b]} (f) = M$.
- Le but est alors de démontrer que l'un de ces deux extrema est atteint sur $]a,b[$.
- Deux cas se présentent :
  1) Si $m = M$, alors pour tout $x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$.
  La fonction f est donc constante sur $[a,b]$.
  Ainsi : $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) = 0$. On note alors $c = \dfrac{a+b}{2}$. On obtient bien :
  × $c \in]a,b[$,
  × $f'(c) = 0$.

  2) Si $m \neq M$, alors trois cas se présentent :
  × si $c_1 = a$, alors :
  - $c_2 \neq a$, car : $m \neq M$.
  - $c_2 \neq b$. En effet, si $c_2 = b$, alors :

  $$m \;=\; f(c_1) \;=\; f(a) \;=\; f(b) \;=\; f(c_2) \;=\; M$$

  Absurde !

  On en déduit : $c_2 \in]a,b[$. Ainsi :
  - la fonction f est dérivable en c_2,
  - la fonction f admet un extremum (un maximum) en c_2.

  On en conclut, en notant $c = c_2$: $f'(c) = 0$.

  × si $c_1 \in]a,b[$, alors :
  - la fonction f est dérivable en c_1,
  - la fonction f admet un extremum (minimum) en c_1.

  On en conclut, en notant $c = c_1$: $f'(c) = 0$.

  × si $c_1 = b$, alors on démontre en raisonnant de façon similaire au cas $c_1 = a$, qu'en notant $c = c_2$: $f'(c) = 0$.

□

Connaissances exigibles

Polynômes

- Polynômes scindés : définition, caractérisation à l'aide du degré
- Relations coefficients / racines
- Polynômes irréductibles : définition, propriétés, description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$
- Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
- Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Nombres complexes

- Racine carrée d'un nombre complexe : définition et calcul pratique
- Équations polynomiale du 2^{nd} degré : expression des solutions (dans le cas d'équations à coefficients réels ou complexes)
- Racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe : définition, nombre de racines $n^{\text{ème}}$ et expression de ces racines, représentation dans le plan complexe
- Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité :
  - × définition, expressions, représentation dans le plan complexe,
  - × nullité de la somme des racines $n^{\text{ème}}$,
  - × ensemble $\mathbb{U}_n$: définition, structure de groupe multiplicatif.
- Exponentielle complexe :
  - × définition, non injectivité, non surjectivité,
  - × propriété de morphisme,
  - × module et argument de e^z,
  - × résolution d'équation du type $\mathrm{e}^z = a$.
- Interprétations géométriques :
  - × transformation du plan : translation, homothétie, rotation, symétrie d'axe (Ox)
  - × alignement et orthogonalité

Dérivabilité

- Taux d'accroissement
- Dérivabilité en un point : définition, interprétation graphique, interprétation physique
- Dérivabilité à gauche et à droite en un point
- Opérations sur les fonctions dérivables en un point (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivable $\Rightarrow$ continue
- Lien entre dérivabilité et extremum local
- Développement limité d'ordre 1
- Tangente en un point
- Dérivabilité globale : définition, opérations sur les fonctions dérivables (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivée $n^{\text{ème}}$, classe $\mathcal{C}^n$, classe $\mathcal{C}^\infty$: définitions et opérations (dont la formule de Leibniz)
- Fonctions lipschitziennes

- Grands théorème de la dérivabilité :
  × théorème de Rolle : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  × théorème des accroissements finis : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  × inégalité des accroissements finis,

⚠ Le théorème de la limite de la dérivée n'est pas au programme de cette colle.

⚠ On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.