Programme de colle - Semaine 21

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Résolution d'une équation polynomiale de degré 2 à coefficients complexes**
  Par exemple, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3i\,z + i - 3 = 0$.

  Démonstration.

  - On note Δ le discriminant du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 3i\,X + i - 3$.

    $$\Delta \;=\; (-3i)^2 - 4 \times 1 \times (i-3) \;=\; -9 - 4i + 12 \;=\; 3 - 4i$$

    En notant δ une racine carrée de Δ, les solutions de l'équation étudiée sont :

    $$\frac{3i+\delta}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{3i-\delta}{2}$$

  - On souhaite donc déterminer une racine carrée de Δ.
    Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

    × Supposons : $z^2 = 3 - 4i$.

    - D'une part : $|z^2| = |3 - 4i| = 5$. Donc :

      $$x^2 + y^2 \;=\; |z|^2 \;=\; |z^2| \;=\; 5 \qquad (1)$$

    - De plus, comme $z^2 = 3 - 4i$, alors :

      $$3 - 4i \;=\; z^2 \;=\; (x+iy)^2 \;=\; (x^2 - y^2) + 2ixy$$

      Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit :

      $$\begin{cases} x^2 - y^2 \;=\; 3 & (2) \\ 2xy \;=\; -4 & (*) \end{cases}$$

    - D'après (1) et (2), on obtient :

      $$(S) \begin{cases} x^2 \;-\; y^2 \;=\; 3 \\ x^2 \;+\; y^2 \;=\; 5 \end{cases}$$

      Or :

      $$(S) \quad \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} x^2 \;-\; y^2 \;=\; 3 \\ 2\,y^2 \;=\; 2 \end{cases}$$

      $$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} 2\,x^2 \;=\; 8 \\ 2\,y^2 \;=\; 2 \end{cases}$$

      Ainsi :

      $$x \;=\; 4 \quad \texttt{OU} \quad x \;=\; -4$$
      $$y \;=\; 1 \quad \texttt{OU} \quad y \;=\; -1$$

- Or, d'après $(*)$: $xy = -2 < 0$. On note alors :

$$\delta \;=\; 4 - i$$

On conclut :

$$z = \delta \quad \texttt{OU} \quad z = -\delta$$

× Les complexes δ et $-\delta$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = 3 - 4i$. Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.

On en déduit que les racines carrées de $\Delta = 3 - 4i$ sont δ et $-\delta$.

- On en déduit que les solutions de l'équation $z^2 - 3i\,z + i - 3 = 0$ sont :

$$z_1 \;=\; \frac{3i+\delta}{2} \;=\; \frac{3i+(4-i)}{2} \;=\; 2+i \qquad \text{et} \qquad z_2 \;=\; \frac{3i-\delta}{2} \;=\; \frac{3i-(4-i)}{2} \;=\; -2+2i$$

□

- **Développement limité d'ordre 1 et dérivabilité**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

$$\begin{array}{c} f \text{ est dérivable} \\ \text{en } x_0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} f \text{ admet un développement limité} \\ \text{d'ordre 1 en } x_0 \end{array}$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{cases}$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel qu'au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ Supposons f dérivable en x_0.

Notons $\varepsilon : x \mapsto \begin{cases} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(c'est le ε donné par la formule finale)

On a alors $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) \\ \text{donc} \quad & \varepsilon(x) + f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{et} \quad & f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Au final, on a bien :
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

× $a_0 = f(x_0)$ (le développement est vérifié en x_0 !)

× $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \varepsilon(x)$

On en conclut que $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie quand $x \to x_0$.

$\square$

- **Théorème de Rolle**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction f est continue sur le `SEGMENT` $[a, b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.
On en déduit qu'il existe $(c_1, c_2) \in [a, b]^2$ tel que :

× $f(c_1) = \min\limits_{[a,b]} (f) = m$,

× $f(c_2) = \max\limits_{[a,b]} (f) = M$.

- Le but est alors de démontrer que l'un de ces deux extrema est atteint sur $]a, b[$.
- Deux cas se présentent :

1) Si $m = M$, alors pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$.
La fonction f est donc constante sur $[a, b]$.
Ainsi : $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$. On note alors $c = \dfrac{a+b}{2}$. On obtient bien :

× $c \in]a, b[$,

× $f'(c) = 0$.

2) Si $m \neq M$, alors trois cas se présentent :

× si $c_1 = a$, alors :

- $c_2 \neq a$, car : $m \neq M$.
- $c_2 \neq b$. En effet, si $c_2 = b$, alors :

$$m = f(c_1) = f(a) = f(b) = f(c_2) = M$$

Absurde !

On en déduit : $c_2 \in]a, b[$. Ainsi :

- la fonction f est dérivable en c_2,
- la fonction f admet un extremum (un maximum) en c_2.

On en conclut, en notant $c = c_2$: $f'(c) = 0$.

× si $c_1 \in]a, b[$, alors :

- la fonction f est dérivable en c_1,
- la fonction f admet un extremum (minimum) en c_1.

On en conclut, en notant $c = c_1$: $f'(c) = 0$.

× si $c_1 = b$, alors on démontre en raisonnant de façon similaire au cas $c_1 = a$, qu'en notant $c = c_2$: $f'(c) = 0$.

□

- **Calcul pratique d'un développement limité**
  Par exemple, déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^x \tan(x)$.

  Démonstration.
  On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x \tan(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{3} \\
&\quad + x^2 \\
&\quad + \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&= x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)
\end{aligned}$$

□

Connaissances exigibles

Dérivabilité

- Taux d'accroissement
- Dérivabilité en un point : définition, interprétation graphique, interprétation physique
- Dérivabilité à gauche et à droite en un point
- Opérations sur les fonctions dérivables en un point (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivable $\Rightarrow$ continue
- Lien entre dérivabilité et extremum local
- Développement limité d'ordre 1
- Tangente en un point
- Dérivabilité globale : définition, opérations sur les fonctions dérivables (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivée $n^{\text{ème}}$, classe $\mathcal{C}^n$, classe $\mathcal{C}^\infty$: définitions et opérations (dont la formule de Leibniz)
- Fonctions lipschitziennes
- Grands théorème de la dérivabilité :
  - × théorème de Rolle : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  - × théorème des accroissements finis : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  - × inégalité des accroissements finis,
  - × théorème de la limite de la dérivée.

- Caractérisation des fonctions monotones par le signe de la dérivée
- Lien entre extremum local et annulation de la dérivée
- Extension aux fonctions à valeurs complexes :
  - × définitions toujours valides
  - × caractérisation de la dérivabilité à l'aide des parties réelle et imaginaire

Convexité

- Définition de fonctions convexes et fonctions concaves, interprétation graphique
- Théorème des 3 pentes
- Lien entre convexité et monotonie de la dérivée
- Lien entre convexité et signe de la dérivée seconde
- Caractérisation de la convexité par la position relative d'une courbe avec ses tangentes
- Point d'inflexion

Développements limités

- Définition de $\mathrm{DL}_n(x_0)$ et unicité
- Équivalence au 1er terme non nul de son DL
- Conséquence de la parité sur les DL
- Lien entre existence d'un DL et régularité :
  - × f continue en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$
  - × f dérivable en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$
  - × f de classe $\mathcal{C}^n \Rightarrow f$ admet un $\mathrm{DL}_n()$
- Primitivation de DL
- Dérivation de DL
- Formule de Taylor-Young
- DL usuels
- Opérations algébriques sur les DL : combinaison linéaire, produit, inverse, quotient
- DL et propriétés locales :
  - × position relative d'une courbe et de sa tangente
  - × DL et extrema locaux
  - × DL et recherche d'asymptotes
  - × position relative d'une courbe et de son asymptote

⚠

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.