PCSI

Programme de colle - Semaine 23

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**
  Par exemple, démontrer que l'ensemble F suivant est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$F \;=\; \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P'(0) = 0\}$$

Démonstration.
Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

- $F \subset \mathbb{K}[X]$, par définition de F.
- $F \neq \varnothing$. En effet, $0_{\mathbb{K}[X]} \in F$ car :

$$(0_{\mathbb{K}[X]})'(0) \;=\; (0_{\mathbb{K}[X]})(0) \;=\; 0$$

- Démontrons que F est stable par combinaison linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(P, Q) \in F^2$.
  Démontrons : $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in F$.

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(0) &= (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(0) && \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
&= \lambda\, P'(0) + \mu\, Q'(0) && \textit{(par linéarité de l'évaluation en } 0\textit{)} \\
&= \lambda \times 0 + \mu \times 0 && \textit{(car } (P,Q) \in F^2\textit{)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

  Ainsi : $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in F$.

Finalement, l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, et donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

- **Démontrer la liberté d'une famille**

  Par exemple, démontrer que la famille $\mathcal{F}$ suivante est libre :

$$\mathcal{F} \;=\; \big((-1,0,1),\,(1,-1,1),\,(0,1,2)\big)$$

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.
Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (-1,0,1) + \lambda_2 \cdot (1,-1,1) + \lambda_3 \cdot (0,1,2) \;=\; 0_{\mathbb{K}^3} \qquad (*)$$

Or : $(*) \iff (-\lambda_1 + \lambda_2,\, -\lambda_2 + \lambda_3,\, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3 = (0,\,0,\,0)$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & & & 4\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(par remontées successives)

Ainsi : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille $\mathcal{F}$ est donc libre. □

- **Déterminer la dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel**

  Par exemple, déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel suivant :

$$F \;=\; \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(X+1) = P(X)\}$$

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$ où la famille (P_0, P_1, P_2) est la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

$$\begin{array}{cl} & P \in F \\ \iff & P(X+1) = P(X) \\ \iff & a_0 \cdot P_0(X+1) + a_1 \cdot P_1(X+1) + a_2 \cdot P_2(X+1) = a_0 \cdot P_0(X) + a_1 \cdot P_1(X) + a_2 \cdot P_2(X) \\ \iff & \cancel{a_0} + a_1\,(X+1) + a_2\,(X+1)^2 = \cancel{a_0} + a_1\,X + a_2\,X^2 \\ \iff & \cancel{a_1 X} + a_1 + \cancel{a_2 X^2} + 2\,a_2\,X + a_2 = \cancel{a_1 X} + \cancel{a_2 X^2} \\ \iff & (a_1 + a_2) \cdot P_0 + 2\,a_2 \cdot P_1 = 0_{\mathbb{K}[X]} \\ \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ & & 2\,a_2 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \textit{(car la famille } (P_0, P_1) \textit{ est libre)} \\ \overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcl} 2\,a_1 & & = 0 \\ & 2\,a_2 & = 0 \end{array}\right. \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} F &= \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 0\} \\ &= \{a_0 \cdot P_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\ &= \text{Vect}\,(P_0) \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = (P_0)$ est :

× génératrice de F, d'après ce qui précède,

× libre, car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

C'est donc une base de F. On en déduit :

$$\dim(F) \; = \; \text{Card}(\mathcal{F}) \; = \; 1$$

□

Connaissances exigibles

Espaces vectoriels

- Loi de composition interne, loi de composition externe
- Espaces vectoriels : définition, espaces vectoriels de référence
- Combinaison linéaire
- Sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, intersection de sev
- Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie : définition, propriété d'espace vectoriel, propriétés de manipulation
- Familles génératrices d'un $\mathbb{K}$-ev : définition, sur-familles d'une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-ev
- Relation de dépendance linéaire : définition et relation de dépendance linéaire triviale
- Familles libres : définition, sous-familles d'une famille libre, vecteurs linéairement indépendants, familles liées, colinéarité de 2 vecteurs, cas des familles de polynômes non nuls échelonnée en degré
- Bases d'un $\mathbb{K}$-ev : définition, existence et unicité de la décomposition sous forme de combinaison linéaire, bases canoniques
- Espaces vectoriels de dimension finie : définition
- Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite
- Dimension d'un $\mathbb{K}$-ev : définition
- Lien entre cardinaux de familles libres, bases et familles génératrices
- Dimension d'un sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie
- Somme de sev : définition
- Somme directe de sev : définition et caractérisations
- Supplémentaires : définition et caractérisations
- Dimension d'une somme de sev de dimensions finies, formule de Grassman
- Caractérisation des hyperplans par leurs supplémentaires

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.