Programme de colle - Semaine 24

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Déterminer la dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel**
  Par exemple, déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel suivant :

$$F \ = \ \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(X+1) = P(X)\}$$

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$ où la famille (P_0, P_1, P_2) est la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

$$\begin{array}{cl}
 & P \in F \\
\Longleftrightarrow & P(X+1) = P(X) \\
\Longleftrightarrow & a_0 \cdot P_0(X+1) + a_1 \cdot P_1(X+1) + a_2 \cdot P_2(X+1) = a_0 \cdot P_0(X) + a_1 \cdot P_1(X) + a_2 \cdot P_2(X) \\
\Longleftrightarrow & \cancel{a_0} + a_1\,(X+1) + a_2\,(X+1)^2 = \cancel{a_0} + a_1\,X + a_2\,X^2 \\
\Longleftrightarrow & \cancel{a_1 X} + a_1 + \cancel{a_2 X^2} + 2\,a_2\,X + a_2 = \cancel{a_1 X} + \cancel{a_2 X^2} \\
\Longleftrightarrow & (a_1 + a_2) \cdot P_0 + 2\,a_2 \cdot P_1 = 0_{\mathbb{K}[X]} \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ & & 2\,a_2 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(car la famille } (P_0, P_1) \textit{ est libre)} \\
\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,a_1 & & & = & 0 \\ & & 2\,a_2 & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 0\} \\
 & = & \{a_0 \cdot P_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\
 & = & \mathrm{Vect}\,(P_0)
\end{array}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = (P_0)$ est :

- génératrice de F, d'après ce qui précède,
- libre, car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

C'est donc une base de F. On en déduit :

$$\dim(F) \ = \ \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \ = \ 1$$

$\square$

- **Continuité d'une primitive d'une fonction continue par morceaux**

  Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I.
  Soit $x_0 \in I$.

  L'application suivante est continue sur I :

$$\begin{array}{rccc} F_0 & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt \end{array}$$

  Démonstration.
  Soit $y_0 \in I$. Démontrons que F_0 est continue en y_0.
  On choisit $\alpha > 0$ tel que : $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha] \subset I$ (on adapte si y_0 est une borne de I).

  - La fonction f est continue par morceaux sur le segment $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$. Elle y est donc bornée. On note alors : $M = \max\limits_{[y_0-\alpha, y_0+\alpha]} \big(|f|\big)$.
  - Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$.

$$F_0(x) - F_0(y_0) \ = \ \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt - \int_{x_0}^{y_0} f(t)\ dt \ = \ \int_{y_0}^{x} f(t)\ dt$$

    Ainsi, par inégalité triangulaire, deux cas se présentent :

    × si $y_0 < x$, alors :

$$\big|F_0(x) - F_0(y_0)\big| \ \leqslant \ \int_{y_0}^{x} \big|f(t)\big|\ dt \ \leqslant \ \int_{y_0}^{x} M\ dt$$

    × si $y_0 > x$, alors :

$$\big|F_0(x) - F_0(y_0)\big| \ \leqslant \ \int_{x}^{y_0} \big|f(t)\big|\ dt \ \leqslant \ \int_{x}^{y_0} M\ dt$$

  - On en déduit :

$$\big|F_0(x) - F_0(y_0)\big| \ \leqslant \ M\,|x - y_0|$$

    La fonction F_0 est donc M-lipschitzienne sur $[y_0-\alpha, y_0+\alpha]$. Elle y est donc continue. En particulier, elle est continue en y_0.

□

Connaissances exigibles

Espaces vectoriels

- Somme de sev : définition
- Somme directe de sev : définition et caractérisations
- Supplémentaires : définition et caractérisations
- Dimension d'une somme de sev de dimensions finies, formule de Grassman
- Caractérisation des hyperplans par leurs supplémentaires

Dénombrement

- Ensemble fini : définition, cardinal.
- Propriétés des cardinaux :
  - × lien avec l'injectivité, la surjectivité,
  - × cardinal d'une union disjointe,
  - × cardinale du complémentaire,
  - × cardinal d'une union quelconque de 2 ensembles finis,
  - × cardinal d'un produit cartésien.
- Ensemble dénombrable
- Notion de p-liste : définition, cardinal de $\mathcal{A}(E, F)$
- Notion de permutation
- Notion de p-combinaison
- Propriétés des coefficients binomiaux

Intégration

- Fonction en escalier : définition, propriétés
- Intégrale de fonctions en escalier : définition, propriétés
- Fonction continue par morceaux :
  - définition,
  - propriétés,
  - approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier.
- Intégrale des fonctions continues par morceaux : construction, propriétés
- Primitives de fonctions continues : définition, propriétés, théorème fondamental

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.