Programme de colle - Semaine 25

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Continuité d'une primitive d'une fonction continue par morceaux**

  Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I.

  Soit $x_0 \in I$.

  L'application suivante est continue sur I :

$$\begin{array}{rcccl} F_0 & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt \end{array}$$

Démonstration.
Soit $y_0 \in I$. Démontrons que F_0 est continue en y_0.
On choisit $\alpha > 0$ tel que : $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha] \subset I$ (on adapte si y_0 est une borne de I).

- La fonction f est continue par morceaux sur le segment $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$. Elle y est donc bornée. On note alors : $M = \max\limits_{[y_0-\alpha, y_0+\alpha]} \big(|f|\big)$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$.

$$F_0(x) - F_0(y_0) \ = \ \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt - \int_{x_0}^{y_0} f(t)\ dt \ = \ \int_{y_0}^{x} f(t)\ dt$$

  Ainsi, par inégalité triangulaire, deux cas se présentent :

  × si $y_0 \leq x$, alors :

$$\big|F_0(x) - F_0(y_0)\big| \ \leqslant \ \int_{y_0}^{x} \big|f(t)\big|\ dt \ \leqslant \ \int_{y_0}^{x} M\ dt$$

  × si $y_0 \geq x$, alors :

$$\big|F_0(x) - F_0(y_0)\big| \ \leqslant \ \int_{x}^{y_0} \big|f(t)\big|\ dt \ \leqslant \ \int_{x}^{y_0} M\ dt$$

- On en déduit :

$$\big|F_0(x) - F_0(y_0)\big| \ \leqslant \ M\,|x - y_0|$$

  La fonction F_0 est donc M-lipschitzienne sur $[y_0-\alpha, y_0+\alpha]$. Elle y est donc continue. En particulier, elle est continue en y_0.

□

- **Étude d'une intégrale fonction de ses bornes** Par exemple, déterminer les variations de la fonction H suivante :

$$\begin{array}{rcccl} H & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{x^3} \frac{1}{1+t^2+t^4}\, dt \end{array}$$

Démonstration.

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$H(x) \;=\; \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} f(t)\, dt \;=\; [\, F(t)\,]_{-\sqrt{x}}^{x^3} \;=\; F(x^3) - F(-\sqrt{x})$$

- La fonction $G : x \mapsto F(-\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $G = F \circ g$ de :
  - × $g : x \mapsto -\sqrt{x}$ qui est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que : $g(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$.
  - × F qui est dérivable (car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

  De même, la fonction $x \mapsto F(x^3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  On en déduit que la fonction G est de dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= 3\,x^2 \times F'(x^3) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) F'(-\sqrt{x}) \\ &= 3\,x^2 \times f(x^3) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times f(-\sqrt{x}) && \textit{(car } F \textit{ est un primitive de } f \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= \frac{3x^2}{1+(x^3)^2+(x^3)^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+(\sqrt{x})^2+(-\sqrt{x})^4)} \\ &= \frac{3x^2}{1+x^6+x^9} + \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x+x^2)} \end{aligned}$$

  Ainsi : $H'(x) > 0$.
  La fonction H est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

□

- **Calculs d'intégrales** : primitives à vue, IPP, changement de variable, somme de Riemann.
  Par exemple, démontrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

  Démonstration.
  - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+n\,\dfrac{k}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\dfrac{k}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \textit{(où } f : x \mapsto \frac{1}{1+x}\textit{)}
\end{aligned}$$

  - La fonction f est continue sur $[0,1]$. La suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \Big[\ \ln\big(|1+t|\big)\ \Big]_0^1 = \ln(2)$$

□

Connaissances exigibles

Dénombrement

- Ensemble fini : définition, cardinal.
- Propriétés des cardinaux :
  - × lien avec l'injectivité, la surjectivité,
  - × cardinal d'une union disjointe,
  - × cardinale du complémentaire,
  - × cardinal d'une union quelconque de 2 ensembles finis,
  - × cardinal d'un produit cartésien.
- Ensemble dénombrable
- Notion de p-liste : définition, cardinal de $\mathcal{A}(E,F)$
- Notion de permutation
- Notion de p-combinaison
- Propriétés des coefficients binomiaux

Intégration

- Fonction en escalier : définition, propriétés
- Intégrale de fonctions en escalier : définition, propriétés
- Fonction continue par morceaux :
  - × définition,
  - × propriétés,
  - × approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier.
- Intégrale des fonctions continues par morceaux : construction, propriétés
- Primitives de fonctions continues : définition, propriétés, théorème fondamental
- Étude d'intégrales fonctions de leurs bornes
- Techniques de majoration d'intégrales
- Changement de variable et parité ou périodicité
- Méthodes de calcul approché d'intégrales :
  - × somme de Riemann et méthode des rectangles,
  - × méthode des trapèzes.
- Formules de Taylor :
  - × formule de Taylor avec reste intégral,
  - × inégalité de Taylor-Lagrange,
  - × formule de Taylor-Young.
- Généralisation à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

⚠

On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.