Programme de colle - Semaine 28

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Réciproque d'un isomorphisme**

  Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

  Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

  Supposons que u est un isomorphisme de E dans F.

  Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
  (en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$)

  Démonstration.

  - L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
  - Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
    Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.
    L'application u étant surjective :
    × il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.
    × il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

    On en déduit que :

$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) &= u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)\Big) \\ &= u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)\Big) \\ &= \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ &= \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$. □

- **Propriétés des probabilités**

  Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  1) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

  2) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

  3) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $A \subset B \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
  (l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

4) $\forall (A,B) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\forall (A,B,C) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^3$,

5)
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) \ + \ \mathbb{P}(B) \ + \ \mathbb{P}(C) \\ & & - \ \mathbb{P}(A \cap B) \ - \ \mathbb{P}(A \cap C) \ - \ \mathbb{P}(B \cap C) \\ & & + \ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$

(formule du crible)

6) $\forall (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^n$, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

On demandera à l'étudiant de démontrer 3 propriétés parmi les 6

Démonstration.

1) On a : $A \cup \overline{A} = \Omega$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

2) On a : $(A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B) = A$ (réunion disjointe).
Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}((A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

3) Supposons $A \subset B$.
D'après le point précédent : $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)$.
Or, comme $A \subset B$, on a $A \cap B = A$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

4) On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
On en déduit, à l'aide du point *2)* que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B) & = & \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}$$

5) Généralisation de la formule précédente :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\ = & \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & - (\ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))\ ) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$

6) On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $\forall (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^n$, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ $\square$

- **L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité**

  Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

  Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

  L'application $\mathbb{P}_B$ suivante :

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{P}_B & : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \,|\, B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array}$$

  est une probabilité.

  Démonstration.
  Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_B$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

  1) Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

  - Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$ (car $\mathbb{P}(B) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geqslant 0$.
  - Comme $A \cap B \subset B$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leqslant 1$.

  2) $\mathbb{P}_B(\Omega) \;=\; \dfrac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; 1.$

  3) Soit $(A_1, A_2) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$ un couple d'événements incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(B \cap (A_1 \cap A_2)\big)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\mathbb{P}\big((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)\big)}{\mathbb{P}(B)}$$

  Notons alors $C_1 = B \cap A_1$ et $C_2 = B \cap A_2$.
  Les événements C_1 et C_2 sont incompatibles. En effet :

$$C_1 \cap C_2 \;=\; (B \cap A_1) \;\cap\; (B \cap A_2) \;=\; B \cap (A_1 \cap A_2) \;=\; B \cap \varnothing \;=\; \varnothing$$

  Par additivité de $\mathbb{P}$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}\big((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)\big) \;=\; \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)$$

  Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) \end{aligned}$$

$\square$

Connaissances exigibles

Probabilité sur un univers fini

- Espace probabilisable, univers, événements, événement impossible, événement certain, événement contraire
- Réunion finie et intersection finie d'événements
- Événements incompatibles
- Système complet d'événements
- Espace probabilisé, probabilité, événement négligeable, événement quasi-certain, propriété vérifiée presque sûrement
- Propriétés des probabilités
- Probabilité uniforme
- Probabilité conditionnelle
- Formule des probabilités composées
- Système quasi-complet d'événements
- Formule des probabilités totales
- Méthode de calcul de probabilités

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.