

Colles

Semaine 21 : 3 mars - 7 mars

I. Questions de cours

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $iz^2 + (1+i)z = 2$.

Exercice 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Démontrer :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ admet un développement limité d'ordre 1 en } x_0$$

Démontrer de plus que, lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{cases}$

Exercice 3

Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Exercice 4

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+1}}$.

II. Exercices

Utilisations locales de la dérivabilité

Exercice 5

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).
2. Si f et g sont dérivables sur \mathbb{R} , la fonction $\max(f, g)$ est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R} .
3. Si f est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] - 1, 1[$ et bornée sur $[-1, 1]$, alors il existe $x_0 \in] - 1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.
4. Toute fonction croissante sur \mathbb{R} est dérivable à droite en tout point.
5. Toute fonction croissante et dérivable sur \mathbb{R} a une fonction dérivée positive ou nulle en tout point.
6. Toute fonction strictement croissante sur \mathbb{R} et dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ a une dérivée strictement positive en x_0 .
7. Si f est dérivable sur $[0, 1]$, alors $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = f'(0)$.
8. Si f est définie sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1]$ et si $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t)$ existe dans \mathbb{R} , alors f est dérivable en 0 et $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = f'(0)$.
9. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
10. Soit f une fonction 1-périodique telle que $f|_{[0,1]}$ est dérivable. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} .
11. Soit f une fonction 1-périodique telle que $f|_{[0,2]}$ est dérivable. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 6

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f suivante :

$$\begin{aligned} f &: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

1. en revenant à la définition de la dérivabilité en un point,
2. en utilisant le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 7

Montrer que la dérivée d'une fonction paire (resp. périodique) est une fonction impaire (resp. périodique).

Exercice 8

On pose : $f = \arcsin^2$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions polynomiales et admettant f' comme solution.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$.
3. Donner alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de $f^{(n)}(0)$.

Étude de $(f^{-1})'$ **Exercice 9**

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
- b) Montrer que f est bijective de \mathbb{R} vers un intervalle à préciser.
- c) Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
- d) Quel est l'unique antécédent de 0 par f ? En déduire $(f^{-1})'(0)$.
- e) Donner une expression générale de $(f^{-1})'$.

Exercice 10

On note $f : x \mapsto x e^x$.

- a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Étudier ses variations.
- b) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}^+ dans I , où I est un intervalle à préciser.
- c) On note h la bijection réciproque. Déterminer sa dérivée h' .
- d) Faire une étude complète de h (variations, allure de la courbe).
- e) Justifier que l'équation $e^{-x} = 2x$ admet une unique solution réelle, et exprimer cette solution à l'aide de h .

Développement limité à l'ordre 1 en x_0 **Exercice 11**

Soit f une fonction dérivable en a .

Le but de l'exercice est de déterminer : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+3h))^2 - (f(a-h))^2}{h}$.

a) On considère la fonction $h : x \mapsto f(a+x)$.

Montrer que la fonction h est dérivable en 0.

b) Écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction h en 0.

(on utilisera l'écriture avec la fonction $\varepsilon(\cdot)$)

c) En déduire une écriture de $(f(a+x))^2$ pour x au voisinage de 0.

d) Démontrer que : $(f(a+x))^2 = (f(a))^2 + 2xf(a)f'(a) + o_{x \rightarrow 0}(x)$.

Conclure.

Caractère $\mathcal{C}^n/\mathcal{C}^\infty$ **Exercice 12**

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, les éventuels prolongements par continuité, et déterminer la classe la plus fine possible de la fonction (éventuellement prolongée). Donner l'équation des tangentes (si elles existent) aux points qui posent problème.

a) $f : x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$

d) $f : x \mapsto \sqrt{x} e^{-x}$

b) $f : x \mapsto x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$

e) $f : x \mapsto x \sqrt{x+x^2}$

c) $f : x \mapsto (1-x) \sqrt{1-x^2}$

f) $f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$

Exercice 13

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

b) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Calcul de dérivée $n^{\text{ème}}$ **Exercice 14**

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

a) $f : x \mapsto (x^2 + 1) e^x$

c) $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$

b) $f : x \mapsto x^2 (1+x)^n$

d) $f : x \mapsto \left(\sin(x) + x (\cos(x))^2 \right) x$

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées $n^{\text{ème}}$ des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto x^2 \sin(x)$

c) $x \mapsto e^x \sin(x)$

b) $x \mapsto x^2 (1+x)^n$

Théorème de Rolle**Exercice 16**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe un élément $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

(on pourra introduire la fonction $g : x \mapsto e^x (f(x) - f'(x))$)

Théorème des accroissements finis**Exercice 17**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Démontrer :

$$\forall x > 0, \exists c > 0, \quad f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

(on pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - f(-x)$)

Exercice 18

Soit f une fonction réelle dérivable sur $[0, 1]$ et telle que : $f(1) - f(0) = \frac{1}{2}$.

Montrer que f' n'admet aucun point fixe.

Exercice 19

Soit f une fonction réelle dérivable sur \mathbb{R} et telle que : $2f(1) = f(2)$.

Montrer que le graphe Γ de f admet une tangente passant par l'origine du repère dans lequel on trace Γ .

Exercice 20

Majorer, lorsque (a, b) est un couple de réels et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le nombre de solutions réelles de l'équation $x^n + ax + b = 0$.

Applications de l'IAF**Exercice 21**

On considère la fonction f suivante.

$$f : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{e^x - 1} \end{cases}$$

a) Calculer, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x)$.

b) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (xe^x - 2e^x + x + 2)$.

c) Étudier les variations de la fonction $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par : $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$.

En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f''(x) > 0$.

d) En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$).

On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f .

e) On considère la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Montrer $\forall x \in]0, +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq f(x) \leq 1$.

- f)** Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.
- g)** Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$.
- h)** Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 22

Soit la suite la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

On pose $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

- a.** Montrer que $[0, 2]$ est stable par f et que : $\forall x \in [0, 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- b.** Déterminer les points fixes de f . Notons r l'unique point fixe dans $[0, 2]$.
- c.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$.
- d.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leq \frac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
- e.** Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- f.** Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leq 10^{-9}$.
- g.** Écrire un programme **Python** donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

Exercice 23

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- 1.** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, que l'on notera α .
- 2.** Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f .
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
- 3. a)** Montrer que : $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$
- b)** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$.
- c)** Puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.
- d)** En déduire enfin que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 24

On considère la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 + \frac{\ln u_n}{4} \end{cases}$

- a)** Soit $f : x \mapsto 4 + \frac{\ln x}{4}$.
Étudier la fonction f et montrer que $[1, e^2]$ est stable par f .
- b)** Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1, e^2]$. En déduire que f possède un unique point fixe dans cet intervalle.
- c)** Montrer que pour tout n , u_n existe et appartient à l'intervalle $[1, e^2]$.
- d)** Étudier la monotonie de (u_n) et montrer qu'elle converge vers une limite L à préciser.
- e)** À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, donner une majoration de $|u_n - L|$ en fonction de n .

Exercice 25

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

1. Démontrer que f_n est dérivable sur \mathbb{R} et que, pour tout $x \in [0, 1]$: $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$
2. En déduire que la suite réelle $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 26

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{p=0}^n p^\alpha$.

1. Démontrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $(\alpha + 1)p^\alpha \leq (p + 1)^{\alpha+1} - p^{\alpha+1} \leq (\alpha + 1)(p + 1)^\alpha$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n^{\alpha+1} \leq (\alpha + 1)S_n \leq (n + 1)^{\alpha+1}$.
3. Déterminer un équivalent « simple » de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la limite, si elle existe de la suite $(n^\beta S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour chaque valeur du réel β .

Exercice 27

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition.
2. Démontrer : $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.
3. Construire le tableau de variations de f et démontrer : $\forall x > 1, f(x) < x$.
4. Soit $a > 1$. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

- a) Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à valeurs dans $]1, +\infty[$.
- b) Établir que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite ℓ .
- c) Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad |x_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{3} |x_n - \ell|$$

- d) En déduire :

$$\forall n \geq n_0, \quad |x_n - \ell| \leq \frac{1}{3^{n-n_0}} |x_{n_0} - \ell|$$

- e) En déduire : $x_n = \ell + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right)$.

Exercice 28

Étudier la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]\frac{2}{3}, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2} \end{cases}$

Exercice 29

Étudier la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2 + 1} \end{cases}$$

Fonctions lipschitziennes**Exercice 30**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soient f et g deux fonctions définies et lipschitziennes sur $[a, b]$.

1. Démontrer que $f + g$ et $f \times g$ sont lipschitziennes.
2. Démontrer que, si f ne s'annule pas sur $[a, b]$, la fonction $\frac{1}{f}$ est lipschitzienne.
3. Les résultats précédents restent-ils nécessairement vrais si f et g ne sont pas définies sur un segment ?

Exercice 31

Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} .

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$.
 - a) Démontrer que si la restriction à $[a, b]$ de f est lipschitzienne, alors elle est bornée.
 - b) Ce résultat est-il encore nécessairement vrai pour la restriction de f à un intervalle non borné sur lequel cette dernière est supposée lipschitzienne ?
2. On suppose f lipschitzienne sur \mathbb{R} . Démontrer que, pour tout $p \in]-\infty, -1[$, la fonction $g : x \mapsto x^p f(x)$ admet 0 comme limite en $+\infty$.
3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant : $a < b < c$. On suppose que les restrictions de f sur $[a, b]$ et $[b, c]$ sont lipschitziennes. Montrer que la restriction de f sur $[a, c]$ est lipschitzienne.

Exercice 32

Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} . Soit g une fonction réelle définie sur I vérifiant : $g(I) \subset I$. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que g soit k -lipschitzienne sur I . On définit par récurrence une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
2. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^* : |u_{n+1} - u_n| \leq k |u_n - u_{n-1}|$.
3. En déduire que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $q > p \geq 0$:

$$(1 - k) |u_q - u_p| \leq k^p |u_1 - u_0|$$

4. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
5. On admet l'existence d'une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel noté L .
 - a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.
 - b) En appliquant la question 2., montrer que la suite $(u_n - u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, puis que (u_n) converge vers L .
 - c) Vérifier : $g(L) = L$. Puis démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - L| \leq \frac{k^n |u_1 - u_0|}{1 - k}$$

Convexité**Exercice 33**

Démontrer les inégalités suivantes.

$$a) \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

$$b) \forall x \in]0, +\infty[, \ln x \leq x - 1$$

$$c) \forall x \in [1, e], \ln x \geq \frac{x-1}{e-1}$$

Exercice 34

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

Exercice 35

Étudier les fonctions suivantes, notamment la convexité et la présence de points d'inflexion. On finira en traçant les courbes.

$$a) f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$$

$$b) f : x \mapsto x \sqrt{1 - x^2}$$

$$c) f : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$$

$$d) f : x \mapsto \frac{2 \ln x + 3}{x}$$

$$e) f : x \mapsto -x^2 + 3x - \ln x$$

Exercice 36

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\ln(\ln x)$ est convexe sur $]1, +\infty[$.

b) En déduire que : $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercice 37

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, 1[$ (0 compris).

b) Déterminer la convexité de f sur $[0, 1[$.

c) Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.

d) Tracer une allure de la courbe représentative de f .

Exercice 38

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$.

On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et on considère :

$$g : x \mapsto f(x) - M \frac{(x-a)(b-x)}{2} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto f(x) + M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

a) Justifier l'existence de M .

b) Montrer que g est convexe et h est concave.

c) En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, on a : $|f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$.

Exercice 39

Démontrer : $\forall x \in [1, e], \frac{x-1}{e-1} \leq \ln(x) \leq \min\left(x-1, \frac{x}{e}\right)$.

Exercice 40

Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - 2 \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)} \geq 0$.

Exercice 41

1. Démontrer que la fonction \ln est concave.

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

Exercice 42

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soient f et g deux fonctions convexes sur $]a, b[$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

1. Démontrer que $f + g$, $\lambda \cdot f$ et $\sup(f, g)$ sont convexes sur $]a, b[$.

2. On suppose que la fonction f est bijective et décroissante sur $]a, b[$.

a) Démontrer que f^{-1} est convexe sur $]f(b), f(a)[$.

b) Que dire si f est bijective et croissante ?

Exercice 43

Démontrer qu'une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , convexe et majorée, est constante.

Calculs de développements limités**Exercice 44**

Déterminer les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+1}}$

3. $x \mapsto \arccos(x)$

2. $x \mapsto e^{\sqrt{1+x^2}}$

4. $x \mapsto \ln(1+x+\sqrt{1+x^2})$

Exercice 45

Déterminer les développements limités à l'ordre 3 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \arcsin\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$ en 0

3. $x \mapsto \arctan(\sqrt{3} \cos(x) + \sqrt{3} \sin(x))$
en 0

2. $x \mapsto (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$ en 0

4. $x \mapsto \arctan(2 \sin(x))$ en $\frac{\pi}{3}$

Exercice 46

Déterminer le développement limité de la fonction \arcsin en 0 à tout ordre.

Exercice 47

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

2. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* dont la bijection réciproque est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

3. On admet que f est trois fois dérivable sur \mathbb{R} . Donner un développement limité de la fonction f^{-1} à l'ordre 3 en 1.

Description locale du graphe d'une fonction

Exercice 48

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f &:]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(\tan(x)) \end{aligned}$$

Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ et préciser la position relative locale de cette courbe et de cette tangente.

Exercice 49

On considère la fonction f suivante :

$$\begin{aligned} f &:]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\setminus\{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^{\sqrt{1+\sin(x)}} - e}{\tan(x)} \end{aligned}$$

1. Démontrer que f se prolonge par continuité en 0 en une fonction que l'on nommera g .
2. Démontrer que g est dérivable en 0 puis préciser la position relative du graphe de g et de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 50

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) \arctan(x) \sqrt{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Préciser, si elles existent, les asymptotes du graphe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, ainsi que les positions relatives de ces asymptotes et du graphe de f au voisinage de ces mêmes points.

Exercice 51

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^4 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

1. Démontrer qu'au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), le graphe de f est asymptote à une parabole dont on donnera l'équation.
2. Préciser la position respective de cette parabole et du graphe de f au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice 52

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f &:]-1, +\infty[\setminus\{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} \end{aligned}$$

Démontrer que la fonction f se prolonge en une fonction g trois fois dérivable sur $]-1, +\infty[$. On précisera les valeurs de $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ et $g^{(3)}(0)$.

Exercice 53

On considère la fonction définie sur $] -1, +\infty[\setminus \{0\}$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x} \sin(x) \ln(1+x)$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
2. Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction g à préciser dont on prouvera qu'elle est dérivable en 0.
3. Démontrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
4. On pose $h : x \mapsto x f\left(\frac{1}{x}\right)$. Que peut-on en déduire à propos de h à partir du développement limité d'ordre 2 en 0 de f ?
5. En déduire l'équation d'une asymptote au graphe de h et préciser la position relative du graphe par rapport à l'asymptote.

Développement asymptotique des solutions d'une équation**Exercice 54**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n suivante :

$$\begin{aligned} f_n &:]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \tan(x) \end{aligned}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bijective.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = e^{-x}$ admet une unique solution $\alpha_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
3. Démontrer que la réciproque de f_0 admet un développement limité à tout ordre en 0. Calculer ce développement limité à l'ordre 3.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n = n\pi + f_0^{-1}(e^{-n\pi})$.
5. En déduire : $\alpha_n = n\pi + e^{-n\pi} - e^{-2n\pi} + \frac{7}{6} e^{-3n\pi} + o_{n \rightarrow +\infty}(e^{-3n\pi})$.

Exercice 55

On considère la fonction f suivante :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x + x \end{aligned}$$

1. Démontrer : $\frac{x}{x + \ln(1 + x e^{-x})} = 1 - e^{-x} + o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-x})$.
2. En déduire : $\frac{x}{\ln(f(x))} = 1 - \frac{1}{f(x)} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel x_n tel que : $f(x_n) = n$.
4. Démontrer : $x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.