
Colles

Semaine 27 : 5 mai - 9 mai

I. Questions de cours

Exercice 1

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Démontrer : H est un sev de $E \Rightarrow f(H)$ est un sev de F .
2. Démontrer : G est un sev de $F \Rightarrow f^{-1}(G)$ est un sev de E .

Exercice 2

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Démontrer : f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. Supposons de plus que E est de dimension finie. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .
Démontrer : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

Exercice 3

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Supposons que u est un isomorphisme de E dans F .

Démontrer que u^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

II. Exercices

Noyau et image d'une application linéaire

Exercice 4

Soit $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 5x_3$.

Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 5

Soit $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i$.

Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$, avec une base pour chacun.

Exercice 6

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $\varphi(P) = P'$.

Montrer que φ est linéaire, puis déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$, avec une base pour chacun.

Exercice 7

Soit $f : \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\text{Ker}(f) = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
Que dire de l'application f ?

Exercice 8

Soit $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \end{pmatrix}$.

Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$, ainsi qu'une base pour chacun. Que conclure ?

Exercice 9

On définit une fonction $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ en posant :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Étudier l'injectivité de f , puis la surjectivité de f .
3. Déterminer si elle existe la bijection réciproque de f .

Exercice 10

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$. On suppose A inversible.

Démontrer que f est bijective et que f^{-1} est l'application linéaire $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par $f^{-1}(Y) = A^{-1}Y$.

Exercice 11. Endomorphisme et commutant

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que le noyau $\text{Ker}(f)$ de f est un sev de E .
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée.
On considère l'application $c_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.
 - a) Montrer qu c_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - b) On note $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ le commutant de la matrice A . Dédurre des questions précédentes que \mathcal{C}_A est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - c) Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\text{Ker}(c_A)$ et sa dimension.

Exercice 12. Composition

Soient E un espace vectoriel et f un automorphisme de E . On considère :

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto & f \circ g \circ f^{-1} \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. En recherchant une application réciproque sous la même forme que Φ , montrer que Φ est un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 13

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le rang de A .
- Calculer AU puis en déduire $\text{Ker}(A)$.

Exercice 14

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{array}$

- Montrer que f est linéaire.
- Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Calculer $f(P)$. f est-elle injective ?
- Déterminer une base de l'image de f . f est-elle surjective ?
- Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ n'ayant pas d'antécédent par f .

Exercice 15

On considère l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (2x + y + z, x + y + t, x + z - t) \end{array}$$

- Déterminer une base du noyau de g .
- Déterminer une base de l'image de g en utilisant le théorème du rang.

Exercice 16

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{a+d}{2} \cdot I + \frac{b+c}{2} \cdot J \end{array}$$

- Calculer $f(I)$ et $f(J)$.
- Montrer que f est un endomorphisme.
- Déterminer une base du noyau de f . f est-elle injective ?
- En déduire le rang de f puis une base de l'image de f .

Exercice 17

E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{R} , rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de E défini par

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

- Déterminer une base de $\text{Im}(f_a)$.
- Montrer qu'une base de $\text{Ker}(f_a)$ est $(e_2, e_1 - e_3)$.

Exercice 18

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

- Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- Démontrer l'équivalence suivante :

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$$

Isomorphisme

Exercice 19. *Isomorphisms*

Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes.

$$1. f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x - t, y + z, y - z, x + t) \end{array}$$

$$2. f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P + P' \end{array}$$

$$3. f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & TMT \end{array} \text{ avec } T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ inversible.}$$

$$4. f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(1), P''(0)) \end{array}$$

Exercice 20

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera la dimension.

b) Vérifier alors que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

2. On pose $Q_0(X) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Q_{n+1} = \varphi^{-1}(Q_n)$. Montrer que la famille (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 21

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts et P un polynôme réel de degré n .

1. Montrer que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a) Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{array}$$

b) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supposons :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k P^{(i)}(a_k) = 0$$

Démontrer : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_i = 0$.

3. Démontrer que la famille $(P(X + a_0), \dots, P(X + a_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 22

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On note \mathcal{C} l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f .

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que : $f^{(n-1)}(a) \neq 0_E$. En déduire que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
2. a) Démontrer que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
b) Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C} &\rightarrow E \\ g &\mapsto g(a) \end{aligned}$$

c) Que dire de la dimension de \mathcal{C} ?

3. Démontrer : $\mathcal{C} = \text{Vect}(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.

Exercice 23

Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P + P' + P'' \end{aligned}$$

Exercice 24

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : A \times B &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

1. Montrer que l'application f est linéaire et déterminer son image et son noyau.
2. Montrer que $A \cap B$ et $\text{Ker}(f)$ sont isomorphes (en tant qu'espaces vectoriels).
3. Déduire du théorème du rang :

$$\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

Généralités sur les applications linéaires**Exercice 25**

Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, et $h_1, h_2 \in \mathcal{L}(G, E)$.
a) Montrer que si f est injective et si $f \circ h_1 = f \circ h_2$ alors $h_1 = h_2$.
b) Montrer que si f est surjective et si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, alors $g_1 = g_2$.
2. **Application.**

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $(AB)^2$ et en déduire BA .

Exercice 26

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces supplémentaires de E .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note p_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{k \neq i} F_k$.

1. Montrer :

$$(i) \text{ id}_E = p_1 + p_2 + \dots + p_n \qquad (ii) \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$$

2. Soient p_1, \dots, p_n des endomorphismes de E vérifiant (i) et (ii).

On note $F_i = \text{Im}(p_i)$.

a) Montrer : $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

b) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application p_i est la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{k \neq i} F_k$.

Exercice 27

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

Soit V un sous-espace vectoriel de E .

On note $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{L}(E, F) \mid V \subset \text{Ker}(f)\}$.

Montrer que \mathcal{A} est un \mathbb{K} -espace vectoriel et calculer sa dimension.

Exercice 28

Soit $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto (X - a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a)) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est bien définie, puis que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On note (a_0, a_1, \dots, a_n) ses coordonnées dans la base $(1, X - a, \dots, (X - a)^n)$.

a) Démontrer : $f(P) = \sum_{i=2}^n (i - 2) a_i (X - a)^i$.

b) En déduire le noyau et l'image de f .

3. a) En utilisant directement la définition de f , calculer, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f((X - a)^i)$.

b) Retrouver alors les résultats de la question 2.

Exercice 29

Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$. Supposons : $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u + v$ injectif.

Démontrer : $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = \dim(E)$.

Exercice 30

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que u est de rang 1.

Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $u \circ u = \lambda \cdot u$.

Exercice 31

Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$. Soient E_0, \dots, E_n des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et (u_0, \dots, u_{n-1}) un élément de $\mathcal{L}(E_0, E_1) \times \mathcal{L}(E_1, E_2) \times \dots \times \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n)$ tel que u_0 soit injective, u_{n-1} soit surjective et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$: $\text{Im}(u_i) = \text{Ker}(u_{i+1})$. Démontrer :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(E_i) = 0$$

Exercice 32

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que f laisse stable toutes les droites vectorielles de E .

On désigne par (e_1, \dots, e_n) une base de E .

a) Vérifier que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que : $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

b) Démontrer que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $e_i + e_j$ est colinéaire à $f(e_i + e_j)$.

c) Montrer alors que les λ_i sont égaux.

d) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \lambda \cdot \text{id}_E$.

2. Supposons : $\forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f$. Démontrer qu'il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \lambda \cdot \text{id}_E$.

Formes linéaires et hyperplans**Exercice 33**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective.

Soit H un sous-espace vectoriel de F .

Montrer que si H est un hyperplan de F , alors $u^{-1}(H)$ (sous-espace vectoriel de E) est un hyperplan de E .

Exercice 34

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E linéairement indépendantes. Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note : $H_j = \text{Ker}(\varphi_j)$.

1. Justifier que les espaces H_1, \dots, H_p sont des hyperplans deux à deux distincts de E .

2. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi &: E \rightarrow \mathbb{K}^p \\ x &\mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{aligned}$$

a) Justifier que φ est linéaire, surjective et de noyau $H_1 \cap \dots \cap H_p$.

b) En déduire : $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) = n - p$.

Exercice 35

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$.

On suppose : $\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0_E \Rightarrow f = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$

Montrer que \mathcal{B} est une base de E .

Exercice 36

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note e_i^* l'application qui à tout $x \in E$ associe la i -ème coordonnée de x dans \mathcal{B} .

Montrer que la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

2. Soit $\mathcal{C} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

a) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \psi &: E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

b) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$.

Exercice 37

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle **trace** de M , et on note $\text{tr}(M)$, la somme des coefficients diagonaux de M .

1. a) Montrer : $\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

b) Montrer : $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

a) Montrer qu'il existe une unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(M) = \text{tr}(AM)$$

b) On suppose de plus : $\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \text{tr}$.