Colles

Semaine 3 : 16 septembre - 20 septembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Énoncer et démontrer la propriété de distributivité de `ET` sur `OU` .

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression sans symbole $\sum$ de $\sum_{k=0}^{n} k$. La démontrer par récurrence.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression sans symbole $\sum$ de $\sum_{k=0}^{n} k^2$. La démontrer par récurrence.

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression sans symbole $\sum$ de $\sum_{k=0}^{n} k^3$. La démontrer par récurrence.

II. Exercices

Logique

Exercice 5
Soient p, q et r trois propositions. Démontrer :

1) $\texttt{NON}(p \texttt{ ET } q) \iff \texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q)$

2) $\texttt{NON}(p \texttt{ OU } q) \iff \texttt{NON}(p) \texttt{ ET } \texttt{NON}(q)$

3) $p \texttt{ ET } (p \texttt{ OU } q) \iff p$

4) $p \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } q) \iff p$

5) $p \texttt{ ET } (q \texttt{ OU } r) \iff (p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)$

6) $p \texttt{ OU } (q \texttt{ ET } r) \iff (p \texttt{ OU } q) \texttt{ ET } (p \texttt{ OU } r)$

7) $\big((p \Rightarrow q) \texttt{ ET } (q \Rightarrow r)\big) \implies (p \Rightarrow r)$

8) $(p \Rightarrow q) \implies \big((r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)\big)$

Exercice 6
Parmi les propositions ci-dessous, exhiber un élément qui permet de satisfaire celles qui sont justes.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 3$

2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x \leqslant n$

3. $\exists p \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ p \leqslant n$

4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^y = x\, z^2$

Équations

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\dfrac{5}{3-x} = 3 - \dfrac{x+4}{3}$

b) $x+1 = \sqrt{\dfrac{x}{6}+6}$

c) $\dfrac{5}{3x-2} = \dfrac{1}{x-4}$

d) $\dfrac{2}{x-3} = 3$

e) $x + \dfrac{2}{6 - \dfrac{3}{x-1}} = 1$

Exercice 8
Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x} + 1 = 2x$

2. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x-1} = 2 - x + x^2$

3. $|x+1| + |2x+1| = 0$

4. $(m-2)\,x^2 + 2(m+1)\,x + m - 14 = 0$, où m est un paramètre réel.

Inéquations

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x + 2 \geqslant \sqrt{x+5}$

b) $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1$

c) $|4-2x| \leqslant 8$

d) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x(x-1)} \leqslant 1$

e) $\sqrt{x+5} \geqslant \sqrt{x^2-4}$

Exercice 10
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x^2 - 3x - 3 \leqslant 0$

b) $\dfrac{x-2}{x+1} > \dfrac{2x+1}{3x-2}$

c) $\sqrt{-x^2+x+3} \leqslant 2x+1$

d) $|2x-1| \leqslant x^2 - x - 1$

e) $|3-2x| \geqslant \sqrt{-2x^2+x+1}$

f) $|3x^2+2x-1| < |-x^2+2x+3|$

Récurrence

Exercice 11
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11.

Exercice 12
Notons (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2$$

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur sa valeur et démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 13
On note (w_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}(w_n + 4n + 6) \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

Exercice 14
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}}$$

Conjecturer puis démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite de u_n en fonction de n.

Exercice 15
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et n.

Sommes finies

Exercice 16
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} \qquad \text{et} \qquad v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(e^{-\frac{3}{k}}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Puis préciser la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. En déduire la monotonie et la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 17

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

2. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

Exercice 18
Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$.

Dans cet exercice, on considère n carrés emboîtés : le plus petit est de côté S_1, le suivant de côté S_2, ..., le dernier est de côté S_n.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note C_i l'aire du carré de côté S_i.

a. Soit $k \in [\![2, n]\!]$, exprimer $C_k - C_{k-1}$ en fonction de S_k et S_{k-1}.

b. En déduire une expression de $C_k - C_{k-1}$ en fonction de k.

c. Déduire de la question précédente que $C_n - C_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} k^3$.

d. Conclure sur la relation liant la somme des n premiers entiers et la somme des n premiers cubes.

Exercice 19
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$.
On définit la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k.q^k$.
On définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

a. Calculer f_n', la dérivée de la fonction f_n par rapport à la variable x.

b. En déduire une relation entre u_n et $f_n'(q)$.

c. En reconnaissant une somme classique, simplifier l'expression de $f_n(x)$.

d. Calculer f_n' à l'aide du résultat de la question précédente.

e. En déduire le résultat souhaité.

Exercice 20
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]1, +\infty[$. Démontrer : $\dfrac{a^n - 1}{a - 1} \leqslant n\, a^{n-1}$.