Colles

Semaine 7 : 14 octobre - 18 octobre

I. Questions de cours

Exercice 1

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

Démontrer :

$$A \cup B = A \;\Leftrightarrow\; B \subset A$$

Exercice 2

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

Démontrer :

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$$

Exercice 3

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

1. Démontrer : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow\ g \circ f : E \to G \text{ est injective}$

2. Démontrer : $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ f injective

Exercice 4

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

1. Démontrer : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow\ g \circ f : E \to G \text{ est surjective}$

2. Démontrer : $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g surjective

Exercice 5

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications.

Démontrer :

$$\left.\begin{array}{r} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont bijectives.} \\ \text{De plus : } g = f^{-1} \text{ et } f = g^{-1} \end{array}$$

II. Exercices

Opérateurs ensemblistes

Exercice 6
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Démontrer :

$$\big(A \cap B = A \cup B\big) \;\Rightarrow\; (A = B)$$

2. Démontrer :

$$A \setminus (A \setminus B) \;=\; A \cap B$$

Exercice 7
Soit E un ensemble.
Soient A, B et C des parties de E.
Démontrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $(A \setminus B) \subset C$

(ii) $(A \setminus C) \subset B$

(iii) $A \subset (B \cup C)$

Exercice 8
Soit E un ensemble.
Soient A et B des parties de E.

a) Que valent $A \setminus \varnothing$ et $A \setminus A$?

b) Montrer : $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

c) Montrer : $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.

Exercice 9
Soit E un ensemble.
Soient A et B des parties de E.

a) Montrer : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) Montrer : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Montrer : $(A \cap B = A \cup B) \;\Leftrightarrow\; A = B$.

Exercice 10
Soit E un ensemble non vide.
Soient A et B des parties de E.
Résoudre, en discutant éventuellement sur la nature des parties A et B, l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \varnothing$, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice 11
Soit E un ensemble.
Soient A, B et C des parties de E.

Montrer : $\left.\begin{array}{lcl} A \cup B & \subset & A \cup C \\ A \cap B & \subset & A \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B \subset C.$

Ensemble des parties d'un ensemble E

Exercice 12

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

1. Démontrer que $\mathscr{P}(A \cap B) \ = \ \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

2. ***a)*** Démontrer que $\mathscr{P}(A \cup B) \ \supset \ \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

b) Y a-t-il égalité ?

Exercice 13

On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.

a) Détailler $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ et $\mathscr{P}(F)$.

b) Est-ce que l'un est inclus dans l'autre ?

Image directe d'une application

Exercice 14

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application définie et continue sur un intervalle I.

1. Si f est strictement croissante, que vaut $f(I)$ dans le cas où :

a) $I = [a, b]$ ***b)*** $I =]a, b]$ ***c)*** $I =]a, b[$ ***d)*** $I = [a, b[$

2. Répondre à la même question lorsque f est strictement décroissante.

3. Que peut-on dire dans le cas où f est simplement (dé)croissante ?
Et si l'on ne connaît pas la monotonie de f ?

Image réciproque d'un ensemble

Exercice 15

Soient E et F des ensembles.

Soient $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(F)$.

Soit $f : E \to F$ une application.

Démontrer : $f\Big(A \cap f^{-1}(B)\Big) = f(A) \cap B$.

Exercice 16

Soient E et F des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Démontrer : $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

2. Établir : f est injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

Exercice 17

Soient E et F deux ensembles.

Soient A une partie de E ($A \subset E$) et B une partie de F ($B \subset F$).

Montrer : $A \times B \ \subset \ E \times F$.

Caractère injectif / surjectif / bijectif

Exercice 18

Soit $f : E \to E$ une application vérifiant : $f \circ f \circ f = id_E$.

Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Exercice 19

Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

a) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***e)*** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \overset{f}{\to} & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***i)*** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \overset{f}{\to} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$

b) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***f)*** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^+ & \overset{f}{\to} & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***j)*** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

c) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \overset{f}{\to} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***g)*** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \overset{f}{\to} & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$ ***k)*** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^* & \overset{f}{\to} & \mathbb{Q}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

d) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \overset{f}{\to} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***h)*** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \overset{f}{\to} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$ ***l)*** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \overset{f}{\to} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

Exercice 20

On considère l'application $g : \left| \begin{array}{rcc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{x+1} \end{array} \right.$

a) Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

b) Répondre aux mêmes questions pour $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

Exercice 21

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Montrer que si f est strictement croissante alors f est injective.

b) Le résultat précédent est-il vérifié si f est strictement décroissante ?

c) Trouver les solutions de l'équation en x : $x + e^x = 1$.

Exercice 22

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : E \to G$ deux applications.

On considère la fonction h suivante.

$$h \ : \left| \begin{array}{ccc} E & \mapsto & F \times G \\ x & \mapsto & \big(f(x), g(x)\big) \end{array} \right.$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) On suppose f et g surjectives. La fonction h est-elle surjective ?

Exercice 23

a) L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$?

b) L'application $x \mapsto x^2$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$? Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{Q}^+$?

Exercice 24

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y.

b) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

c) Montrer : $\forall x \in [-1,1], f(x) \in [-1,1]$.
La restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ de f est-elle bijective ?

Exercice 25

Soient E, F, G, H des ensembles.

Soient $f \in \mathcal{A}(E,F)$, $g \in \mathcal{A}(F,G)$ et $h \in \mathcal{A}(G,H)$.

On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

Démontrer que f, g, h sont bijectives.

Exercice 26

Soit f une application de A dans B.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si : $\forall Y \in \mathscr{P}(B),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.

2. Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall X \in \mathscr{P}(A),\ f^{-1}\big(f(X)\big) = X$.

Des propriétés contre-intuitives

Exercice 27

On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.

Démontrer que l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \right.$ est bijective.

(conclusion : il y a autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels !)

Exercice 28

Démontrer que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.

Exercice 29

Démontrer que l'application f suivante est bijective.

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ & & (a,b) & \mapsto & 2^a\,(2b+1) \end{array}$$

Applications sur $\mathscr{P}(E)$

Exercice 30

Soit E un ensemble et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.

On note :

$$\varphi_A \;:\; \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cap X \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi_A \;:\; \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cup X \end{array}$$

a) Sous quelle condition φ_A est-elle surjective ? Injective ?

b) Même question pour ψ_A.

Exercice 31

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E.

On considère l'appication $f : \left| \begin{array}{ccccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) & \times & \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A & , & X \cap B) \end{array} \right.$

a) Démontrer : (f est injective) $\Rightarrow (A \cup B = E)$.

b) Démontrer : (f est injective) $\Leftarrow (A \cup B = E)$.
(on pourra procéder par l'absurde et penser à former $X_1 \cap (A \cup B)$ ainsi que $X_2 \cap (A \cup B)$)

c) Démontrer : f est surjective $\Leftarrow A \cap B = \varnothing$.

d) Démontrer : f est surjective $\Rightarrow A \cap B = \varnothing$.
(on pourra procéder par l'absurde et raisonner sur l'existence d'un antécédent à $(A \setminus A \cap B, A \cap B)$)

e) Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1}.