Analyse asymptotique - Méthodologie

I. Rappels de calcul différentiel

I.1. Dérivabilité sur un intervalle

I.1.a) Dérivabilité d'un quotient

Exercice 1

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{1+\mathrm{e}^x}$ suivante est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ de :

- $f_1 : x \mapsto \arctan(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- $f_2 : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^x$ qui :
  - × est dérivable sur $\mathbb{R}$,
  - × `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}$.

□

I.1.b) Dérivabilité d'une composée

Exercice 2

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\big(\sin(x)\big)$ suivante est dérivable sur $]0, \pi[$.

Démonstration.

La fonction f est dérivable sur $]0, \pi[$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ de :

- $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ qui est :
  - × dérivable sur $]0, \pi[$,
  - × telle que : $f_1\big(]0, \pi[\big) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. □

I.2. Inégalité des accroissements finis et suites récurrentes

Structure de ce type d'exercices

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I intervalle.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Supposons que f est dérivable sur I.

Supposons qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que : $\forall u \in I,\ |f'(u)| \leqslant M$.

Supposons que I est stable par f (*i.e.* $f(I) \subset I$).

Supposons que f admet un point fixe $\ell \in I$ (*i.e.* $f(\ell) = \ell$).

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \in I}$
(par récurrence)

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|u_{n+1} - \ell| \leqslant M\ |u_n - \ell|}$
(par inégalité des accroissements finis)

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|u_n - \ell| \leqslant M^n\ |u_0 - \ell|}$
(par récurrence)

4) Si on sait de plus que $0 \leqslant M < 1$, alors (u_n) est convergente, de limite ℓ.
(par théorème d'encadrement)

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto 4 - \dfrac{1}{4}\ \ln(x)$.

On définit alors la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On rappelle les valeurs approchées suivantes : $\ln(2) \simeq 0.69$ et $\ln(3) \simeq 1.1$.

1. Démontrer que l'intervalle $I = [3, 4]$ est stable par f.

Démonstration.
Soit $x \in [3, 4]$.

On a alors	3	$\leqslant$	x	$\leqslant$	4	
donc	$\ln(3)$	$\leqslant$	$\ln(x)$	$\leqslant$	$\ln(4)$	*(par croissance de la fonction* ln*)*
et	$\dfrac{-1}{4}\ln(3)$	$\geqslant$	$\dfrac{-1}{4}\ln(x)$	$\geqslant$	$\dfrac{-1}{4}\ln(4)$	
ainsi	$4 - \dfrac{1}{4}\ln(3)$	$\geqslant$	$f(x)$	$\geqslant$	$4 - \dfrac{1}{4}\ln(4) \ = \ 4 - \dfrac{\ln(2)}{2}$	

- Comme $\ln(2) \leqslant 1$, $-\dfrac{\ln(2)}{2} \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et donc $4 - \dfrac{\ln(2)}{2} \geqslant \dfrac{7}{2} \geqslant 3$.
- Comme $\ln(3) \geqslant 1$, $-\dfrac{\ln(3)}{4} \leqslant -\dfrac{1}{4}$ et donc $4 - \dfrac{\ln(3)}{4} \leqslant \dfrac{15}{4} \leqslant 4$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f(x) \in [3, 4].}$$

□

2. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

Démonstration.
Démontrons maintenant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n) : u_n \in [3, 4]$.

1) **Initialisation** :
$u_0 = 3 \in [3, 4]$.
Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in [3, 4]$.
L'intervalle $[3, 4]$ étant stable par f, on en déduit que $f(u_n) \in [3, 4]$.
D'où $u_{n+1} \in [3, 4]$ et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [3, 4].}$$

□

3. Démontrer que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

Démonstration.

- La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car ln l'est.
- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{4x}$$

Ainsi, $|f'(x)| = \left|\dfrac{-1}{4x}\right| = \dfrac{|-1|}{|4x|} = \dfrac{1}{4x}$.

- Soit $x \in [3,4]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{On a alors} & 3 & \leqslant & x & \leqslant & 4 \\ \text{donc} & 12 & \leqslant & 4x & \leqslant & 16 \\ \text{et} & \dfrac{1}{12} & \geqslant & \dfrac{1}{4x} & \geqslant & \dfrac{1}{16} \end{array}$$

(par croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$)

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [3,4], \text{ on a : } |f'(x)| = \frac{1}{4x} \leqslant \frac{1}{12}.}$$

□

4. On admet qu'il existe un unique $r \in I$ tel que $f(r) = r$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{1}{12}|u_n - r|$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes :
× f est dérivable sur $[3,4]$,
× $\forall x \in [3,4]\,,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.
On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x,y) \in [3,4]^2\,,\ |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,|y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [3,4]$ et $x = r \in [3,4]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(r)| \leqslant \frac{4}{9}\,|u_n - r|$$

Or r est tel que : $f(r) = r$ (r est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{12}\,|u_n - r|.}$$

□

5. Déduire de ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$
  où $\mathscr{P}(n) : |u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

  1) **Initialisation** :
  $|u_0 - r| \leqslant 1$ car u_0 et r sont des éléments de $[3,4]$, intervalle de largeur 1.
  Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

  2) **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$
  (*i.e.* $|u_{n+1} - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n+1}$).
  D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{1}{12}\,|u_n - r|$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{12}\,|u_n - r| \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}\right)^n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \left(\frac{1}{12}\right)^n.}$$

□

II. Calculs de DL

II.1. Remarque préliminaire

Remarque
On demandera souvent de déterminer le DL d'une fonction à un certain ordre. Une des difficultés majeures est de prévoir les ordres auxquels il faut développer chaque élément de l'expression dont on veut un DL :

× si on effectue de DL trop poussés, on obtiendra un DL final à un ordre supérieur à celui attendu. On toujours effectuer une troncature, mais beaucoup de calculs (souvent fastidieux) auront été faits pour rien,

× si on ne pousse pas assez loin les DL intermédiaires, on n'obtiendra pas la précision souhaitée, et il faut recommencer **tous** les calculs.

Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que f admette le $\text{DL}_n(x_0)$ suivant :

$$f(x) \;=\; a_0 + a_1\,(x-x_0) + \cdots + a_n\,(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big)$$

On note p le plus petit entier tel que : $a_p \neq 0$ (s'il existe).
On appelle **forme normalisée** du $\text{DL}_n(x_0)$ de f l'écriture :

$$\boxed{f(x) \;=\; (x-x_0)^p\,\Big(a_p + a_{p+1}\,(x-x_0) + \cdots + a_n\,(x-x_0)^{n-p} + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^{n-p}\big)\Big)}$$

On appelle $a_p\,(x-x_0)^p$ la partie principale du $\text{DL}_n(x_0)$ de f.

Remarque
On peut également écrire la forme normalisée du $\text{DL}_n(x_0)$ de f de la manière suivante :

$$\boxed{f(x_0+h) \;=\; h^p\,\big(a_p + a_{p+1}\,h + \cdots + a_n\,h^{n-p} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n-p})\big)}$$

Exemple
Si l'on souhaite obtenir un $\text{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \big(\cos(x)-1\big)\,\ln(1+x)$, on remarque :

$$\begin{aligned}\cos(x)-1 &= -\frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\\ \ln(1+x) &= x + \underset{x\to 0}{o}(x)\end{aligned}$$

Ainsi :

× la partie principale du $\text{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \cos(x)-1$ est d'ordre 2 (il s'agit de : $-\dfrac{1}{2}\,x^2$),

× la partie principale du $\text{DL}_1(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ est d'ordre 1 (il s'agit de : x),

La partie principale du DL de $x \mapsto \big(\cos(x)-1\big)\,\ln(1+x)$ est donc d'ordre 3. Pour en obtenir un DL à l'ordre $4 = 3+1$, il suffit alors de pousser le DL de $x \mapsto \cos(x)-1$ à l'ordre $2+1=3$ et celui de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre $1+1=2$.

$$\begin{aligned}\big(\cos(x)-1\big)\,\ln(1+x) &= \left(-\frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\ &= -\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\end{aligned}$$

II.2. Produit

Exemple

Déterminons un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.

- On connaît tout d'abord les $\mathrm{DL}(0)$ suivants :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^x \sin(x) \\
= \ & \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
= \ & x - \frac{x^3}{6} \\
& + x^2 \\
& + \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
= \ & x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu un $\mathrm{DL}_3()$ comme produit d'un $\mathrm{DL}_3()$ et d'un $\mathrm{DL}_2()$. Comme détaillé en Section II.1, ce phénomène apparaît dès que l'ordre de l'une des parties principales est non nul.
Avant de calculer le DL d'un produit, on prendra donc soin de calculer les ordres auxquels il faudra effectuer le DL de chaque terme.

II.3. Inverse et quotient

> On retiendra qu'on n'effectue jamais de DL d'un inverse ou d'un quotient à proprement parler. On se ramène systématiquement au DL d'une composée ou d'un produit.

Exercice 4

Déterminer un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Démonstration.

- On connaît tout d'abord le $\mathrm{DL}_4(0)$ de cos.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)}$$

- On reconnaît une expression de la forme :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \underset{u\to 0}{o}(u^4)$$

Or : $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

On peut donc appliquer le DL précédent à $u(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$.

- Commençons par simplifier les expressions apparaissant dans le DL.

$$\begin{aligned}
\left(u(x)\right)^2 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\
\left(u(x)\right)^3 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^3 = \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\
\left(u(x)\right)^4 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^4 = \underset{x\to 0}{o}(x^4)
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)} \\
&= \frac{1}{1 - u(x)} \\
&= 1 + u(x) + \left(u(x)\right)^2 + \left(u(x)\right)^3 + \left(u(x)\right)^4 \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\
&= 1 \\
&\quad + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \\
&\quad + \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}\, x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)
\end{aligned}$$

□

Exercice 5
Déterminer un $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \times \dfrac{1}{\cos(x)}$.
- On sait :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

De plus, d'après l'exercice précédent :

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}\, x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}\, x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}\, x^5 \\
&\quad - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} \\
&\quad + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\, x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)
\end{aligned}$$

□

III. DL et propriétés locales

III.1. Position relative d'une courbe et de sa tangente

MÉTHODO **Position relative d'une courbe et sa tangente**

Pour déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point x_0, il suffit de calculer la partie principale de :

$$f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\big)$$

Supposons qu'il existe $\alpha \neq 0$ et $p \in [\![2, +\infty[\![$ tels que :

$$f(x) \ = \ f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \alpha\,(x - x_0)^p + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^p\big)$$

Alors :

$$f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\big) \underset{x \to x_0}{\sim} \alpha\,(x - x_0)^p$$

Deux cas se présentent.

- si p est pair, deux nouveaux cas se présentent :
  - × si $\alpha > 0$, alors la courbe représentative de f est située au-dessus de sa tangente au voisinage de x_0.
  - × si $\alpha < 0$, alors la courbe représentative de f est située au-dessus de sa tangente au voisinage de x_0.
- si p impair, la courbe représentative de f traverse sa tangente en x_0. Cette courbe admet un point d'inflexion en x_0.

Exercice 6

On note f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto \cos(x) - 1$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,
  - × $f_2 : x \mapsto x$ qui :
    - est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\tau_0(f)(x) \ = \ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \ = \ \frac{\frac{\cos(x)-1}{x} - 0}{x} \ = \ \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

Or :

$$\cos(x) \ = \ 1 - \frac{x^2}{2!} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

Ainsi :

$$\cos(x) - 1 \ = \ -\frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

On en déduit :

$$\tau_0(f)(x) \ = \ \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-\frac{\cancel{x^2}}{2}}{\cancel{x^2}} \ = \ -\frac{1}{2}$$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} \tau_0(f)(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Comme $\tau_0(f)$ admet une limite finie en 0, on en déduit que f est dérivable en 0 (et : $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$).

Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. □

2. Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

Démonstration.

- On détermine un développement limité d'ordre 2 de f en 0.
  On remarque d'abord :
  $$\cos(x) \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$
  Ainsi :
  $$\cos(x) - 1 \;=\; -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$
- On obtient alors :
  $$f(x) \;=\; \frac{\cos(x)-1}{x} \;=\; -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
  On en déduit :
  $$f(x) - \left(-\frac{1}{2}\,x\right) \;=\; \frac{x^3}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
  On retrouve que la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}\,x$ est la tangente à la courbe représentative de f en 0.
- De plus :
  $$f(x) - \left(-\frac{1}{2}\,x\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{24}$$
  Or :
  × $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\dfrac{x^3}{24} < 0$.
  Ainsi, au voisinage à gauche de 0, la courbe représentative de f est située en dessous de sa tangente.
  × $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{x^3}{24} > 0$.
  Ainsi, au voisinage à droite de 0, la courbe représentative de f est située au-dessus de sa tangente. □

III.2. Asymptotes

Remarque

- La droite $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ si la distance entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ tend vers 0 en x_0.
- Cela revient à dire que f admet un développement **asymptotique** en x_0 de la forme :
  $$f(x) \;=\; \alpha\, x + \beta + \underset{x\to x_0}{o}(1)$$
  Ce développement asymptotique peut éventuellement s'obtenir grâce à des développements limités.

Exercice 7

On note f la fonction définie par :
$$f \;:\; \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x+1)\,\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$
Déterminer une asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  $$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)\,\exp\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad \textit{(car : } \frac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0\textit{)} \\ &= x + 2 + \frac{1}{x} + \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$
- On en déduit : $f(x) - (x+2) = \dfrac{1}{x} + \underset{x\to-\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi :
  $$f(x) - (x+2) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en conclut que la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

□

`MÉTHODO` **Position relative d'une courbe et son asymptote**

Pour connaître la position relative d'une courbe $\mathcal{C}_f$ et d'une droite $\mathcal{D}$, il suffit d'étudier le signe de la fonction :

$$d : x \mapsto f(x) - (\alpha\, x + \beta)$$

L'utilisation de développements limités peut être utile pour prolonger le développement asymptotique et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ au voisinage de x_0.

Exercice 8

Démontrer que la fonction f suivante admet une asymptote oblique en $+\infty$ et déterminer la position relative du graphe de f et de cette asymptote.

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3}{3!} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)\right) \quad \textit{(car : } \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\textit{)} \\ &= x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6\,x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x - \frac{1}{6\,x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

- On en déduit : $f(x) - x = -\dfrac{1}{6\,x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi :

$$f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6\,x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, au voisinage de $+\infty$.

- De plus :

$$f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6\,x} < 0$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de son asymptote oblique D au voisinage de $+\infty$.

□

IV. Exercice récapitulatif

Exercice 9
On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)\,\mathrm{e}^x}{x} \end{array}$$

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \sin(x)\,\mathrm{e}^x & = & \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ & = & x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} \\ & & \qquad - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ & = & x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \end{array}$$

- On obtient :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

□

2. Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction g à préciser.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction f admet un développement limité à l'ordre 2, et donc à l'ordre 0, en 0.
  Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par le coefficient d'ordre 0 de son développement limité : 1.
- Son prolongement par continuité, noté g, est :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)\,\mathrm{e}^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

□

3. Justifier que g est dérivable en 0.

Démonstration.
D'après la question *1*, la fonction f admet un développement limité d'ordre 2, et donc d'ordre 1, en 0.
Ainsi, la fonction g admet un développement limité d'ordre 1 en 0. Elle est donc dérivable en 0 et : $g'(0) = 1$ (le coefficient d'ordre 1 du développement limité). □

4. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, car elle est le quotient $g = \dfrac{g_1}{g_2}$ de :
  × $g_1 : x \mapsto \sin(x)\,\mathrm{e}^x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,
  × $g_2 : x \mapsto x$ qui :
    - est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\big(\cos(x)\,e^x + \sin(x)\,e^x\big) \times x - \sin(x)\,e^x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{e^x \Big(x\,\big(\cos(x) + \sin(x)\big) - \sin(x)\Big)}{x^2} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\,\big(\cos(x)+\sin(x)\big) - \sin(x)}{x^2} \end{aligned}$$

De plus :

$$\cos(x) + \sin(x) \;=\; 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x\,\big(\cos(x)+\sin(x)\big) - \sin(x) &= x\,\Big(1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)\Big) - \Big(x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big) \\ &= x + x^2 \\ &\quad - x + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &= x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

On en déduit : $x\,\big(\cos(x)+\sin(x)\big) - \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Ainsi :

$$g'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\,\big(\cos(x)+\sin(x)\big) - \sin(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \;=\; 1$$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 1$.

- Finalement, la fonction g est :
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$,
  - × continue sur $\mathbb{R}$ d'après *2*,
  - × telle que g' admet une limite finie en 0 (d'après ce qui précède).

  Par théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

□

5. On pose $h : x \mapsto x\,f\left(\frac{1}{x}\right)$. Que peut-on déduire à propos de la fonction h à partir du développement limité d'ordre 2 en 0 de f ?

Démonstration.

- On sait : $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, d'après la question *1* :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; 1 + \frac{1}{x} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) \;=\; 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{3\,x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

  Ainsi, on obtient le développement asymptotique de la fonction h en $+\infty$ suivant :

$$h(x) \;=\; x + 1 + \frac{1}{3\,x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

- En raisonnant de même en $-\infty$, on obtient le développement asymptotique de h suivant :

$$h(x) \;=\; x + 1 + \frac{1}{3\,x} + \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

□

6. En déduire l'équation d'une asymptote au graphe de h et préciser la position relative du graphe de h par rapport à son asymptote.

Démonstration.

- Au voisinage de $+\infty$:
  - × D'après la question précédente : $h(x) - (x+1) = \dfrac{1}{3\,x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
    D'où :
    $$h(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3\,x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
    On en déduit que la droite D d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe représentative de h, notée $\mathcal{C}_h$, au voisinage de $+\infty$.
  - × De plus :
    $$h(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3\,x} > 0$$
    On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_h$ est située au-dessus de son asymptote D au voisinage de $+\infty$.
- Au voisinage de $-\infty$:
  - × En raisonnant comme en $+\infty$, on obtient que la droite D est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $-\infty$.
  - × De plus :
    $$h(x) - (x+1) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{3\,x} < 0$$
    On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_h$ est située en dessous de son asymptote D au voisinage de $-\infty$.

□