CH XI : Polynômes

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Ensemble des polynômes à une indéterminée : $\mathbb{K}[X]$

I.1. Définitions

Définition (Polynôme)

- On appelle **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute expression de la forme :

$$P(X) \ = \ a_n\, X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_2\, X^2 + a_1\, X + a_0$$

  où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Les réels a_0, …, a_n sont appelés les **coefficients de** P.
- Si tous les coefficients a_0, …, a_n sont nules, P est appelé le **polynôme nul**. Il est noté $0_{\mathbb{R}[X]}$.
- On appelle **degré de** P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$. On le note $\deg(P)$.
  Par convention : $\deg\left(0_{\mathbb{R}[X]}\right) = -\infty$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes de degré au plus n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.
- On appelle **coefficient dominant de** P le coefficient a_{i_0} où $i_0 = \deg(P)$.
  Si le coefficient dominant de P est égal à 1, on dit que P est un **polynôme unitaire**.
- Un polynôme de la forme $P(X) = a_0$, avec $a_0 \in \mathbb{K}$est appelé un *polynôme constant.*
- Les polynômes comportant un seul terme non nul (de la forme $a_k\, X^k$) sont appelés **monômes**.
- La lettre X est appelée **indéterminée** du polynôme P.

Exemple

1) Le polynôme P_1 défini par : $P_1(X) = 3X^2 - 5X + 1$ est de degré 2. Son coefficient dominant est 3.

2) Le polynôme P_2 défini par : $P_2(X) = X^n - 1$ est de degré n. Son coefficient dominant est 1.

3) Le polynôme P_3 défini par : $P_3(X) = \pi$ est de degré 0. Son coefficient dominant est π.

I.2. Opérations dans $\mathbb{K}[X]$

Proposition 1. (Opérations sur les polynômes)
Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Alors il existe $(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{2n+2}$ tels que :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & a_0 + a_1\, X + \cdots + a_{n-1}\, X^{n-1} + a_n\, X^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k \\ Q(X) & = & b_0 + b_1\, X + \cdots + b_{p-1}\, X^{p-1} + b_n\, X^p = \sum\limits_{k=0}^{p} b_k\, X^k \end{array}$$

1) *Définition :*

$$\boxed{P = Q \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \deg(P) = \deg(Q) \\ \forall i \in [\![0, n]\!], a_i = b_i \end{array} \right.}$$

2) Somme :

$$\begin{aligned} & (P+Q)(X) \\ = \; & (a_0+b_0)+(a_1+b_1)\,X+\cdots++(a_n+b_n)\,X^n \\ = \; & \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\,X^k \end{aligned}$$

3) Produit :

$$(P\times R)(X) \;=\; \sum_{k=0}^{r} c_k X^k \quad \text{où } r=n+m \text{ et } c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i\,b_{k-i}$$

4) Multiplication par un scalaire : soit $\lambda\in\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (\lambda\cdot P)(X) &= \lambda\,a_0+\lambda\,a_1\,X+\cdots+\lambda\,a_{n-1}\,X^{n-1}+\lambda\,a_n\,X^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\lambda\,a_k\,X^k \end{aligned}$$

5) Composition : $\boxed{P\circ Q=\sum_{k=0}^{n} a_k\,Q^k}$

Proposition 2.
Soit $(P,Q,R)\in\big(\mathbb{K}[X]\big)^3$.

1) Associativité de + :

$$(P+Q)+R \;=\; P+(Q+R) \;=\; P+Q+R$$

2) Commutativité de + :

$$P+Q \;=\; P+Q$$

3) Élement neutre pour + : $0_{\mathbb{K}[X]}$ est l'élément neutre pour la loi +.

$$0_{\mathbb{K}[X]}+P \;=\; P+0_{\mathbb{K}[X]} \;=\; P$$

4) Opposé pour + : tout $P\in\mathbb{K}[X]$ admet un opposé pour la loi +, noté $-P$.

$$P+(-P) \;=\; (-P)+P \;=\; 0_{\mathbb{K}[X]}$$

5) Associativité de × :

$$(P\times Q)\times R \;=\; P\times(Q\times R) \;=\; P\times Q\times R$$

6) Commutativité de × :

$$P\times Q \;=\; Q\times P$$

7) Élement neutre pour × : Le polynôme P_0 défini par : $P_0(X)=1$ est l'élément neutre pour la loi ×.

$$P_0\times P \;=\; P\times P_0 \;=\; P$$

8) Distributivité de × sur + :

$$\left\{\begin{aligned} P\times(Q+R) &= P\times Q+P\times R \\ (P+Q)\times R &= P\times R+Q\times R \end{aligned}\right.$$

9) Intégrité :

$$P\times Q=0_{\mathbb{K}[X]} \quad\Leftrightarrow\quad P=0_{\mathbb{K}[X]} \;\texttt{OU}\; Q=0_{\mathbb{K}[X]}$$

Remarque
Pour la culture, lorsque $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est donc un corps.

Proposition 3.

Soit $(P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) *Binôme de Newton :* $\boxed{(P+Q)^n \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k\, Q^{n-k}}$

2) $\boxed{P^n - Q^n = (P-Q) \sum\limits_{k=0}^{n-1} P^k\, Q^{n-1-k} = (P-Q) \sum\limits_{k=1}^{n} P^{k-1}\, Q^{n-k}}$

I.3. Propriétés du degré

Proposition 4.

Soit $(P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1) $\boxed{\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)}$

2) a) $\boxed{\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$

b) *Supposons* $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

$$\boxed{\deg(P+Q) \;=\; \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

3) $\boxed{\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)}$

4) *Supposons* $\deg(Q) > 0$.

$$\boxed{\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)}$$

On notera bien bien l'inégalité dans le point ***2)*** de la proposition qui précède. Ce `N`'est `PAS` une égalité. On pourra garder en tête les exemples suivants.

a) On définit les polynômes P_1 et Q_1 par :

$$P_1(X) = X^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q_1(X) = -X^2 + 2X + 3$$

Alors :

$$(P_1 + Q_1)(X) \;=\; \cancel{X^2} + 1 + (-\cancel{X^2} + 2X + 3) \;=\; 2X + 4$$

Ainsi : $\deg(P_1 + Q_1) < \max\big(\deg(P_1), \deg(Q_1)\big)$.

b) On définit les polynômes P_2 et Q_2 par :

$$P_2(X) = X^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q_2(X) = -X^3 + 2X + 3$$

Alors :

$$(P_2 + Q_2)(X) \;=\; X^2 + 1 + (-X^3 + 2X + 3) \;=\; -X^3 + X^2 + 2X + 4$$

Ainsi : $\deg(P_2 + Q_2) = \max\big(\deg(P_2), \deg(Q_2)\big)$.

Exercice 1
On définit les polynômes P, Q et R de la manière suivante :

$$P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 1, \quad Q(X) = 5X^2 - 1, \quad R(X) = 2X + 7$$

Calculer $P + Q$, $P \times Q$, $(P+Q) \times R$, $P \times Q \times R$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} (P+Q)(X) &= 3X^3 - 2X^2 + 1 + 5X^2 - 1 \\ &= 3X^3 + 3X^2 \;=\; 3X^2\,(X+1) \end{aligned}$$

- Ensuite :

$$\begin{array}{rcl}(P\times Q)(X) & = & (3X^3-2X^2+1)\times(5X^2-1)\\ & = & 15X^5-3X^3-10X^4+2X^2+5X^2-1\\ & = & 15X^5-10X^4-3X^3+7X^2-1\end{array}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcl}\big((P+Q)\times R\big)(X) & = & (3X^3+3X^2)\times(2X+7)\\ & = & 6X^4+21X^3+6X^3+21X^2\\ & = & 6X^4+27X^3+21X^2 \ = \ 3X^2\,(2X^2+9X+7)\end{array}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rl} & (P\times Q\times R)(X)\\ = & (15X^5-10X^4-3X^3+7X^2-1)\times(2X+7)\\ = & 30X^6+105X^5-20X^5-70X^4-6X^4-21X^3\\ + & 14X^3+49X^2-2X-7\\ = & 30X^6+85X^5-76X^4-7X^3+49X^2-2X-7\end{array}$$

□

Exercice 2
On définit les polynômes P, Q et R de la manière suivante :

$$P(X)=2X^3-1,\quad Q(X)=X^2+X-1,\quad R(X)=aX+b$$

- Calculer $P+Q$, $P\times Q$, $(P+Q)\times R$, $P\times Q\times R$.
- Déterminer a et b pour que le degré de $P-QR$ soit le plus petit possible.

II. Divisibilité et division euclidienne

II.1. Relation de divisibilité

Définition
Soit $(A,B)\in\big(\mathbb{K}[X]\big)^2$.
On dit que B **divise** A s'il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que : $B=A\times Q$.

Exemple
Le polynôme $X+2$ divise le polynôme X^2+4X+4.

Proposition 5.
Soit $(A,B,C)\in\big(\mathbb{K}[X]\big)^3$.

1) Réflexivité : $\boxed{A\mid A}$.

2) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{c}A\mid B\\ B\mid A\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ A\mid C}$$

Remarque
Comme la relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$, la relation de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ n'est pas antisymétrique. Ce n'est donc pas une relation d'ordre. On a cependant seulement le résultat suivant.

Proposition 6.
Soit $(A,B)\in\big(\mathbb{K}[X]\big)^2$.

$$\boxed{\big(A\mid B \text{ ET } B\mid A\big)\ \Leftrightarrow\ \big(\exists\lambda\in\mathbb{K}^*,\ A=\lambda\cdot B\big)}$$

Si tel est le cas, on dit que A et B sont **associés**.

Corollaire 1.

Soit $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} A \mid B \texttt{ ET } B \mid A \\ A \textit{ et } B \textit{ unitaires} \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad (A = B)}$$

Proposition 7.

Soit $(A,B,C) \in (\mathbb{K}[X])^3$.

Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

1) $\boxed{(A \mid B \texttt{ ET } A \mid C) \quad \Rightarrow \quad A \mid (PB + QC)}$

2) $\boxed{\left.\begin{array}{l} P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \\ A \mid B \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad AP \mid BP}$

Proposition 8.

Soit $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

1) $\boxed{\left.\begin{array}{l} B \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \\ A \mid B \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \deg(A) \leqslant \deg(B)}$

2) $\boxed{\left.\begin{array}{c} A \mid B \\ \deg(A) = \deg(B) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \ A = \lambda \cdot B}$

II.2. Division euclidienne

Théorème 1.

Soit $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

Supposons : $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Il existe une unique couple $(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ *tel que :*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} A & = & BQ + R \\ \deg(R) & < & \deg(B) \end{array}\right.}$$

On dit alors que :

× *le polynôme Q est le* **quotient** *de la division euclidienne de A par B,*

× *le polynôme R est le* **reste** *de la division euclidienne de A par B.*

Exercice 3

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes.

1. Division euclidienne de $A(X) = X^3 + 4X - 1$ par $B(X) = X + 1$,

2. Division euclidienne de $A(X) = 2X^4 + X^3 - X - 3$ par $B(X) = 3X^2 - 1$,

3. Division euclidienne de $A(X) = X^2 + 4X - 1$ par $B(X) = X^2 + 1$,

MÉTHODO **Détermination du reste d'une division euclidienne**

Pour calculer le reste de la division euclidienne de A par B :

1) on applique le théorème de division euclidienne. On en déduit qu'il existe un unique couple $(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{array}\right.$$

2) on explicite l'expression de R. Il existe $(a_0, \dots, a_{\deg(B)-1}) \in \mathbb{K}^{\deg(B)}$ tel que : $R(X) = \sum\limits_{k=0}^{\deg(B)-1} a_k X^k$.

3) on déterminer les racines de B. Notons les α_1, ..., α_p. On remarque ensuite, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$:

$$A(\alpha_i) \ = \ B(\alpha_i) \times Q(\alpha_i) + R(\alpha_i) \ = \ \cancel{0 \times Q(\alpha_i)} + R(\alpha_i) \ = \ R(\alpha_i)$$

4) on obtient ainsi p équations à $\deg(B)$ inconnues : a_0, ..., $a_{\deg(B)-1}$.
Il suffit de résoudre ce système pour déterminer R.

Exercice 4
Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{10} - X^5$ par $X^2 - 3X + 2$.

Proposition 9.
Soit $(A, B) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$.

B divise A	$\Leftrightarrow$	*le reste de la division euclidienne de A par B est nul*

III. Dérivation formelle d'un polynôme

III.1. Définition

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k$.

On appelle **polynôme dérivé** de P, et on note P', le polynôme :

$$\boxed{P'(X) \ = \ \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, X^{k-1}}$$

III.2. Propriétés

Proposition 10.

1) *Linéarité :*

$$\boxed{\forall (P,Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2, \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)' = \lambda \cdot P' + \mu \cdot Q'}$$

2) *Dérivée du produit :*

$$\boxed{\forall (P,Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2, \ (PQ)' \ = \ P'Q + PQ'}$$

3) *Dérivée d'une puissance :*

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{K}[X], \ \forall m \in \mathbb{N}, \ (P^m)' = m\, P'\, P^{m-1}}$$

4) *Dérivée d'une composée :*

$$\boxed{\forall (P,Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2, \ (P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)}$$

5) *Degré de la dérivée. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.*

a) $\boxed{\deg(P) \geqslant 1 \ \Rightarrow \ \deg(P') = \deg(P) - 1}$

b) $\boxed{\deg(P) < 1 \ \Leftrightarrow \ P' = 0_{\mathbb{K}[X]}}$

Proposition 11.
Soit $(P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$.

$$\boxed{P' = Q' \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{K}, \ P = Q + c}$$

III.3. Dérivée $p^{\text{ème}}$ et propriétés

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On définit les dérivées successives de P en posant :

$$\boxed{\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall p \in \mathbb{N},\ P^{(p+1)} = \left(P^{(p)}\right)' \end{cases}}$$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $P_n(X) = X^n$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P_n.

Proposition 12.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1) *Linéarité :*

$$\boxed{\forall (P, Q) \in \left(\mathbb{K}[X]\right)^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)^{(p)} = \lambda \cdot P^{(p)} + \mu \cdot Q^{(p)}}$$

2) *Dérivée du produit (Formule de Leibniz) :*

$$\boxed{\forall (P, Q) \in \left(\mathbb{K}[X]\right)^2,\ (PQ)^{(p)} \ = \ \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} P^{(k)}\, Q^{(p-k)}}$$

3) *Degré de la dérivée $p^{\text{ème}}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.*

a) $\boxed{\deg(P) \geqslant p \ \Rightarrow\ \deg(P^{(p)}) = \deg(P) - p}$

b) $\boxed{\deg(P) < p \ \Leftrightarrow\ P^{(p)} = 0_{\mathbb{K}[X]}}$

III.4. Formule de Taylor

Théorème 2. (Formule de Taylor)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On note $n = \deg(P)$.

Alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{P(X) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X - \alpha)^k}$$

En particulier, si $\alpha = 0$, on obtient : $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}}$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$

où $\quad \mathscr{P}(n) : \forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X - \alpha)^k$.

▸ **Initialisation** : soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.

- D'une part :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X - \alpha)^k \ = \ \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!}\ (X - \alpha)^0 \ = \ P(\alpha)$$

- D'autre part, P est un polynôme constant. Ainsi : $P(X) = P(\alpha)$.

Ainsi : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{0} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X - \alpha)^k$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall P \in \mathbb{K}_{n+1}[X],\ P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$).
Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$.

- On remarque : $P' \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$P'(X) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(P')^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$$

- On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!}\,\frac{1}{k+1}\,(X-\alpha)^{k+1} + \lambda \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}\,(X-\alpha)^{k+1} + \lambda \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^{k} + \lambda \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= (X-\alpha)\sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^{k-1} + \lambda \end{aligned}$$

- Enfin, en évaluant l'égalité précédente en α, on obtient :

$$P(\alpha) \;=\; \cancel{(\alpha-\alpha)\sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(\alpha-\alpha)^{k-1}} + \lambda \;=\; \lambda$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k + \lambda \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k + P(\alpha) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k + \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!}\,(X-\alpha)^0 \quad \textit{(d'après le calcul de l'initialisation)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$. □

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$.

Exercice 6

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.
Démontrer que le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^m$ est :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$$

III.5. Fonction polynomiale

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k$.

L'application suivante est appelée **fonction polynomiale associée** à P :

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \tilde{P} & : & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k \end{array}}$$

Proposition 13.
Toutes les propriétés de dérivations formelles des polynômes sont valides pour les fonctions polynomiales.

IV. Racine d'un polynôme

IV.1. Définition et lien avec la divisibilité

Définition
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est *racine de* P (on dit aussi que α est un *zéro de* P) si :

$$\boxed{P(\alpha) \ = \ 0}$$

Proposition 14.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\alpha \textit{ racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad (X-\alpha) \mid P}$$

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons que $X - \alpha$ divise P.
Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P(X) = (X-\alpha)\,Q(X)$. On obtient :

$$P(\alpha) \ = \ (\alpha-\alpha)\,Q(\alpha) \ = \ 0 \times Q(\alpha) \ = \ 0$$

On en déduit que α est racine de P.

($\Rightarrow$) Supposons que α est racine de P.
On effectue la division euclidienne de P par $X - \alpha$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} P(X) \ = \ (X-\alpha)\,Q(X) + R(X) \\ \deg(R) < \deg(X-\alpha) = 1 \end{array}\right.$$

On en déduit : $\deg(R) \leqslant 0$. Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que : $R(X) = c$.
On calcule :

$$P(\alpha) \ = \ \cancel{(\alpha-\alpha)\,Q(\alpha)} + R(\alpha) \ = \ 0 + R(\alpha) \ = \ c$$

Or α est racine de P donc : $c = P(\alpha) = 0$. Ainsi : $R(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$. D'où :

$$P(X) \ = \ (X-\alpha)\,Q(X)$$

On obtient bien : $(X-a) \mid P$.

□

Exercice 7
Déterminer les racines du polynôme P défini par : $P(X) = 2X^3 - 8X$.

Démonstration.
On remarque :

$$P(X) \ = \ 2X^3 - 8X \ = \ 2X\,(X^2-4) \ = \ 2X\,(X-2)\,(X+2)$$

D'après la propriété ci-dessus, on en déduit que les racines de P sont : 0, 2 et -2. □

Proposition 15.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons :

- $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$,
- *le polynôme P admet n racines distinctes notées $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n} (X-\alpha_j) \mid P}$$

En particulier : $\boxed{n \leqslant \deg(P)}$.

Démonstration.
Récurrence. □

Corollaire 2.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Le nombre de racines distinctes d'un polynôme est inférieur à son degré.

$$\boxed{\deg(P) \leqslant n \quad \Rightarrow \quad P \text{ admet au plus } n \text{ racines distinctes}}$$

MÉTHODO **Démontrer qu'un polynôme est nul**

Pour prouver qu'un polynôme est nul, il suffit de montrer au choix :

- qu'il possède une infinité de racines,
- qu'il possède strictement plus de racines que son degré.

Exercice 8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Supposons : $P(X+1) = P(X)$. Démontrer que le polynôme P est constant.

IV.2. Multiplicité d'une racine

Définition (Multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est une racine de **multiplicité** m de P (on dit aussi que α est une racine **d'ordre** m de P) si m est le plus grand entier k tel que $(X-\alpha)^k$ divise P.
- On dit que α est une racine **multiple** de P si α est racine d'ordre au moins 2 de P.
- Lorsque $k = 1$, on parle de *racine simple de P*.
- Lorsque $k = 2$, on parle de *racine double de P*
- $\cdots$

Remarque

- Une racine de P est toujours d'ordre au moins 1.
- Une racine d'ordre 0 n'est pas une racine de P.

Proposition 16.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \alpha \text{ racine d'ordre } m \text{ de } P & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (X-\alpha)^m \mid P \\ (X-\alpha)^{m+1} \nmid P \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \exists Q \in \mathbb{K}[X], \left\{ \begin{array}{l} P(X) = (X-\alpha)^m\, Q(X) \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{array} \right. \end{array}}$$

Proposition 17.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \alpha \text{ racine d'ordre au moins } m \text{ de } P & \Leftrightarrow & (X-\alpha)^m \mid P \\ & \Leftrightarrow & \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X-\alpha)^m\, Q(X) \end{array}}$$

Exercice 9

Déterminer les racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^3 + 3X^2 - 4$.
Donner l'ordre de multiplicité de chacune.

Remarque

Pour factoriser un polynôme, on procède dans l'ordre suivant :

1) on cherche une racine évidente $(0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2)$, puis on factorise.

2) on cherche à identifier une identité remarquable, puis on factorise

3) deux cas se présentent ensuite :

  × si le polynôme restant à factoriser est de degré 2 (et qu'il n'y a donc plus ni racine évidente, ni identité remarquable), alors on détermine les racines restantes avec un calcul de discriminant.

  × si le polynôme restant à factoriser est de degré supérieur ou égal à 3, c'est qu'il reste une racine évidente à trouver.

Exercice 10
Déterminer les racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^4 - 10X^3 + 37X^2 - 60X + 36$. Donner l'ordre de multiplicité de chacune.

Proposition 18.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\alpha \textit{ racine d'ordre } m \textit{ de } P \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [\![0, m-1]\!],\ P^{(i)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \right.}$$

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que α est racine d'ordre m d'ordre P.
Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X) = (X-\alpha)^m\, Q(X) \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{array} \right.$$

On note : $n = \deg(P)$. Par formule de Taylor :

$$\begin{aligned} & P(X) \\ = \ & \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\, (X-\alpha)^k \\ = \ & \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\, (X-\alpha)^k + \sum_{k=m}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\, (X-\alpha)^k \\ = \ & \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\, (X-\alpha)^k + \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!}\, (X-\alpha)^{k+m} \\ = \ & \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\, (X-\alpha)^k + (X-\alpha)^m \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!}\, (X-\alpha)^k \end{aligned}$$

On note $R(X) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\, (X-\alpha)^k$. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P(X) & = & (X-\alpha)^m \sum\limits_{k=0}^{n-m} \dfrac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!}\, (X-\alpha)^k + R(X) \\ \deg(R) < \deg\big((X-\alpha)^m\big) \end{array} \right.$$

Par théorème de division euclidienne, $\sum\limits_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!}\, (X-\alpha)^k$ est le quotient et R est le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^m$.
Par unicité du quotient et du reste de la division euclidienne, on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-m} \dfrac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!}\, (X-\alpha)^k \\ R(X) = 0_{\mathbb{K}[X]} \end{array} \right.$$

En évaluant Q en α, on conclut.

($\Leftarrow$) Supposons :
- × $\forall i \in [\![0, m-1]\!],\ P^{(i)}(\alpha) = 0$
- × $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

Par formule de Taylor :

$$\begin{aligned} & P(X) \\ = \ & \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\, (X-\alpha)^k \\ = \ & \cancel{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\, (X-\alpha)^k} + \sum_{k=m}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\, (X-\alpha)^k \\ = \ & \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!}\, (X-\alpha)^{k+m} \\ = \ & (X-\alpha)^m \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!}\, (X-\alpha)^k \end{aligned}$$

En notant $Q(X) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!} (X-\alpha)^k$, on obtient :
- d'une part : $P(X) = (X-\alpha)^m Q(X)$
- d'autre part :

$$\begin{aligned} & Q(\alpha) \\ = \ & \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!} (\alpha-\alpha)^k \\ = \ & \frac{P^{(m)}(\alpha)}{(m)!} \neq 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 19.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des racines distinctes de P de multiplicité respectives $m_1, \ldots, m_r$.

$$\boxed{\prod_{j=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i} \mid P}$$

En particulier : $\boxed{\sum_{j=1}^{r} m_j \leqslant \deg(P)}$.

Remarque

On dit qu'un polynôme non nul possède au plus $\deg(P)$ racines comptées avec multiplicité.

Exemple

Le polynôme $(X-2)^4 X^2 (X+3) (X^2+1)$ possède 3 racines réelles distinctes :
- 2 de multiplicité 4,
- 0 de multiplicité 2,
- -3 de multiplicité 1.

Il possède donc 7 racines réelles comptées avec multiplicité.

`MÉTHODO` **Démontrer qu'un polynôme est nul**

Pour prouver qu'un polynôme est nul, il suffit de montrer au choix :
- qu'il possède une infinité de racines,
- qu'il possède strictement plus de racines, comptées avec multiplicité, que son degré.

V. Polynômes scindés

V.1. Définition

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
- On dit que P est **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1.
  Autrement dit, P est scindé s'il existe :
  - $(b_1, \ldots, b_{\deg(P)}) \in \mathbb{K}^{\deg(P)}$ (les scalaires $b_1, \ldots, b_{\deg(P)}$ peuvent éventuellement être égaux),
  - $\lambda \in \mathbb{K}$,

  tels que :
  $$\boxed{P(X) = \lambda \prod_{j=1}^{\deg(P)} (X-b_j)}$$
- Par convention, tout polynôme constant est scindé.

Exemple
- Le polynôme $X^2+1 = (X-i)(X+i)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
- Le polynôme X^2+1 n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
- Le polynôme $2X^3-3X^2+1 = (2X+1)(X-1)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
- Le polynôme $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
- Le polynôme $(2X-3)^5$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

V.2. Propriétés

Proposition 20.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Le polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si P n'est pas constant et possède exactement $\deg(P)$ racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec multiplicité.
Autrement dit, P est de la forme :

$$\boxed{P(X) \ = \ \lambda \prod_{j=1}^{r} (X - b_j)^{m_j}}$$

Dans cette écriture :

× *le scalaire λ est le coefficient dominant de P,*

× *les scalaires $b_1, \ldots, b_r$ sont les racines distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$.*

Proposition 21.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On note : $n = \deg(P)$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

On note $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ les racines distinctes de P, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$.

$$\boxed{P \text{ scindé sur } \mathbb{K} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{r} m_j = n}$$

Proposition 22.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{P \text{ scindé dans } \mathbb{R}[X] \quad \Rightarrow \quad P \text{ scindé dans } \mathbb{C}[X]}$$

V.3. Relations coefficients / racines

V.3.a) Cas général

Théorème 3. (Relations coefficients / racines)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On note : $n = \deg(P)$.

Alors il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Supposons que P est **scindé** *sur $\mathbb{K}$. On note alors $b_1, \ldots, b_n$ ses racines (éventuellement égales).*

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccccc} \dfrac{a_{n-1}}{a_n} & = & -(b_1 + \cdots + b_n) & = & -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \\ \dfrac{a_0}{a_n} & = & (-1)^n \, (b_1 \times \cdots \times b_n) & = & (-1)^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} b_k \end{array} \right.}$$

Exercice 11

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ = \ 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ = \ (-1)^{n+1}$$

V.3.b) Cas des polynômes de degré 2

Proposition 23.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
On note P le polynôme défini par : $P(X) = aX^2 + bX + c$, et on note z_1 et z_2 ses racines, éventuellement égales. Alors :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} z_1 + z_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\ z_1 \, z_2 & = & \dfrac{c}{a} \end{array} \right.}$$

Exercice 12
Soit $a \in [0,1]$. Déterminer le signe des racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 4X + 3a$.

Démonstration.
On note Δ le discriminant de P. Alors :

$$\Delta \; = \; (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3a \; = \; 16 - 12a \; > \; 0 \quad \textit{(car : } 0 \leqslant a \leqslant 1\textit{)}$$

Le polynôme P admet dont exactement 2 racines réelles. On les note z_1 et z_2. Alors :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & (X - z_1)\,(X - z_2) \\ & = & X^2 - z_2 X - z_1 X + z_1 z_2 \\ & = & X^2 - (z_1 + z_2) X + z_1 z_2 \end{array}$$

Or, par définition : $P(X) = X^2 - 4X + 3a$. En identifiant les coefficients des 2 expressions de P, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -(z_1 + z_2) & = & -4 \\ \\ z_1\, z_2 & = & 3a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & 4 \\ \\ z_1\, z_2 & = & 3a \end{array} \right.$$

- Tout d'abord : $z_1\, z_2 = 3a > 0$. On en déduit que z_1 et z_2 sont de même signe.
- Ensuite : $z_1 + z_2 = 4 > 0$. Comme z_1 et z_2 sont de même signe, on en déduit : $z_1 > 0$ et $z_2 > 0$.

□

VI. Polynômes irréductibles

VI.1. Définition

Définition
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
On dit que P est **irréductible** si :

$\left\{ \right.$
- $\deg(P) \geqslant 1$ *(P n'est pas constant)*
- les seuls diviseurs de P sont les polynômes constants non nuls et les polynômes associés à P (les $\lambda \cdot P$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$)

Remarque
Un polynôme P est irréductible s'il n'est pas constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes associés à 1 et P.
Il s'agit donc de l'analogue polynomial des nombres premiers en arithmétique des entiers.

Proposition 24.
Tout polynôme de degré 1 *est irréductible.*

Exercice 13
Démontrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 sans racine réelle est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Il est important de préciser l'ensemble de travail. Par exemple, le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$. La précision « dans $\mathbb{K}[X]$ » n'est donc pas superflue.

Proposition 25.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Supposons : $n = \deg(P) \geqslant 1$.

a) | *P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$* | $\Leftrightarrow$ | *tous les diviseurs de P sont de degré 0 ou de degré n* |
|---|---|---|

b) | *P non irréductible dans $\mathbb{K}[X]$* | $\Leftrightarrow$ | *P admet au moins un diviseur D tel que :* $0 < \deg(D) < n$ |
|---|---|---|

Proposition 26.
Tout polynôme non constant admet un diviseur irréductible.

Démonstration.
Démonstration similaire à celle en arithmétique des entiers. □

VI.2. Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 4. (Théorème de d'Alembert-Gauss)
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.
Admis □

Exercice 14
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Supposons : $\deg(P) \geqslant 1$.
Démontrer que l'application $\tilde{P}$ suivante est surjective :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{P} & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & P(z) \end{array}$$

VI.3. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Proposition 27.
Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.

Proposition 28.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note : $n = \deg(P)$.

Supposons : $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

P admet exactement n racines, comptées avec ordre de multiplicité

Théorème 5. (Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$)
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Théorème 6. (Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ BIS)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Supposons : $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

On note $\lambda \in \mathbb{K}$ le coefficient dominant de P. On note $r \in \mathbb{N}^*$ le nombre de racines distinctes de P. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ses racines **complexes** *distinctes, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$.*

On peut alors factoriser P de manière unique, à l'ordre des facteurs près, sous la forme suivante :

$$\boxed{P(X) \;=\; \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}}$$

La relation précédente est appelée **factorisation en irréductibles** *de P dans $\mathbb{C}[X]$.*

Remarque
Deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ sont donc égaux si et seulement si ils ont :

- × même coefficient dominant,
- × mêmes racines avec les mêmes ordres de multiplicité.

Proposition 29.

Soit $(P, Q) \in \big(\mathbb{C}[X]\big)^2$.

$$P \mid Q \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{pour toute racine } \alpha \text{ de } P,\\ m_\alpha(P) \leqslant m_\alpha(Q)\end{array}$$

où : $m_\alpha(P)$ *(resp.* $m_\alpha(Q)$*) est l'ordre de multiplicité de* α *relativement à* P *(resp. à* Q*).*

Proposition 30.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

$$\begin{array}{c}P \text{ scindé à racines}\\ \text{simples dans } \mathbb{C}\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}P \text{ et } P' \text{ n'ont aucune racine}\\ \text{commune dans } \mathbb{C}\end{array}$$

Démonstration.

On note : $n = \deg(P)$. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

- Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$P(X) \;=\; \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$$

  On obtient :

$$P'(X) \;=\; \lambda \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\prod_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{n} (X - \alpha_\ell) \Bigg)$$

  Les racines de P sont exactement : α_1, ..., α_n. Il suffit donc de démontrer que α_1, ..., α_n ne sont pas racines de P'.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
  On procède par l'absurde.
  Supposons que α_i est racine de P'. Alors : $(X - \alpha_i) \mid P'$. Or :

$$\begin{aligned} & P'(X) \\ = \;& \lambda \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\prod_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{n} (X - \alpha_\ell) \Bigg) \\ = \;& \lambda \prod_{\ell=2}^{n} (X - \alpha_\ell) + \dots + \lambda \prod_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq i}}^{n} (X - \alpha_\ell) + \dots + \lambda \prod_{\ell=1}^{n-1} (X - \alpha_\ell) \end{aligned}$$

  On sait :

  × d'une part : $\forall k \neq i$, $(X - \alpha_i) \mid \displaystyle\prod_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{n} (X - \alpha_\ell)$,

  × d'autre part : $(X - \alpha_i) \mid P'$

  On en déduit :

$$(X - \alpha_i) \quad \Bigg| \quad \underbrace{\Bigg(P'(X) - \sum_{\substack{k = 1 \\ k \neq i}}^{n} \Bigg(\prod_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{n} (X - \alpha_\ell) \Bigg) \Bigg)}_{\displaystyle = \prod_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq i}}^{n} (X - \alpha_\ell)}$$

  Absurde !

($\Leftarrow$) Supposons que P et P' n'ont aucune racine commune.

- Par factorisation en irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}^*$, $(m_1, \dots, m_r) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^r$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{C}^r$ distincts tels que :

$$P(X) \ = \ \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

On sait donc déjà que P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Il reste à démontrer que toutes ses racines sont simples. Autrement dit, on souhaite démontrer : $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $m_k = 1$.

- On procède par l'absurde.
Supposons qu'il existe $i_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que : $m_{i_0} \geqslant 2$.
  - Tout d'abord :

$$\begin{aligned} P'(X) & \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{r} \left(m_k \, (X - \alpha_k)^{m_k - 1} \prod_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{r} (X - \alpha_\ell)^{m_\ell} \right) \\ &= \lambda \, (X - \alpha_{i_0}) \, Q(X) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} Q(X) & \\ = & \sum_{\substack{k = 1 \\ k \neq i_0}}^{r} \left(m_k \, (X - \alpha_k)^{m_k - 1} \, (X - \alpha_{i_0})^{m_{i_0} - 1} \prod_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \notin \{k, i_0\}}}^{r} (X - \alpha_\ell)^{m_\ell} \right) \\ & + \ m_{i_0} (X - \alpha_{i_0})^{m_{i_0} - 2} \prod_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq i_0}}^{r} (X - \alpha_\ell)^{m_\ell} \end{aligned}$$

  - Comme $m_{i_0} \geqslant 2$, alors : $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$. On a donc démontré :

$$(X - \alpha_{i_0}) \mid P'$$

Ainsi, α_{i_0} est une racine commune à P et à P'.
Absurde ! $\square$

VI.4. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 31.
Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement :

- *les polynômes de degré 1,*
- *les polynômes de degré 2 sans racine réelle (à discriminant strictement négatif).*

Théorème 7. (Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Supposons : $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On note $\lambda \in \mathbb{R}$ le coefficient dominant de P. On note $r \in \mathbb{N}^*$ le nombre de racines distinctes de P. On note α_1, …, α_r ses racines **réelles** *distinctes, de multiplicités respectives m_1, …, m_r.*

Alors il existe $s \in \mathbb{N}^*$, $(n_1, \dots, n_s) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^s$ et $(\beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \mathbb{R}^{2s}$ tels qu'on peut factoriser P de manière unique, à l'ordre des facteurs près, sous la forme suivante :

$$\boxed{P(X) \ = \ \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \times \prod_{\ell=1}^{s} (X^2 + \beta_\ell \, X + \gamma_\ell)^{n_\ell}}$$

où :

- *pour tout $\ell \in [\![1, s]\!]$, le polynôme $X^2 + \beta_\ell \, X + \gamma_\ell$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$,*
- *les polynômes $X^2 + \beta_1 \, X + \gamma_1$, …, $X^2 + \beta_s \, X + \gamma_s$ sont distincts.*

La relation précédente est appelée **factorisation en irréductibles** *de P dans $\mathbb{R}[X]$.*

MÉTHODO **Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$**

Pour factoriser un polynôme réel dans $\mathbb{R}[X]$:

1) on le factorise dans $\mathbb{C}[X]$ (si possible),

2) on regroupe les facteurs comportant des racines complexes non réelles conjuguées deux à deux.

Exercice 15
Donner la décomposition en facteurs irréductibles de X^4+1 dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

VII. Fractions rationnelles

VII.1. Définitions

Définition

- On dit que F est une **fraction rationnelle** s'il existe $(P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \\ F = \dfrac{P}{Q} \end{cases}}$$

- On dit que F est **sous forme irréductible** si les polynômes P et Q n'ont pas de racine commune.

Exercice 17
Mettre sous forme irréductible les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^2-1}{X^3-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{X^2+X-2}{X^3-5X^2+8X-4}$$

Définition

Soit F une fraction rationnelle.
Alors il existe $(P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ tel que :

× $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$

× $F = \dfrac{P}{Q}$

On appelle **degré** de F, et on note $\deg(F)$ l'entier relatif :

$$\boxed{\deg(F) \ = \ \deg(P) - \deg(Q)}$$

Exercice 18
Déterminer le degré des fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X+1}{X+2} \qquad \text{et} \qquad \frac{X^2+1}{X^3+1}$$

VII.2. Racines, Pôles

Définition

Soit F une fraction rationnelle.
Alors il existe $(P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ tel que :

× $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$

× $F = \dfrac{P}{Q}$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

1) On dit que α est une **racine** de F si α est racine de P.
Dans ce cas, l'**ordre de multiplicité** de la racine α est son ordre de multiplicité en tant que racine de P.

2) On dit que α est un **pôle** de F si α est racine de Q.
Dans ce cas, l'**ordre de multiplicité** du pôle α est son ordre de multiplicité en tant que racine de Q.

Exercice 19
Donner les racines et les pôles de la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^2+X-2}{X^3-5X^2+8X-4}$$

VII.3. Décomposition en éléments simples

VII.3.a) Définitions et premières propriétés

Proposition 32.

Soit F une fraction rationnelle.
Alors il existe $(A,B) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ tel que :

- $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$
- $F = \dfrac{A}{B}$

Alors il existe $(Q,R) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ tel que :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

De plus : $\deg(R) < \deg(B)$.

- *Le polynôme Q est appelé* **partie entière** *de F.*

MÉTHODO **Déterminer une partie entière de fraction rationnelle**

Pour déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$, on effectue la division euclidienne de A par B pour obtenir :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

Le quotient Q de cette division euclidienne est alors la partie entière de F.

Exercice 20
Calculer la partie entière de la fraction rationnelle F définie par :

$$F(X) = \frac{X^3-2X^2+1}{X^2+1}$$

VII.3.b) Cas où le dénominateur est scindé à racines simples

Théorème 8. (Décompositions en éléments simples - Cas de pôles simples)

Soit F une fraction rationnelle.

Alors il existe $(A,B) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ tel que $\dfrac{A}{B}$ est une forme **irréductible** *de F.*

Supposons que B est **scindé à racines simples**. *Autrement dit, on suppose que F n'admet que des pôles simples.*
On note : $n = \deg(B)$. On note $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ les racines de B (deux à deux distinctes).

On note enfin Q le quotient de la division euclidienne de A par B.

Alors il existe $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\boxed{F(X) = Q(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{X-\alpha_k}}$$

MÉTHODO **DES d'une fraction rationnelle à pôles simples**

Pour décomposer en éléments simples une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$ dans le cas où B est **scindé à racines simples** :

1) on effectue la division euclidienne de A par B pour déterminer la partie entière de F. On obtient alors une expression de F sous la forme :

$$F \ = \ Q + \frac{R}{B}$$

2) on détermine les pôles de F (*i.e.* les racines de B). On obtient alors une expression de F sous la forme :

$$F(X) \ = \ Q(X) + \frac{R(X)}{\lambda \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)}$$

où :

× λ est le coefficient dominant de B,

× α_1, ..., α_n sont les racines de B (deux à deux distinctes car B est à racines simples).

3) pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on calcule :

$$\beta_k \ = \ \lim_{x \to \alpha_k} \frac{(x - \alpha_k)\, A(x)}{B(x)}$$

On obtient alors la décomposition en éléments simples de F :

$$F(X) \ = \ Q(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{X - \alpha_k}$$

Exercice 21

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X+3}{(X-1)\,(X+2)}, \qquad \frac{1}{X^2+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{X^n - 1}$$

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+3}{(x-1)\,(x+2)} \end{array}$$

Exercice 23

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

> Lorsque B n'est pas scindé à racines simples, on se laisse guider par l'énoncé.

Exercice 24

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

1. Déterminer la partie entière, notée Q,de la fraction rationnelle $\dfrac{X^3}{(X-1)^2}$ et calculer $F - Q$.

2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{X^3}{(X-1)^2} \ = \ Q(X) + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}$$

3. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.