

## CH XIX : Séries numériques

Dans toute la suite, le symbole  $\mathbb{K}$  désigne l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  ou l'ensemble des complexes  $\mathbb{C}$ . Cette notation sera utilisée pour tous les résultats qui sont vérifiés pour ces deux ensembles.

### I. Notion de série numérique

#### I.1. Définitions générales

##### Définition

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

- On appelle **série de terme général**  $u_n$  et on note  $\sum u_n$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont le terme général  $S_n$  est défini par :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .
- La suite  $(S_n)$  est appelée **suite des sommes partielles** associée à la série  $\sum u_n$ . Son terme général  $S_n$  est appelé **somme partielle d'ordre  $n$**  associée à la série  $\sum u_n$ .
- On dit que la série  $\sum u_n$  est **convergente** si la suite de ses sommes partielles  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
- On dit que la série  $\sum u_n$  est **divergente** si la suite de ses sommes partielles  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente.
- Lorsque  $\sum u_n$  est convergente, la limite de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée **somme de la série** et est (souvent) notée  $S$ . On a alors :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n u_k \right)$$

- Déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

##### Remarque

- On ne change pas la nature d'une suite  $(u_n)$  en modifiant un nombre **fini** de ses termes. Par exemple, la suite  $(v_n)$  définie par :

$$v_0 = \sqrt{2}, v_1 = 42, v_2 = e \text{ et } : \forall n \geq 3, v_n = u_n$$

est de même nature que la suite  $(u_n)$ .

(note : on aurait pu changer d'autres termes que les premiers)

Elle admet notamment la même limite, si elle existe, que la suite  $(u_n)$ .

- On ne modifie pas non plus la nature d'une suite en supprimant un nombre fini de ses termes. La suite  $(u_{n+1})$  n'est autre que la suite  $(u_n)$  privée de son premier terme. Ces deux suites sont de même nature et ont même limite, si cette limite existe.
- Cela s'applique évidemment à une suite de sommes partielles  $(S_n)$ . Cette suite est de même nature que  $(S_{n+1}), (S_{n+2}) \dots$
- Pour les séries, on peut aussi se poser une autre question, à savoir : qu'advient-il si on somme à partir de 3 et plus de 0 ?  
Il suffit de remarquer :

$$\sum_{k=3}^n u_k = \left( \sum_{k=0}^n u_k \right) - (u_0 + u_1 + u_2)$$

Ainsi  $\left( \sum_{k=3}^n u_k \right)$  et  $\left( \sum_{k=0}^n u_k \right)$  sont de même nature (on peut par exemple démontrer que si l'une converge, l'autre aussi). Par contre, dans le cas où il y a convergence, ces deux suites n'ont évidemment pas la même limite :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) - (u_0 + u_1 + u_2)$$

## À RETENIR

On ne modifie pas la nature d'une série en commençant la sommation en  $n_0$  (au lieu de 0) mais, en cas de convergence, on modifie évidemment la somme obtenue ! De manière générale :  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \neq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ .



- Une série  $\sum u_n$  est une suite particulière. C'est la suite  $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$  constituée des sommes partielles.
- Cela ne signifie en AUCUN CAS que la série  $\sum u_n$  et la suite  $(u_n)$  sont le même objet ! Ce sont des notions totalement différentes qu'il ne faut pas confondre.
- On prendra particulièrement garde aux énoncés qui ne font pas apparaître le symbole  $\Sigma$ . Cela peut amener à confusion. Plus précisément, si l'on rencontre l'énoncé (par exemple) :

« Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{(\ln(n))^5}{n^2}$  »

il est conseillé de le réécrire sous la forme :

« Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{(\ln(n))^5}{n^2}$  »

- Il ne faut pas confondre les notations :
  - ×  $\sum u_n$  qui désigne la série de terme général  $u_n$ ,
  - ×  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  qui est la somme partielle d'ordre  $n$  de cette série,
  - ×  $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  qui désigne, SI LA SÉRIE EST CONVERGENTE, la somme de cette série (la limite finie ( $\in \mathbb{K}$ ) de la suite  $(S_n)$ ).

## I.2. Cas particulier des séries à termes complexes

## Théorème 1.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \sum \operatorname{Re}(u_n) \text{ converge} \\ \bullet \sum \operatorname{Im}(u_n) \text{ converge} \end{cases}$$

En cas de convergence, on a de plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_k)$$

Démonstration.

Rappelons que toute suite  $(v_n)$  complexe vérifie :

$$(v_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet (\operatorname{Re}(v_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ \bullet (\operatorname{Im}(v_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \end{cases}$$

On applique ce résultat à la suite  $(S_n)$  des sommes partielles de la série  $\sum u_n$ .

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ converge} &\Leftrightarrow (S_n) \text{ converge} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet (\operatorname{Re}(S_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ \bullet (\operatorname{Im}(S_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \left(\sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(u_k)\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ \bullet \left(\sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(u_k)\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \end{cases} \end{aligned}$$

(car la partie réelle d'une somme finie est la somme des parties réelles)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \sum \operatorname{Re}(u_n) \text{ converge} \\ \bullet \sum \operatorname{Im}(u_n) \text{ converge} \end{cases} \quad \square$$

**Remarque**

- Ce résultat sert généralement à obtenir l'expression de sommes de séries réelles à l'aide de l'étude d'une série complexe.
- Par exemple, on peut démontrer (on le verra en TD) que, pour tout  $\alpha \in ]0, \pi]$ , la série  $\sum \frac{e^{in\alpha}}{n}$  est convergente et de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + i \frac{\pi - \alpha}{2}$$

Cela permet de démontrer que :

- × la série  $\sum \frac{\cos(n\alpha)}{n}$  est convergente et de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

- × la série  $\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n}$  est convergente et de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

**I.3. Reste d'une série convergente****Théorème 2.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

On suppose que la série  $\sum u_n$  est convergente.

On note  $(S_n)$  la suite des sommes partielles associées et  $S$  sa somme.

- 1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $\left(\sum_{k=n+1}^m u_k\right)_{m > n}$  est convergente. La limite de cette suite est notée  $R_n$  et appelée reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum u_n$ .

$$\text{Par définition : } \forall n \in \mathbb{N}, R_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

- 2)  $\forall n \in \mathbb{N}, S = S_n + R_n$

- 3) La suite  $(R_n)$  est convergente et de limite nulle :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$

*Démonstration.*

- 1) (et 2)) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $m > n$ . On a :

$$\sum_{k=n+1}^m u_k = \sum_{k=0}^m u_k - \sum_{k=0}^n u_k = S_m - S_n$$

La série  $\sum u_n$  étant convergente, la suite  $(S_m)_m$  l'est et par passage à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^m u_k &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (S_m - S_n) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m - \lim_{m \rightarrow +\infty} S_n = S - S_n \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure :  $R_n = S - S_n$ .

- 3) D'après ce qui précède :

$$R_n = S - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$$

□

## II. Méthodes pour déterminer la nature d'une série

### II.1. Une condition **NÉCESSAIRE** de convergence

#### Théorème 3.

Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Pour qu'une série converge, il **faut** que son terme général tende vers 0.

*Démonstration.*

Supposons que la série  $\sum u_n$  converge. Ainsi, la suite  $(S_n)$  est convergente vers un élément  $S \in \mathbb{K}$ . Or, pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Comme  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$  et  $S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$ , on obtient :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . □



Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Autrement dit, on peut trouver une suite  $(u_n)$  telle que :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \not\Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

☞  $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  mais la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  n'est pas convergente.

#### Théorème 4.

Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

$$u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

Pour qu'une série diverge, il **suffit** que son terme général ne tende pas vers 0.

*Démonstration.*

C'est la contraposée de l'énoncé précédent. □

#### Définition

Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

On dit que la série  $\sum u_n$  est **grossièrement divergente** si son terme général  $u_n$  est tel que :  $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

#### Remarque

- Le théorème précédent stipule que si une série est grossièrement divergente alors elle est divergente.
- Cet énoncé permet d'établir la divergence de séries. Par exemple, les séries :

$$\sum 1, \sum n, \sum n^2, \sum n^3 \text{ et } \sum q^n \text{ avec } |q| \geq 1$$

sont (grossièrement) divergentes.

- L'idée derrière ce théorème est que pour assurer la convergence d'une série  $\sum u_n$ , c'est-à-dire pour pouvoir sommer tous les termes de la suite  $(u_n)$ , il faut que les termes de cette suite  $(u_n)$  soient « suffisamment petits ».
- On notera au passage qu'une suite  $(u_n)$  qui converge vers  $\ell \neq 0$  est « trop grosse » pour qu'on puisse espérer effectuer la somme (infinie) de tous ses termes (*attention à bien lire l'énoncé du théorème!*).

## II.2. Technique de télescopage

### Théorème 5.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

$$\text{La suite } (u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \text{La série } \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

*Démonstration.*

Notons  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de terme général :  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

Par définition, la série  $\sum v_n$  est convergente si sa suite des sommes partielles  $(T_n)$  est convergente. Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$T_n = \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

( $\Leftarrow$ ) Si  $(u_n)$  converge, il en est de même de  $(u_{n+1})$ .

Ainsi, par l'inégalité précédente, la suite  $(T_n)$  est convergente.

( $\Rightarrow$ ) Si  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge, c'est-à-dire si  $(T_n)$  converge, l'égalité :

$$u_{n+1} = T_n + u_0$$

permet d'affirmer que  $(u_{n+1})$  converge et donc  $(u_n)$  converge.

### Exercice

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 \in ]0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]0, 1]$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et donner sa limite.
3. Étudier la nature de la série  $\sum u_n^2$  et donner sa somme, si elle existe.
4. Prouver que la série  $\sum \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$  est divergente.
5. En déduire la nature de  $\sum u_n$ .

### Exemple

1) À l'aide d'un télescopage, on démontre la divergence de  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ .

En effet, le terme général de cette série vérifie :

$$v_n = \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Ainsi, la somme partielle d'ordre  $n$  de  $\sum v_n$  est :

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et donc la série  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  est divergente.

2) On peut aussi montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n-1)}$  est convergente.

Remarquons :  $\forall k \geq 2, \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ . On a donc :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

### □ Remarque

- Il faut savoir repérer la technique de télescopage même lorsqu'elle est cachée comme dans le point 1).
- Le point 2) illustre quant à lui la technique de décomposition en élément simple (DES) qu'il est fréquent de voir associée à un télescopage.

### Exercice

On considère la série de terme général  $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ .

1. Quelle est la nature de cette série ?
2. Déterminer la somme de cette série.

(on pourra mettre  $u_n$  sous la forme  $u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$ )

**Application de l'exercice précédent : nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  et de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$**

1) Montrons, à l'aide du résultat précédent, que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente.

- On remarque tout d'abord :

$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$$

L'inégalité de droite est une inégalité de convexité.

En effet, la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est concave.

Sa courbe est donc située en dessous de ses tangentes, notamment sa tangente en 0, droite d'équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$$

(évidemment, on peut aussi démontrer cette inégalité en étudiant le signe de la fonction  $x \mapsto x - \ln(1+x)$ )

- Cette inégalité étant vraie en  $x = \frac{1}{k} \geq 0$ , on en déduit :

$$\forall k \geq 1, \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

- Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on obtient par sommation :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$

- Or :  $\ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

On en déduit par théorème de comparaison :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est donc divergente.

2) Montrons que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente.

- Remarquons tout d'abord :  $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$  (\*).
- Ainsi, pour tout  $n \geq 2$ , on obtient par sommation :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

- La suite  $(S_n)_{n \geq 2}$  est :

× croissante puisque pour tout  $n \geq 2, S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ ,

× majorée par 1.

La suite  $(S_n)$  est donc convergente.

Autrement dit, la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2}$  est convergente.

### Remarque

- Dans le point 2), on compare la taille d'une suite  $(v_n)$  à la taille d'une suite  $(u_n)$  (inégalité (\*)) pour démontrer la convergence de la série  $\sum v_n$  sachant que la série  $\sum u_n$  converge.
- En utilisant cette idée, on peut facilement démontrer que pour tout  $\alpha \geq 2$ , la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente.
- Cette idée permet de préciser le résultat énonçant la condition nécessaire de convergence. On sait déjà que pour assurer la convergence d'une série  $\sum u_n$ , il faut que les termes de la suite  $(u_n)$  soient « suffisamment petits ». On peut maintenant ajouter que :
  - × la suite  $(\frac{1}{n})$  est « trop grosse » pour que l'on puisse sommer tous ses termes,
  - × la suite  $(\frac{1}{n^2})$  et toutes les suites plus petites sont « suffisamment petites » (on peut sommer tous leurs termes).

### III. Séries usuelles

#### III.1. Calcul direct des sommes partielles : sommes des puissances d'entiers

##### 1) Somme des $n$ premiers entiers

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = \boxed{\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$S_n - S_{m-1} = \boxed{\sum_{k=m}^n k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}}$$

##### Remarque

La formule donnant la valeur de  $S_n - S_{m-1}$  peut se retenir comme étant le résultat du **demi-produit** :

- × **du nombre de termes** de la somme ( $n - m + 1$ ),
- × **par la somme** ( $n + m$ ) formée **du 1<sup>er</sup> terme  $m$  et du dernier  $n$ .**

##### 2) Sommes des $n$ premiers carrés d'entiers

$$T_n = \sum_{k=0}^n k^2 = \boxed{\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

##### 3) Sommes des $n$ premiers cubes d'entiers

$$R_n = \sum_{k=0}^n k^3 = \boxed{\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} = S_n^2$$

##### Remarque

- Même si les formules font apparaître des divisions par 2, 6 et 4, il est évident que la somme des  $n$  premiers entiers, carrés, ou encore cubes a un résultat entier.
- Généralement, on démontre ces résultats par récurrence.
- On peut aussi démontrer ces formules de manière directe. Par exemple, pour la somme des  $n$  premiers entiers, on commence par remarquer :

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$$

$$\begin{aligned} \text{On en déduit : } \sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) &= 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &\quad \parallel \quad \parallel \\ &= (n+1)^2 - 1^2 \quad 2 \left( \sum_{k=1}^n k \right) + n \end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} 2 \left( \sum_{k=1}^n k \right) &= (n+1)^2 - 1^2 - n = n^2 + 2n + \cancel{1} - \cancel{1} - n \\ &= n^2 + n = n(n+1) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

### III.2. Séries géométriques

#### Théorème 6.

Soit  $z \in \mathbb{K}$ .

1) Tout d'abord :  $\sum z^n$  converge  $\Leftrightarrow |z| < 1$ .

2) De plus, si  $|z| < 1$  :  $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ .

Démonstration.

1) Soit  $z \in \mathbb{K}$ . Deux cas se présentent.

Si  $z = 1$ , on a  $S_n = \sum_{k=0}^n 1^k = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Si  $z \neq 1$ , on commence par remarquer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} (1-z) \sum_{k=0}^n z^k &= \sum_{k=0}^n z^k - \sum_{k=0}^n z^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n z^k - \sum_{k=1}^{n+1} z^k \quad (\text{par décalage d'indice}) \\ &= \left(1 + \sum_{k=1}^n z^k\right) - \left(\sum_{k=1}^n z^k + z^{n+1}\right) \\ &= 1 - z^{n+1} \end{aligned}$$

On en conclut alors (comme  $z \neq 1$ ) :  $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ . Et ainsi :

La série  $\sum z^n$  est convergente  $\Leftrightarrow$  La suite  $(z^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente

Trois sous-cas se présentent alors.

× Si  $|z| < 1$ , on a  $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi,  $z^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $(S_n)$  converge et :  $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ .

× Si  $|z| > 1$ , on procède par l'absurde.

Supposons que la suite  $(z^{n+1})_n$  est convergente. Or, comme  $|z| > 1$  :  $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Absurde!

La suite  $(z^{n+1})$  est donc divergente. Il en est de même de la suite  $(z^n)$ , ce qui démontre que  $(S_n)$  l'est.

× Si  $|z| = 1$  (et  $z \neq 1$ ), on procède par l'absurde.

Supposons que la suite  $(z^{n+1})$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{K}$ .

Il en est alors de même de la suite  $(z^n)$ . Or :

$$z^{n+1} = z z^n$$

Par passage à la limite, on obtient :  $\ell = z \ell$ . Ainsi :  $(1-z) \ell = 0$ .

Comme  $1-z \neq 0$  (car  $z \neq 1$ ), on en déduit :  $\ell = 0$ . Or :

× comme  $z^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  alors  $|z^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ell|$

× comme  $|z| = 1$  alors  $|z^n| = |z|^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Finalement :  $|\ell| = 1$  et  $\ell = 0$ . Absurde!

La suite  $(z^n)$  est donc divergente, ce qui démontre que  $(S_n)$  l'est.

2) Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

Si de plus  $|z| < 1$ , alors la série  $\sum z^n$  est convergente (cf point précédent) et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} z^k &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n z^k \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\ &= \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

□

### Cas des séries géométriques (dérivées) à variable entière

- Lorsque  $x$  est un réel, on démontre de manière aisée :

$$1) \quad \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} \text{ converge } \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$2) \quad \sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2} \text{ converge } \Leftrightarrow |x| < 1$$

De plus, si  $|x| < 1$ , on obtient les sommes suivantes.

$$a. \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad b. \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

- Pour la démonstration **1)**, on peut considérer la fonction  $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ .

C'est une fonction polynomiale et elle est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R} : f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k x^{k-1}$ .

Or, comme vu précédemment, pour tout  $x \neq 1 : f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ .

On en déduit :

$$f'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + n x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$$

De plus, si  $|x| < 1$ , on a  $(n+1)x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $n x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et la série

$\sum n x^{n-1}$  est donc convergente ( $x$  fixé). Finalement, si  $|x| < 1 :$

$$f'_n(x) = \sum_{k=0}^n k x^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- Pour la démonstration **2)**, on raisonne de même. Si  $x \neq 1 :$

$$f''_n(x) = \frac{-(n+1)n x^{n-1} + 2(n+1)(n-1) x^n + n(1-n) x^{n+1} + 2}{(1-x)^3}$$

$$f''_n(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1) x^{k-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

### Application

Dans les exercices, il faudra savoir reconnaître les séries géométriques et géométriques dérivées et savoir calculer leur somme.

- Montrer que  $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$  est convergente et calculer sa somme.

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}, \text{ on note : } u_k = \frac{k}{3^{2k+1}} = k \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} = \frac{1}{3} k \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^k.$$

$$\text{On a donc, pour tout } n \in \mathbb{N} : S_n = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n k \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{1}{27} \sum_{k=0}^n k \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}.$$

C'est la somme partielle d'une série géométrique dérivée qui est convergente car de raison  $\frac{1}{9} \in ]-1, 1[$ .

$$\text{Ainsi : } S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{27} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2} = \frac{1}{3 \times 8} \frac{9^2}{8^2} = \frac{3}{64}.$$

- Montrer que  $\sum \frac{n^2}{2^n}$  est convergente et calculer sa somme.

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}, \text{ on note : } u_k = k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

En écrivant :  $k^2 = k(k-1) + k$ , on obtient :

$$u_k = k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k + k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$\text{On a donc, pour tout } n \in \mathbb{N} : S_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée et la somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde toutes deux convergentes car de raison  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ .

$$\text{Ainsi : } S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} = 4 + 2 = 6$$

### III.3. Série exponentielle

#### Théorème 7.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum \frac{x^n}{n!}$  converge et :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

Ainsi :  $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$ .

*Démonstration.*

Commençons par rappeler l'inégalité de Taylor.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Alors,  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}$  :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) \right| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in I(x_0, x)} \left( |f^{(n+1)}(t)| \right)$$

où on a noté  $I(x_0, x)$  le segment d'extrémités  $x_0$  et  $x$  (c'est  $[x_0, x]$  si  $x \geq x_0$  et  $[x, x_0]$  si  $x < x_0$ ).

Appliquons ce résultat à la fonction  $f : t \mapsto e^t$  (de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ) en  $x_0 = 0$ . On a alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f^{(k)}(t) = e^t, \text{ d'où } f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in I(0, x)} (|e^t|)$$

Or :  $\max_{t \in I(0, x)} (|e^t|) \leq 1 + e^x$ . En effet :

× si  $x \geq 0$  alors :  $\forall t \in [0, x], e^t \leq e^x$ .

× si  $x < 0$  alors :  $\forall t \in [x, 0], e^t \leq 1$ .

Dans les deux cas :  $\forall t \in I(0, x), e^t \leq 1 + e^x$ .

Finalement :

$$0 \leq \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq (1 + e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or :

$$\times 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\times (1 + e^x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, par théorème d'encadrement, on en déduit :  $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$ .  $\square$

#### Remarque

- L'inégalité de Taylor se démontre à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral. Cette formule est au programme en MPSI-MPII (et PSI) mais n'est pas exigible en PCSI. Examinons cet énoncé.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sur  $\mathbb{R}$ .

Alors,  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Ce résultat se démontre par récurrence (cf TD).

- Il est à noter que la formule de Taylor et l'inégalité qui s'en déduit, sont aussi valables pour les fonctions de la variable réelle et à valeurs complexes. En particulier, on peut appliquer l'inégalité de Taylor à la fonction (de la variable réelle)  $f : t \mapsto e^{it}$  ce qui donne le résultat suivant.

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

### Un mot sur ce type d'objets

- L'écriture  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un polynôme de degré  $+\infty$ .
- On appelle cet objet une **série entière** et on dit alors que la fonction exponentielle est développable en série entière (DSE). Toutes les fonctions ne sont pas développables en séries entières. L'intérêt de ce type de développement est la relative simplicité de l'objet  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et notamment son bon comportement vis-à-vis de certaines opérations telles que la dérivation.
- En PSI, un chapitre est dédié à l'étude des séries entières.

On verra d'ailleurs qu'on peut généraliser :

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

### Application

Dans les exercices, il faudra savoir reconnaître la série exponentielle et calculer la somme associée.

Montrer que  $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$  est convergente et calculer sa somme.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note :  $u_k = \frac{k+7}{2^k k!} = \frac{k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 7 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ .

On a donc :  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 7 \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ .

Étudions séparément ces deux sommes.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- D'autre part, on a :  $7 \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 7 e^{\frac{1}{2}}$

On en conclut :  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{15}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2} \sqrt{e}$ .

### III.4. Les séries de Riemann

#### Théorème 8.

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

*Démonstration.*

- Si  $\alpha \leq 0$  : alors  $\frac{1}{n^\alpha} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est (grossièrement) divergente.

- Si  $\alpha > 0$  : deux cas se présentent.

× cas  $0 < \alpha \leq 1$  : alors pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha} \quad (\text{car } k^{1-\alpha} \geq 1)$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on obtient par sommation :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

Or, on a déjà démontré :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

On en déduit, par le théorème de comparaison des suites qui divergent vers l'infini :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est divergente.

× si  $\alpha > 1$  :

(i) On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ .

Cette fonction est dérivable sur  $]0, +\infty[$ . De plus, pour tout  $x > 0$  :

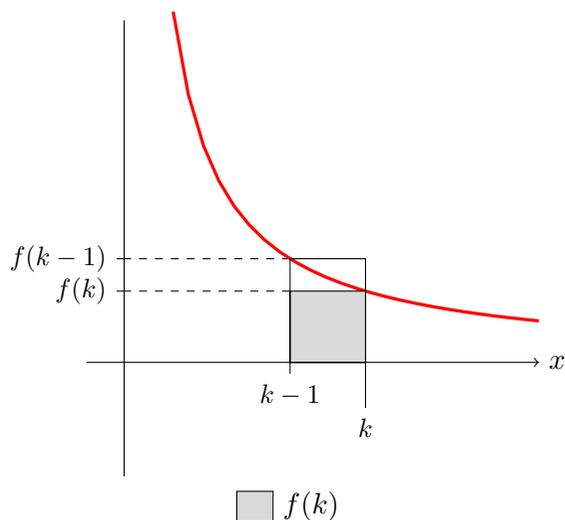
$$f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} \leq 0 \quad (\text{car } -\alpha \leq 0 \text{ puisque } \alpha > 1 \geq 0)$$

On en déduit que la fonction  $f$  est (strictement) décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

(ii) La deuxième étape de la démonstration consiste à démontrer :

$$\forall k \geq 2, f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

Cette inégalité se comprend (mais cela ne constitue pas une démonstration !) à l'aide de la représentation graphique suivante.



Démonstrons cette inégalité.

Soit  $k \geq 2$ . Pour tout  $t \in [k-1, k]$  :

$$k-1 \leq t \leq k$$

$$\text{donc} \quad f(k-1) \geq f(t) \geq f(k)$$

(car  $f$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ )

$$\text{donc} \quad \int_{k-1}^k f(k-1) dt \geq \int_{k-1}^k f(t) dt \geq \int_{k-1}^k f(k) dt$$

(par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $k-1 \leq k$ ))

$$\text{donc} \quad f(k-1) \geq \int_{k-1}^k f(t) dt \geq f(k)$$

(iii) Ainsi, par sommation des inégalités de droite, pour tout  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n f(k) &\leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \\ &\stackrel{||}{=} S_n - 1 \quad \int_1^2 f(t) dt + \dots + \int_{n-1}^n f(t) dt = \int_1^n f(t) dt \\ &\quad (\text{par relation de Chasles}) \end{aligned}$$

Or, comme  $\alpha \neq 1$  :

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1} \left( 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

Enfin  $\frac{1}{\alpha-1} > 0$  (car  $\alpha > 1$ ) et  $\frac{1}{n^{\alpha-1}} > 0$  ce qui permet de conclure :

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{et} \quad S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

(iv) La suite  $(S_n)$  est :

× croissante puisque pour tout  $n$  :  $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0$ ,

× majorée par  $1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ .

Elle est donc convergente.

Ce qui signifie que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente.  $\square$

### Remarque

• Il faut savoir reconnaître ce type de séries dans les exercices. Par exemple :

× les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  sont convergentes.

× les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  sont divergentes.

• Cette démonstration est une illustration de la technique dite de comparaison séries / intégrales.

### Comparaison séries / intégrales

• On considère une fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[0, +\infty[$ .

• On suppose de plus que  $f$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1)$$

Enfin :  $\sum_{k=1}^n f(k) = S_n - f(0)$  et  $\sum_{k=1}^n f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$

(prudence lors de la sommation : sur quels entiers  $k$  peut-on sommer ?)

### Remarque

• Le programme précise que « Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone ». Il est donc primordial de connaître la technique de comparaison série-intégrale même s'il n'y a pas de théorème spécifique au programme.

• Dans l'exercice, on a considéré une fonction continue sur  $[2, +\infty[$ . En conséquence, la sommation a été effectuée pour des entiers plus grands que 2. De manière générale, si  $f$  est une fonction continue et décroissante sur  $[n_0, +\infty[$  (où  $n_0 \in \mathbb{N}$ ), on peut démontrer :

$$\forall k > n_0, \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

Et par sommation :

$$\forall n > n_0, \quad \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\forall n > n_0, \quad \int_{n_0}^n f(t) dt + f(n) \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t) dt$$

• Enfin, si on suppose de plus que la fonction  $f$  est positive, on a :

$$\sum f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \text{L'intégrale } \int_{n_0}^n f(t) dt \text{ admet une limite fine lorsque } n \rightarrow +\infty$$

## IV. Le cas particulier des séries à termes positifs

### IV.1. Les résultats fondamentaux

#### Théorème 9.

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

On note  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles associée à la série  $\sum u_n$ .

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0) \Rightarrow (S_n) \text{ est croissante}$$

*Démonstration.*

Supposons :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ . Ainsi,  $(S_n)$  est croissante.  $\square$

#### Remarque

On peut s'interroger sur la réciproque de ce théorème. Si  $(S_n)$  est croissante, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ . Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$ .

#### Théorème 10.

Soit  $\sum u_n$  une série réelle à termes positifs :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ .

$$1) (S_n) \text{ est majorée} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

$$2) (S_n) \text{ non majorée} \Rightarrow S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

*Démonstration.*

C'est une conséquence directe du théorème de convergence monotone.

La suite  $(S_n)$  est croissante. Ainsi :

× si elle est majorée, elle est convergente.

× si elle est non majorée, elle tend vers  $+\infty$ .

#### Remarque

Si  $\sum u_n$  est une série à termes positifs divergente, alors la suite de ses sommes partielles a pour limite  $+\infty$ . On s'autorise alors, dans ce cas, à

noter :  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$ .

## IV.2. Critère de comparaison des séries à termes positifs

### Théorème 11.

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries réelles à termes positifs.

Supposons :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$

Alors 1)  $\sum v_n$  converge  $\Rightarrow \sum u_n$  converge

2)  $\sum u_n$  diverge  $\Rightarrow \sum v_n$  diverge

*Démonstration.*

Comme :  $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq u_k \leq v_k$ , on en déduit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\times S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k = T_n,$$

×  $(S_n)$  et  $(T_n)$  sont croissantes puisque  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont à termes positifs.

1) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $(T_n)$  est majorée. Ainsi, il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq M$ . D'où :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq T_n \leq M$ .

Cela signifie que  $(S_n)$  est majorée par  $M$ . De plus,  $(S_n)$  est croissante.

Elle est donc convergente. On en conclut que  $\sum u_n$  converge.

2) Si  $\sum u_n$  diverge, la suite croissante  $(S_n)$  est non majorée.

On en déduit :  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq S_n$$

On en déduit :  $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

(on peut aussi remarquer que cet énoncé est la contraposée du 1))  $\square$

#### Remarque

• La conclusion reste valable avec l'hypothèse moins stricte suivante :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$$

pour un certain  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

(la convergence d'une série ne dépend pas des 1<sup>er</sup> termes  $u_0, \dots, u_{n_0}$ )

- Ce théorème est important. Il signifie que pour déterminer la nature d'une série réelle à termes positifs, il suffit de comparer son terme général à celui d'une série de référence (dont on connaît la nature).

### IV.3. Application : les autres critères de comparaison des séries à termes positifs

#### IV.3.a) Résultat intermédiaire

##### Théorème 12.

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries réelles à termes (strictement) positifs.

Supposons qu'il existe  $(m, M) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, 0 < m \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$

Alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

Plus précisément, on a :

- 1)  $\sum u_n$  converge  $\Leftrightarrow \sum v_n$  converge
- 2)  $\sum u_n$  diverge  $\Leftrightarrow \sum v_n$  diverge

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par hypothèse, on a :  $0 < m v_n \leq u_n \leq M v_n$ .

Par le théorème 11, on en déduit :

- 1)  $\sum M v_n$  converge  $\Rightarrow \sum u_n$  converge  $\Rightarrow \sum m v_n$  converge,
- 2)  $\sum m v_n$  diverge  $\Rightarrow \sum u_n$  diverge  $\Rightarrow \sum M v_n$  diverge.

Il suffit alors de remarquer que les séries  $\sum m v_n$ ,  $\sum M v_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature puisque  $\sum_{k=0}^n M v_k = M \sum_{k=0}^n v_k$ .  $\square$

##### Remarque

- La remarque précédente s'applique (ainsi qu'au théorème suivant).
- On peut aussi relâcher l'hypothèse de stricte positivité. Le théorème reste vrai si  $(u_n)$  est à termes positifs et  $(v_n)$  est une suite de termes positifs qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

### IV.3.b) Les critères de négligeabilité, domination et équivalence

##### Théorème 13.

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries réelles à termes (strictement) positifs.

$$1) \left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0 \\ \bullet u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ \bullet \sum v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ est convergente}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ \bullet \sum u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum v_n \text{ est divergente}$$

$$3) \left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n) \\ \bullet \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n) \\ \bullet \sum u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum v_n \text{ est divergente}$$

*Démonstration.*

1) On suppose :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .

Rappelons :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$ .

Ainsi :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$ .

Par exemple, si  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$$

On conclut alors à l'aide du théorème 12 que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

2) On suppose que la série  $\sum v_n$  converge et :  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ .

Rappelons :  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ .

Ainsi :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq \varepsilon$ .

Par exemple, si  $\varepsilon = 1$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq 1$

Autrement dit :  $\forall n \geq n_0, \frac{u_n}{v_n} \leq 1$  et donc  $0 \leq u_n \leq v_n$ .

On conclut, à l'aide du théorème 11, que la série  $\sum u_n$  converge.

3) On suppose que la série  $\sum v_n$  converge et :  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n)$ .

Autrement dit, la suite  $\left( \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \right)$  est bornée. Il existe donc  $M > 0$  et un

rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq M$ . Ainsi :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq M v_n$$

La série  $\sum M v_n$  est à termes positifs et est convergente (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par  $M \neq 0$ ).

On en conclut, par le théorème 11, que la série  $\sum u_n$  converge.  $\square$

### Un point sur les relations de comparaison dans ces théorèmes

• Pour les séries à termes positifs, l'idée de ces théorèmes est de déterminer la nature d'une série  $\sum u_n$  en comparant son terme général au terme général  $v_n$  d'une série de référence (dont on connaît la nature)  $\sum v_n$ . Pour ce faire, on utilise les relations de comparaison  $\underset{n \rightarrow +\infty}{o}$ ,  $\underset{n \rightarrow +\infty}{O}$ ,  $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$ . Il s'agit de déterminer si les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont un comportement asymptotique proche. Plus précisément :

× la relation  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  signifie que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont même comportement asymptotique. La nature d'une série  $\sum u_n$  ne dépend pas des premiers termes de la suite  $(u_n)$ . Il paraît donc logique que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  aient même nature si les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont même comportement asymptotique.

× la relation  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$  signifie que la suite  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$ . Ainsi, si la suite  $(v_n)$  est suffisamment petite (convergence suffisamment rapide vers 0) pour que l'on puisse sommer ses termes, il est logique qu'il en soit de même pour la suite  $(u_n)$ .

× la relation  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n)$  signifie que la suite  $(u_n)$  a un comportement asymptotique au pire à hauteur de celle de  $(v_n)$  à un coefficient multiplicatif près. Il est donc là encore logique que si la suite  $(v_n)$  est suffisamment petite pour que l'on puisse sommer ses termes, il est logique qu'il en soit de même pour la suite  $(u_n)$ .

**Exercice**

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

$$\begin{array}{llll}
 a. \sum \frac{n+1}{(n+3)^2} & d. \sum n^4 e^{-n} & g. \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2} & i. \sum \frac{\ln(n)}{2^n} \\
 b. \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} & e. \sum n^n e^{-n} & h. \sum \frac{1}{n 2^n} & j. \sum \frac{\ln(n)}{n^2} \\
 c. \sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) & f. \sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) & k. \sum \frac{\ln(n)}{n} & 
 \end{array}$$

**Un point sur le caractère positif**

- Il est à noter que pour étudier une série  $\sum u_n$  à termes négatifs, il suffit d'étudier la série  $\sum -u_n$  qui est à termes positifs.
- On aurait donc pu énoncer les Théorèmes 11, 12, 13 sur des séries à termes négatifs. En fait, l'hypothèse adéquate pour ces théorèmes est celle des séries à termes de signe constant.
- Notons que certaines séries ne sont pas à termes de signe constant. Pour déterminer la nature d'une telle série, on se sert souvent de la notion de convergence absolue.

**V. Convergence absolue d'une série numérique****V.1. La convergence absolue implique la convergence****Définition**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

- La série  $\sum u_n$  est dite **absolument convergente** si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

**Remarque**

Évidemment, dans le cas d'une série à termes positifs, convergence et convergence absolue sont deux propriétés synonymes.

**Théorème 14. (Inégalité triangulaire)**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

- 1) 
$$\sum u_n \text{ est absolument convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ est convergente}$$
- 2) Dans le cas de la convergence absolue, on a de plus :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

*Démonstration.*

- 1) On suppose que la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

**Démonstration dans le cas où  $(u_n)$  est une suite réelle**

On introduit  $(v_n)$  et  $(w_n)$  les suites définies par :

$$v_n = \frac{u_n + |u_n|}{2} (= \max(0, |u_n|)) \quad \text{et} \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} (= -\min(0, |u_n|))$$

$v_n$  est la partie positive de  $u_n$  et  $w_n$  est la partie négative de  $u_n$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $0 \leq v_n \leq |u_n|$ .
  - × Par hypothèse,  $|u_n|$  est le terme général d'une suite convergente.
  - × Ainsi, par le théorème 11, la série  $\sum v_n$  est convergente.
- De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq w_n \leq |u_n|$ .
  - × Par hypothèse,  $|u_n|$  est le terme général d'une suite convergente.
  - × Ainsi, par le théorème 11, la série  $\sum w_n$  est convergente.

Enfin, on remarque que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = v_n - w_n$ . Le terme général de  $\sum u_n$  apparaît comme somme de deux termes généraux de séries convergentes. La série  $\sum u_n$  est donc convergente.

### Démonstration dans le cas où $(u_n)$ est une suite complexe

On suppose que la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

Il s'agit alors de démontrer que la série  $\sum u_n$  est convergente.

C'est le cas si et seulement si  $\sum \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum \operatorname{Im}(u_n)$  le sont.

Il suffit alors de remarquer :

$$0 \leq |\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n| \quad (\text{et } 0 \leq |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|)$$

On en déduit, par théorème de comparaison des séries à termes positifs que les séries  $\sum \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum \operatorname{Im}(u_n)$  sont (absolument) convergentes, ce qui permet de conclure.

2) Par inégalité triangulaire, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$ .

Les séries  $\sum u_n$  et  $\sum |u_n|$  étant supposées convergentes, on obtient le résultat souhaité par passage à la limite dans cette inégalité.  $\square$

### Exercice

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

## V.2. Critère de domination pour démontrer l'absolue convergence d'une série

### Théorème 15.

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

Soit  $(v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$  ( $(v_n)$  est une suite d'éléments réels positifs).

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{C} \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \bullet \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La série } \sum u_n \text{ est (absolument) convergente}$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que pour toute suite  $(w_n)$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  :

$$(w_n) \text{ bornée} \Rightarrow (|w_n|) \text{ bornée}$$

En appliquant ce résultat à la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ , on démontre :  $|u_n| = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ .

- Il suffit de remarquer :

×  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq 0$  et  $v_n \geq 0$

×  $|u_n| = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$

× La série  $\sum v_n$  est (absolument) convergente.

Ainsi, par le théorème de domination des séries à termes positifs, la série  $\sum |u_n|$  est convergente.  $\square$

### Remarque

- Cette présentation du théorème de domination est celle du programme officiel. Elle est intéressante car permet de s'abstraire de l'utilisation du module qui n'apparaît pas directement dans les hypothèses. Cependant, d'un point de vue pédagogique, il est bienvenu de se poser la question de la convergence absolue et il est donc pertinent de penser à travailler avec le module (ou la valeur absolue selon le contexte) du terme général de la série. La présentation mise en avant dans le programme ne doit donc être utilisée qu'en cas de recul suffisant.

- Dans la démonstration, on démontre :

$$u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow |u_n| = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$$

De manière similaire, on peut démontrer (revenir à la définition de négligeabilité) :

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow |u_n| = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$$

On peut alors présenter le critère de négligeabilité sous la forme :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{C} \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \bullet \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La série } \sum u_n \text{ est (absolument) convergente}$$

- La notion d'absolue convergence n'est pas équivalente à la notion de convergence. Plus précisément : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. On parle alors de série **semi-convergente** pour désigner une série convergente mais non absolument convergente.
- Un exemple classique est celui de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ . Cette série est :
  - × convergente. On va le démontrer dans le paragraphe suivant.
  - × non absolument convergente. En effet, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Or, la série  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente.

C'est un cas très particulier de série semi-convergente. En effet, on a ici affaire à une série alternée, c'est-à-dire une série dont le terme général change de signe à chaque rang. Pour démontrer la convergence de ces séries, on utilise le critère spécial des séries alternées.

## VI. Propriétés des séries convergentes

### VI.1. Propriétés algébriques élémentaires

#### Théorème 16.

Soient  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

On suppose que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont convergentes.

#### 1) Linéarité

a) Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ , la série  $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$  est convergente.

b) De plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

#### 2) Positivité

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_0, u_k \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \geq 0$$

#### 3) Croissance

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_0, u_k \leq v_k \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$$

#### Remarque

- On peut démontrer, à l'aide de ce résultat :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ La série } \sum u_n \text{ est convergente} \\ \bullet \text{ La série } \sum v_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La série } \sum (u_n + v_n) \text{ est divergente}$$

- Application : déterminer la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ .  
(penser à un développement asymptotique)

## VII. Applications du chapitre

### VII.1. Nature d'une série par développement asymptotique

On présente cette technique en l'illustrant par un exemple.

La série  $\sum n \left( \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$  est convergente

- Commençons par rappeler le développement limité de la fonction sin en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

- On en déduit :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{donc} \quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{donc} \quad n \left( \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| n \left( \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) \right| \geq 0 \text{ et } \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$\times \left| n \left( \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

× La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 ( $> 1$ ).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série  $\sum n \left( \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$  est (absolument) convergente.

### VII.2. La formule de Stirling

**Théorème 17** (Formule de Stirling).

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

#### Remarque

- Dans ce qui suit, on démontre cette équivalence sous l'écriture suivante, plus simple pour mener les calculs :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note :

$$\alpha_n = n!, \quad \beta_n = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

- La démonstration exploite plusieurs résultats du chapitre. Son schéma est le suivant.

#### 1) Démonstration que la suite $(u_n)$ converge

Pour ce faire :

- ▶ on introduit la suite  $(v_n)$  de terme général :  $v_n = \ln(u_n)$  (ce qui permet de travailler sur des sommes et pas des quotients).
- ▶ on exploite alors la propriété de sommation télescopique :

$$(v_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum (v_{n+1} - v_n) \text{ converge}$$

- ▶ pour déterminer la convergence de cette série, on réalise un développement asymptotique de son terme général  $v_{n+1} - v_n$ , ce qui permet de le comparer par rapport aux termes généraux de séries de référence via les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.

#### 2) Démonstration que la limite de $(u_n)$ est $\sqrt{2\pi}$

Ce résultat est fourni par l'étude d'une intégrale de Wallis.

*Démonstration.*

1) • Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note :  $v_n = \ln(u_n)$  et  $w_n = v_{n+1} - v_n$ .

$$\begin{aligned} w_n &= \ln \left( \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1}} \right) - \ln \left( \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \right) \\ &= \ln \left( \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}} \times \frac{e^{-n}}{e^{-n-1}} \right) \\ &= \ln \left( \cancel{(n+1)} \times \left( \frac{n+1}{n} \right)^{-n-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\cancel{n+1}} \times e \right) \\ &= \ln \left( e \times \frac{1}{\left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \ln(e) - \ln \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= 1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

• Rappelons :  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ . On en déduit :

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^3} \right)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) &= 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) \\ \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{4} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^3} \right) \\ \text{donc : } \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) &= 1 + \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } w_n = -\frac{1}{12} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

• Or :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{12} \frac{1}{n^2} \leq 0$$

$$\times w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$$

× La série  $\sum -\frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$  est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 ( $> 1$ ).

Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes négatifs, la série  $\sum w_n$  (c'est-à-dire  $\sum (v_{n+1} - v_n)$ ) est convergente.

• On en conclut que la suite  $(v_n)$  est convergente. Notons  $\ell$  sa limite.

$$u_n = e^{\ln(u_n)} = e^{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{o} e^\ell \quad \left( \begin{array}{l} \text{car la fonction exp} \\ \text{est continue en } \ell \end{array} \right)$$

• Finalement :  $u_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^\ell > 0$  et donc :

$$\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell \beta_n \quad \text{ou encore} \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Pour conclure, il reste donc à démontrer :  $e^\ell = \sqrt{2\pi}$ , c'est-à-dire :  $\ell = \ln(\sqrt{2\pi})$ .

2) La deuxième partie de la démonstration se base sur le résultat ci-dessous.

### Intégrales de Wallis

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$ .

$$a) \quad W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

$$b) \quad \forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1} \times (n!)^2}$$

(démonstration en TD)

- Pour plus de lisibilité, notons :  $K = e^\ell$ .  
Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1} \times (n!)^2} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi K (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{2^{2n+1} \times \left(K n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right)^2} \\ &= \frac{\pi K}{K^2} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n+1}} \frac{n^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}} \frac{e^{-2n}}{e^{-2n}} \\ &= \frac{\pi}{K} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{K \sqrt{2n}} \end{aligned}$$

On en déduit :  $\frac{\sqrt{2n}}{\pi} W_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{K}$ .

- Or, par la propriété a) :

$$\frac{\sqrt{2n}}{\pi} W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \sqrt{\frac{2n}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Par unicité de la limite, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{K} \quad \text{ou encore} \quad K = \sqrt{2\pi}$$

Ce qui permet de conclure.  $\square$

## VIII. Bilan du chapitre

### Résumé des séries rencontrées

On regroupe dans le tableau ci-dessous les séries rencontrées dans le chapitre (cours et TD). Savoir démontrer les résultats contenus dans ce tableau constitue un excellent exercice de vérification des techniques du chapitre.

$\sum u_n$	Nature de $\sum u_n$
$\sum n^3$	$\sum n^3$ diverge (grossièrement)
$\sum n^2$	$\sum n^2$ diverge (grossièrement)
$\sum n$	$\sum n$ diverge (grossièrement)
$\sum 1$	$\sum 1$ diverge (grossièrement)
$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge
$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$	$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$
$\vdots$	$\vdots$

$\vdots$	$\vdots$
$\sum q^n$	$\sum_{n \geq 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow  q  < 1$
$\sum_{n \geq 1} n q^{n-1}$	$\sum_{n \geq 1} n q^{n-1}$ converge $\Leftrightarrow  q  < 1$
$\sum_{n \geq 2} n(n-1) q^{n-2}$	$\sum_{n \geq 2} n(n-1) q^{n-2}$ converge $\Leftrightarrow  q  < 1$
$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge
$\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$	$\sum_{n \geq 0} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge
$\sum e^{-n}$	$\sum_{n \geq 0} e^{-n}$ converge
$\sum \frac{x^n}{n!}$	$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (pour tout $x \in \mathbb{R}$ )
$\sum \frac{z^n}{n!}$	$\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (pour tout $z \in \mathbb{C}$ )
$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ semi-convergente
$\sum_{n \geq 2} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$	$\sum_{n \geq 2} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ semi-convergente
$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est (absolument) convergente
$\sum_{n \geq 2} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$	$\sum_{n \geq 2} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$ (absolument) convergente
$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$	$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ divergente

## MÉTHODO

Étude de séries (*bilan du chapitre*)

L'étude de la nature de  $\sum u_n$  s'effectue par l'une des techniques suivantes.

1) Si la série  $\sum u_n$  est d'une forme particulière

- On peut directement déterminer la nature d'une série si :
  - × son terme général est, à multiplication par un réel/complexe non nul près, le terme général d'une série dont on connaît la nature,
  - × son terme général est la combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes (dans ce cas, la série étudiée est convergente).
  - × son terme général est la combinaison linéaire de termes généraux d'une série convergente et d'une série divergente (dans ce cas, la série étudiée est divergente).

Ces deux derniers cas sont souvent utilisés dans le cas de développement asymptotiques (une bonne connaissance des  $DL_m(0)$  usuels est exigée!).

- On peut revenir à la définition de convergence : la série  $\sum u_n$  est convergente ssi la suite  $(S_n)$  est convergente (*c'est notamment utile lorsqu'il s'agit de « Déterminer la nature d'une série et calculer sa somme »*) :
  - × on peut calculer  $S_n$  : en reconnaissant la somme partielle d'une série usuelle (notamment les séries géométriques et géométriques dérivées première / deuxième, la série exponentielle) ou en faisant apparaître une sommation télescopique.
  - × on peut estimer  $S_n$  à l'aide d'une inégalité telle que celle fournie par une comparaison séries / intégrales.

2) Étude de la suite  $(u_n)$  réelle ou complexe

a) (i) Si  $u_n \not\rightarrow 0$ , la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement donc diverge.

(ii) Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , la série  $\sum u_n$  ne diverge pas grossièrement.

La série  $\sum u_n$  peut être divergente ou convergente.

(une étude plus précise doit être réalisée)

b) Utilisation de la règle de d'Alembert (si le terme général s'écrit à l'aide de produits / quotients) (PSI).

C'est une première étude de la « taille » du terme général  $u_n$  de la série  $\sum u_n$  étudiée.

3) Si  $\sum u_n$  est à termes positifs (c'est-à-dire si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ )

On dispose des quatre outils suivants.

- a) Critère de comparaison par inégalité des séries à termes positifs.
- b) Critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs.
- c) Critère de comparaison par négligeabilité des séries à termes positifs.
- d) Critère de comparaison par domination des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général  $u_n$  de la série  $\sum u_n$  étudiée. Pour ce faire, on compare  $u_n$  au terme général  $v_n$  d'une série de référence. On pensera notamment :

× à comparer avec des séries de terme général  $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$  dont la nature est donnée par le critère de Riemann.

*(on pourra aussi penser à comparer au terme général d'une série géométrique ou au terme général de la série exponentielle ou plus généralement au terme général d'une série dont on a établi la nature précédemment)*

× à utiliser la formule de Stirling pour évaluer la taille d'un terme général faisant apparaître des factorielles.

**Note** : si  $\sum u_n$  est à termes négatifs, on étudie  $\sum -u_n$  qui est de même nature que  $\sum u_n$ .

4) Si  $\sum u_n$  est à termes réels de signes non constants ou est à termes complexes

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

- a) Utilisation du critère spécial des séries alternées si le cadre s'y prête (PSI).
- b) Démontrer de la convergence absolue (comme  $|u_n| \geq 0$ , les techniques du 3) sont utilisables)
  - Si  $\sum |u_n|$  est convergente (c'est-à-dire  $\sum u_n$  absolument convergente) alors  $\sum u_n$  est convergente.
  - Si  $\sum |u_n|$  est divergente alors  $\sum u_n$  peut être divergente ou convergente (*une étude plus précise doit être réalisée*).